TRATTATO ELEMENTARE

DI

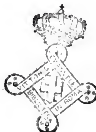
GEOMETRIA

PIANA E SOLIDA

DEL

PROF. M. SERRA





TESTO

MILANO
TIPOG. E LITOG. DEGLI INGEGNERI.

AL COMMENDATORE

Q. SELLA

IN SEGNO D' OMAGGIO E DI RICONOSCENZA

L' AUTORE

ANTICO SUO DISCEPOLO

PREFAZIONE.

Nei molti anni d' insegnamento da me professato a studenti, sia che dovevano subire l' esame d' ammessione agli studj di Matematica nelle RR. Università del Regno, sia che dovevano subire quello d' ammessione nella R. Militare Accademia, sia ancora che dovevano abbracciare la carriera di Misuratore, m' ebbi a persuadere dell'utilità di cui sarebbe stato un nuovo Trattato Elementare di Geometria, il quale, contenendo tutto il tesoro di principii che costituisce questo ramo delle scienze matematiche, fosse esposto colla maggiore concatenazione possibile di tutte le Proposizioni, e contenesse ragionati e discussi molti Problemi che sono soggetto di applicazione della Teoria, epperciò soggetto degli esami.

Si conosce solo la Geometria, alloraquando si è capaci della immediata risoluzione di qualsiasi problema, cioè della immediata applicazione della Teoria. Ora bene, non è possibile che assai difficilmente di giungere a questo risultato, avendo solo in capo una determinata collezione di Teoremi o Problemi: occorre un perfetto raccordamento tra la prima e l'ultima Proposizione, occorre ancora un avvezzamento graduato alla soluzione, e discussione di Problemi.

Venerando, e valendomi i numerosi trattati che sulla materia vennero compilati dai più rari intelletti, e particolarmente alcune note

di un corso di Geometria dettato con grande dottrina alcuni anni sono dall' illustre Matematico il signor Quintino Sella, m' accinsi alla compilazione di questo Trattato, nell'intendimento di offrire alla odierna gioventù studiosa un libro di Testo che loro possa essere di valida guida nella assistenza alle pubbliche scuole, e risponda ai singoli quesiti de' vigenti programmi governativi di Geometria.

È quest'opera divisa in sei libri, i tre primi trattano della Geometria piana, i tre ultimi della Geometria solida. Ad ogni libro va annesso, buon numero di Problemi ragionati e discussi, ed un quadro contenente le principali formole necessarie alla soluzione dei quesiti più importanti.

Ho esteso molto la materia, senza però passare i confini assegnati alla Geometria Elementare. Se diffatti, lo studio delle curve in generale spetta ad un ramo più elevato delle matematiche, non le ho trattate che per la parte cui è sufficiente il solo impiego degli elementi di Geometria; ed ho offerto così, il mezzo di fare acquistare utili cognizioni sulla materia a coloro che non intendono di addentrarsi nella parte analitica, ed ai quali cionnullameno può importare tanto la conoscenza, come il sapersi valere del concorso di certi luoghi geometrici, nella risoluzione di importanti Problemi. Del resto, in quanto alle Proiezioni in genere, e di quella assonometrica in particolare, egli non è che sotto la forma di appendice al quarto ed al quinto libro che ne ho trattato.

Quanto poi all'esposizione delle figure ho avuto in mente di porgere allo studioso ogni maggior facilitazione per la intelligenza del testo, riunendo le tavole su cui si trovano rappresentate, in un atlante a parte, badando all'esattezza delle costruzioni e alla nitidezza del disegno; ponendo cura altresì alla distinzione delle linee, per modo che a prima vista si scorgano quelle date, quelle di costruzione e quelle risultanti da una costruzione, col tracciare le prime andanti e ben marcate, le seconde tratteggiate, e le ultime di nuovo andanti,

ma sottili ; e per ultimo, rappresentando i corpi solidi in disegno assonometrico.

Nel sottoporre questo mio lavoro al critico esame degli intelligenti, non posso dispensarmi, dal chiedere quel compatimento che ha il diritto di avere il compilatore di un Trattato che deve servire all'elementare istruzione, e che si raggira su materie di per sè stesse astruse, le quali perciò ben difficile riesce di svolgere con linguaggio adatto ed al tempo stesso chiaro.

Intanto, terminando questa prefazione mi sento in debito di indirizzare dei ringraziamenti all' illustrissimo signor Comm. Sella, e ad un egregio amico mio (del quale m' incresce di non potere dire il nome), per avere il primo, accolta l'offerta di questo debole frutto delle mie fatiche, non che approvatone il merito della pubblicazione, come da lettera 30 Luglio 1867; il secondo, avuta la compiacenza di rivedere il mio lavoro, e di indicarmi delle correzioni utilissime.

Milano, addì 8 Ottobre 1869.

L' AUTORE.

DELLA GEOMETRIA

PRELIMINARI.

La *Geometria* è la scienza, che studia le proprietà e la misura dell' estensione.

Le cose tutte che esistono, e quelle che l'uomo colla sua facoltà più o meno grande del pensiero è capace di immaginare, hanno estensione finita, cioè occupano nello spazio immenso, infinito un certo posto, la di cui grandezza dipende dall' oggetto preso in considerazione, o dalla più o meno grande forza dell' intelletto.

Or bene, l' oggetto sia egli allo stato di solidità o di liquidità, o di gazosità, occuperà sempre un posto nello spazio che non differirà che da essere nel primo caso nella forma datagli dalla natura ovvero dall' uomo, nel secondo in quella offerta dal recipiente che lo contiene, e nel terzo dall'ambiente che lo circonda. In tutti questi tre casi la cosa considerata estendendosi, riunirà le tre dimensioni conosciute coi nomi di lunghezza, larghezza ed altezza. Questi tre elementi sono quelli che costituiscono il corpo. Mancando uno qualunque di essi, non vi sarà più corpo, ma ciò che si chiama superficie. Le superficie quindi hanno sola lunghezza e larghezza, oppure lunghezza ed altezza, oppure larghezza ed altezza; ed in ognuno di questi casi, il terzo elemento dovendosi considerare ridotto a zero, è evidente che quelle non saranno più corpi, e quindi la loro rappresentazione non potrà che concepirsi colla mente o raffigurarsi materialmente col terzo elemento ridotto ai nostri sensi nel modo il più sottile. Mancando due qualunque degli elementi che

costituiscono il corpo, si ha ciò che chiamasi la *linea*. Essendo impossibile trovare un corpo che abbia sola lunghezza, o sola larghezza, o sola altezza, non altri che il pensiero potrà immaginare la linea, e per rappresentarla materialmente converrà prendere un filo sottilissimo di sostanza qualunque, oppure segnarla per mezzo del gesso o della matita sulla lavagna o sulla carta.

Finalmente mancando tutti e tre gli elementi del corpo, si ha il *punto*. A più forte ragione questo non può concepirsi che colla mente; e per averlo materiale farà mestieri segnarlo, a mo' d' esempio, allo stesso modo della linea, o col gesso o colla matita. Dalla rappresentazione fisica della linea e del punto si vedrà che la prima si può considerare come una serie di punti. La difficoltà, che si incontra nel concepire colla mente una superficie, una linea, un punto, è identica con quella che si incontra nel farsi l'idea dell'infinito, come di altra cosa non limitata, come sarebbe il tempo e l'eternità.

Dalla definizione data della Geometria chiaro emerge ch' essa si occupa soltanto dello studio delle proprietà e della misura dei corpi, delle superficie e delle linee, poichè queste e i primi soltanto hanno estensione.

Lo studio delle proprietà dei corpi, delle superficie e delle linee si fa col confronto, determinando i rapporti che corrono fra di loro. Le proposizioni geometriche, che si occupano di queste proprietà o rapporti, quando risultano evidenti di per sè stesse, si dicono *Assiomi*; quando invece la verità da loro annunciata abbisogna, per divenire evidente, di un ragionamento o *dimostrazione*, sono definite colla parola *Teorema*; se poi esse hanno per oggetto la *soluzione* di una data questione, costituiscono ciò che si chiama *Problema*; ed infine, allorachè intendono a svolgere un principio o vero da impiegarsi sussidiariamente per la dimostrazione d' un teorema, o la soluzione d'un problema, prendono la denominazione di *Lemma*.

Denominazioni speciali ricevono eziandio le conseguenze desunte da proposizioni, come le osservazioni fatte su di esse; così si dice *Corollario* la conseguenza che deriva da una o più proposizioni; *Scolio* l'osservazione sopra una o più proposizioni, che tende a far vedere il loro legame, la loro utilità, la loro restrizione, o la loro più estesa applicazione.

Però le questioni di Geometria non possono considerarsi che di due ordini: o si tratta cioè di dimostrare una proprietà o un teorema, oppure di trovare delle quantità in funzione di altre date e coll'aiuto di teoremi, cioè di risolvere un problema. La dimostrazione di un teorema talora può farsi colla semplice Geometria, altra volta abbisogna dell' aiuto dell' algebra; nel primo caso la dimostrazione si chiama puramente geometrica, nel secondo analitica; ed è appunto alla Geometria analatica o complementare che spetta l'applicazione dell'algebra alla Geometria, ed in generale lo studio delle questioni di alta Geometria.

La risoluzione di un problema può essere o grafica o analitica, secondochè la stessa si attua descrivendo effettivamente sulla carta, sulla lavagna o sul terreno le linee o figure domandate, oppure si opera col mezzo di calcoli numerici od algebrici, stabiliti dietro i principii della Geometria.

Lo studio poi della misura dei corpi, delle superficie e delle linee si fa col confronto di elementi della stessa specie, presi per unità di misura, determinando il numero di volte che entrano gli uni negli altri o si sovrappongono tra loro. Il risultato della misura dei corpi è il *volume,* quello della superficie l'*area,* e quello delle linee la *lunghezza.* Si tratterà adunque, per i corpi, di confrontare volumi con volumi, per le superficie aree con aree, e per le linee lunghezze con lunghezze.

Qualunque corpo occupando, nello spazio infinito in cui si trova, un luogo determinato, ha un limite che lo separa dallo spazio infinito medesimo e lo rende apparente sotto una data forma. Questo limite, per dirsi tale, trattandosi di un volume, non può essere che una superficie, che ha solo due dimensioni.

Ciò posto, se si prende in esame un corpo qualunque, si troverà o che esso è terminato da una superficie *uniforme* (vedi Fig. 1, Tavola I), oppure da una superficie *disuguale* (vedi Fig. 2), vale a dire formata di diverse superficie. Ne segue quindi che corre divario tra dire superficie di un corpo e semplicemente superficie, sebbene si debba sempre comprendere una estensione in due soli sensi, a due dimensioni.

Per superficie di un corpo si intenderà adunque la intiera superficie che lo determina, mentre per semplicemente superficie si comprenderà una estensione limitata da linee, secondo due dimensioni.

In conseguenza di tale definizione si potrà quindi dire che il corpo rappresentato alla Fig. 1, è un corpo terminato da una sola superficie, ed i corpi rappresentati alle Fig. 2 e 3, corpi terminati da diverse superficie. Osservando poi le figure 2 e 3 si scorgerà altresì che le differenti superficie si incontrano secondo linee, ed anco dando origine a punti, come alla Fig. 2. Donde si può inferire, che all'esistenza del corpo disegnato alla Fig. 2 concorrono le superficie, le linee ed i punti; le prime limitando il corpo nello spazio, le seconde limitando le superficie, e gli ultimi limitando le linee. Egli è poi evidente, che il punto essendo l'incontro di due o più linee, desso è comune a queste, nello stesso modo che sono comuni le linee alle superficie che le determinano, e le superficie ai corpi ed allo spazio in cui i medesimi sono racchiusi.

Le linee, le superficie, i corpi, a seconda della loro forma, o figura od essenza, ricevono denominazioni varie; così si ha che la linea si distingue in *retta* e *curva,* la superficie in *piana* e *curva,* il corpo in *poliedro* e in *corpo a superficie curve.*

La linea che si chiama retta è quella che segna il più breve cammino fra due punti, od in altro modo è quella che può girare sopra se stessa senza cangiare di posizione.

La linea A B tracciata alla Fig. 4 è una linea retta, che per brevità dicesi semplicemente retta. I due punti A, B chiamansi gli estremi della retta, la quale si legge nominando le stesse lettere poste ai suoi estremi medesimi. La linea A C D E B della Fig. 5, che è formata dalle rette A C, C D, D E, E B, chiamasi linea spezzata o poligonale, e si nomina colle lettere poste ai punti d'incontro delle diverse rette, di cui è formata.

La linea che si chiama curva è quella che non è nè retta nè composta di linee rette. La linea A C B della Fig. 6 è una linea curva, di cui A e B sono gli estremi; essa si nomina con più lettere corrispondenti a diversi suoi punti, che ne determinano l'andamento. La linea A C D E B della Fig. 9, formata dalle rette C D, D E e dalle curve A C, E B, chiamasi *mistilinea,* e si legge come la linea spezzata.

Per superficie piana o semplicemente piano, intendesi una superficie, colla quale una retta coincide in tutti i suoi punti, qualunque sia la direzione che le venga data, adattandola sulla superficie stessa.

Le superficie piane ricevono denominazioni particolari a seconda della natura delle linee che le limitano. Chiamasi *figura rettilinea* od anche *poligono* una superficie piana terminata da ogni parte da linee rette, come alla Fig. 11; diversamente *figura curvilinea*, una superficie terminata da una o più linee curve. Fra i poligoni il più importante è quello terminato da tre rette che chiamasi *triangolo*. Allorchè il limite della superficie è una sola curva, e questa è tale che tutti i suoi punti distanno ugualmente da un punto interno chiamato *centro*, la figura prende il nome speciale di *circolo* o *cerchio*, e la curva stessa quello di *circonferenza*. Cosl nella Fig. 12 il punto C, che dista ugualmente da tutti i punti della curva A F B E D, chiamasi *centro*, la curva stessa A F B E D circonferenza e la superficie da essa racchiusa circolo di centro C. In un cerchio A F B E D (Fig. 12) una retta A B, che passi pel centro e termini alla circonferenza, si chiama *diametro*, ed una retta condotta dal centro alla circonferenza, come C A, C F, C B, C E, C D, si chiama *raggio*. Qualunque diametro divide il circolo e la circonferenza in due parti uguali, che si chiamano *semicircoli* e *semicirconferenze*. I diametri sono doppii dei raggi. Ogni altra retta D E, condotta nel circolo senza passare pel centro, si chiama *corda*. Se per ultimo una superficie piana è chiusa da una linea mista, come sarebbe la Fig. 13, dessa superficie dicesi *figura mistilinea*.

Superficie curva è quella, che non è nè piana nè formata da superficie piane.

Tutti i corpi in generale possono distinguersi in tre grandi categorie:

1.° Corpi terminati da superficie piane detti *poliedri*;

2.° Corpi terminati da superficie piane e curve;

3.° Corpi terminati da superficie curve.

La Geometria elementare non si occupa che dei poliedri e di alcuni tra i *corpi rotondi*, cioè corpi le cui superficie sono generate da linee curve, o spezzate, o miste, che girano attorno ad una retta presa per asse, compresi nelle due ultime catagerie e conosciute sotto i nomi di *cilindro*, *cono* e *sfera*.

Poliedro è il corpo rappresentato alla Fig. 2; esempio di corpi rotondi sono dati dalle Fig. 1, 7, e 8.

La forma di un corpo viene determinata da quella della sua superficie. L'idea di tal forma si acquista a prima giunta osservando la

linea, che segna nello spazio il contorno apparente del corpo. Se la superficie del corpo è uniforme, null'altro concorre a rendere più completa quell'idea; ma se dessa è disuguale, vi hanno tutte le linee d'incontro delle varie superficie di cui è formata, che servono pure a caratterizzare in modo speciale la forma del corpo. Le Figure 2 e 3 offrono esempii di questi corpi a superficie disuguale, sulla quale si scorgono, oltre ai contorni apparenti dei corpi, delle linee speciali, che non sono altro che le linee d'incontro delle varie superficie parziali, di cui è formata la superficie totale dei corpi stessi. Sulla superficie del corpo rappresentato alla Fig. 2, che è costituita da ventiquattro faccie piane, si vedono delle rette A B, B C, B D, B N, D E, D F, ecc., che risultano dall'incontro di quelle faccie; mentre sulla superficie del corpo rappresentato alla Fig. 3, che è formata da due superficie curve e tre piane, si rimarcano delle curve A B C V, G H I L, R Q P S, D E F, secondo le quali s'incontrano esse superficie tra loro.

Le linee curve d'incontro di superficie piane con superficie curve, come A B C V, R Q P S, G H I L (Fig. 3), essendo contenute in un piano, sono *curve piane*; quelle comuni a due superficie curve, come F E D, non sono piane, e si distinguono in *curve a doppia curvatura*. Così la linea curva D F A B E della Fig. 12 è una curva piana, e le due linee curve A B C D E F G, tracciate sui solidi rappresentati dalle Fig. 7 ed 8 e conosciute col nome di *eliche*, sono curve a doppia curvatura.

Qualunque curva, sia essa piana od a doppia curvatura, può considerarsi come una linea spezzata formata di rette tanto corte, da coincidere prossimamente colla curva stessa. Così alla linea curva A C D B (Fig. 10) si può sostituire la linea spezzata A 1 2 3 C 4 D 5 6 7 B, la quale è prossima a coincidere con essa curva. Il grado d'approssimazione tra la linea curva e la spezzata, dipenderà quindi dal numero più o meno grande di rette, di cui questa si comporrà per sostituire la curva.

Parimente a qualunque superficie curva è facile concepire sostituita una superficie poliedrica, che si accosti tanto maggiormente a quella, ossia tanto più si approssima a coincidere con quella, quanto più grande sia il numero delle faccie piane, di cui essa si compone.

Le linee curve in genere si dividono in curve chiuse ed in curve aperte; le prime non hanno limiti, le seconde li hanno nei

punti che si chiamano loro estremi, e che si debbono considerare come punti d'incontro con altre linee.

La più importante tra le curve chiuse è la circonferenza del circolo, quella curva cioè che, come è stato detto di sopra, ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno, che chiamasi centro.

Una linea curva prende la denominazione di *concava* per rispetto ad una retta, se il centro di curvatura, vale a dire il punto che è approssimativamente ad ugual distanza da più punti della curva, si trova dalla parte della retta. Nel caso contrario la curva si chiama *convessa*. Così le curve C G D, E H F (Fig. 14) si chiameranno, la prima concava, la seconda convessa per rispetto alla retta A B.

Appropriate denominazioni ricevono eziandio certi punti speciali di curve: così il punto, in cui una curva da concava si cambia in convessa, si chiama *punto d' inflessione* della curva; quello, per cui una curva viene a passare più volte, si dice *punto multiplo*; quello infine, in cui una curva si arresta bruscamente per prendere una direzione diversa, prende il nome di *punto di regresso*.

Il punto P nella Fig. 15 è un punto d'inflessione, nella Fig. 17 un punto multiplo, e nelle Fig. 16 e 18 un punto di regresso. Nel caso in cui la curva cambi bruscamente di direzione, mantenendosi sempre concava o convessa, come alla Fig. 16, il punto P appellasi anche *punto di regresso di 1.ª classe*, ed ove la curva da convessa si muti in concava o viceversa, come alla Fig. 18, si ha in P un *punto di regresso di 2.ª classe*.

La rappresentazione fisica di una linea si è detto farsi mediante un filo teso o mediante un segno tracciato sulla carta, sull'ardesia o sopra un piano di materia qualunque. Volendo tracciare una linea retta non tanto lunga, cioè sulla carta o sulla lavagna, occorre avere lo strumento chiamato *riga*, che non è altro che un pezzo di legno spianato per modo da dare coll' intersezione di due delle sue faccie una linea retta, che si chiama *linea di fede*. Si prende questa riga, e si procura di disporla colla sua linea di fede nella direzione che si vuol dare alla retta, lo che si ottiene facendola passare per due punti scelti per la retta; quindi si traccia un segno col lapis o col gesso, tenendoli accosto sempre alla linea di fede.

Ma le righe che si hanno in commercio possono essere false, vale a dire avere la linea di fede non retta. Importa per conse-

guenza conoscere il modo di verificare una riga. A tal uopo si prendano due punti qualunque sopra un piano, come A e B (Fig. 19), e facendo passare pei medesimi la linea di fede della riga da verificarsi, si segni una linea secondo quella stessa linea di fede; si capovolga in seguito la riga, dandole la disposizione che chiaramente apparisce nella figura, e portatala di nuovo colla sua linea di fede sui punti A e B, si tracci un' altra linea come sopra; se questa seconda linea si trova coincidere colla prima, la riga sarà esatta, cioè avrà la linea di fede retta; se no, essa non sarà esatta, e converrà rettificarla. Infatti, ammesso che non avvenga coincidenza nella primitiva posizione, si sarebbe tracciata o la curva A D B o la curva A C B, e nella seconda posizione o la curva A C B o la curva A D B, vale a dire due curve concave rispetto alla retta A B.

La rappresentazione fisica della circonferenza del circolo può aver luogo in diversi modi; ma ordinariamente si opera facendo girare intorno al punto preso come centro del circolo una matita o calcatoio fisso al capo di un filo teso o all' estremo di un' asta rigida, aventi il filo l' altro capo, l' asta l' altro estremo al centro del circolo stesso. Nel disegno però si fa uso del compasso, strumento molto noto sotto forma di due aste eguali, mastiettate insieme all' uno dei capi e terminanti in punte acute all' altro, come è rappresentato alla Fig. 20. Volendo servirsi di questo strumento per descrivere una circonferenza, non si ha che a fissare una delle sue punte nel punto scelto come centro della circonferenza (lo che si dice *far centro*), e quindi far girare l' altra punta attorno, dopo aver dato al compasso un' apertura corrispondente al raggio della circonferenza stessa da descriversi.

Riassumendo ora tutto quanto precede, si può dire che lo studio dell' estensione si fa colla ricerca dei vari rapporti tra le linee, la superficie ed i corpi. Secondo che però si prendono a considerare due o tre dimensioni, si hanno da esaminare delle superficie piane e quindi delle figure a linee piane, oppure dei corpi solidi e quindi delle superficie curve e delle linee a doppia curvatura. Per procedere adunque con ordine nello studio della Geometria, farà mestieri dividerla in Geometria Piana ed in Geometria Solida, la prima che si occupi delle figure piane, la seconda dei corpi nello spazio.

GEOMETRIA PIANA

La Geometria Piana ha per oggetto lo studio delle proprietà, e la misura di tutte le figure e linee che possono esser contenute in un piano. Di qui ne segue, che per procedere ordinatamente nella esposizione delle materie di questa parte della Geometria, conviene trattare prima delle proprietà, e quindi della misura delle figure e linee piane. Siccome poi di queste figure e linee piane si hanno due distinte classi, cioè una delle linee rette e delle figure rettilinee, l'altra delle linee curve e delle figure curvilinee, sarà opportuno altresì studiare separatamente le proprietà delle une e delle altre. In questo modo lo studio della Geometria Piana resterà diviso in tre libri; nel primo di questi si tratterà della linea retta e sua misura, dei rapporti delle rette tra di loro, e delle figure rettilinee; nel secondo delle linee curve in genere ed in ispecie della circonferenza del circolo; nel terzo infine, della misura delle figure tanto rettilinee che curvilinee, ed anco mistilinee, ed inoltre dei rapporti geometrici esistenti tra le figure e le rette loro appartenenti.

LIBRO PRIMO

SULLE RETTE E SUI POLIGONI.

Linea retta. — La linea retta è una linea indefinita, che traccia il più breve cammino tra due qualunque dei suoi punti.

Misura della retta. — Dalla precedente definizione risulta chiaro che la misura della lunghezza di una retta esprimerà la distanza tra i suoi due punti estremi.

Sia dunque A B una retta (vedi Tav. II, Fig. 21) che si tratta di misurare, cioè di trovare quante volte è contenuta in essa un'altra retta C D scelta per unità di misura. Si porti sulla medesima, a partire dall'estremo A, la retta C D tante volte di seguito quante vi può stare, e suppongasi di trovare, per esempio, che essa vi è contenuta cinque volte esattamente; si dirà perciò che la misura della retta A B è cinque, cioè che la retta A B è lunga 5 volte l'unità di misura C D. Tuttavia accade il più di frequente che, l'unità di misura non entri, come nella retta A B (Fig. 22), un numero esatto di volte; allora resta, dopo un certo numero di volte che si è portata l'unità di misura sulla retta, una frazione di essa unità, che importa determinare.

Sia A B (Fig. 23) una retta lunga quattro volte l'unità di misura C D più una porzione contenuta due volte esattamente in detta unità; in questo caso è evidente che la lunghezza della retta A B sarà eguale a quattro volte e mezzo l'unità di misura C D. Ma suppongasi che la frazione, che resta sulla retta A B (Fig. 22) non sia contenuta un numero esatto di volte nell'unità di misura C D; conviene trovare il modo di determinare appunto il valore di questa frazione. Per questo, ove sia dato d'arrivare a trovare una lunghezza che sia contenuta un numero esatto di volte e nell'unità di mi-

sura C D e nella frazione della retta che si vuol valutare, sarà evidentemente tosto determinato il valore di quest'ultima. Tale operazione è ciò che dicesi cercare la comune misura di due rette, e si eseguisce in modo analogo a quello di cui si serve l' aritmetica per cercare il massimo comun divisore di due numeri.

Siano A B e C D (Fig. 24) due rette, di cui si voglia trovare la comune misura, vale a dire quella lunghezza che sia contenuta un numero esatto di volte tanto nell'una come nell' altra retta. Si porti la retta C D sulla retta A B il maggior numero possibile di volte, e si troverà che vi entrerà, per esempio, tre volte, e che avanzerà un resto, il quale portato sulla C D, sarà in questa contenuto cinque volte esattamente. Questo resto rappresenterà la comune misura domandata, stando esso 5 volte sulla retta C D e 16 volte sulla retta A B. Ammessa poi la retta C D per unità di misura, la retta A B sarebbe eguale a $3 + \frac{1}{5}$ unità. Nel caso che il resto portato su C D non entri in questa retta un numero esatto di volte, deve portarsi il resto di C D sul resto di A B, quello essendo per necessità minore di questo, ed in tal guisa procedersi coll' ultimo resto rispetto a quello precedente, sino a trovare la comune misura domandata. Ma può accadere che, malgrado il continuare l' operazione sino all'ultimo grado di sottigliezza, non si giunga mai a trovare una comune misura; allora le rette sono *incommensurabili*, e perciò non può ottenersene la misura comune che in via d'approssimazione, la quale risulterà più o meno grande a seconda del punto a cui si è spinta l'operazione.

Riuscendo troppo lungo e tedioso il trovare la misura di una retta col metodo ora esposto, e d'altronde essendo sufficiente nel maggior numero dei casi l'ottenere una data approssimazione, è meglio valersi all'uopo di un altro metodo, che è generalmente addottato in pratica quando si tratta di raggiungere molta esattezza. Questo metodo consiste nell' applicare convenientemente alla retta da misurarsi un' asta graduata, cioè divisa in tante parti uguali corrispondenti all'unità di misura, e portante un *Nonio* o *Verniero,* altra asta graduata, ma le cui divisioni sono una frazione dell' unità di misura. Ecco la teoria del Verniero.

Abbiasi (Fig. 25) un'asta o regolo A B, diviso in un numero qualunque di parti eguali ed addattato a questo un regolo scorrevole



D E. Se quest' ultimo contiene un numero esatto, per esempio 9, delle parti eguali in cui è diviso il primo regolo, e che questa lunghezza sia stata divisa in 10 parti eguali, esso costituisce un Verniero, ossia quell' istrumento che può dare le frazioni dell' unità di misura. Infatti è chiaro che la differenza fra una divisione della retta A B ed una divisione della D E verrà espressa da $1 - \frac{9}{10}$, ossia da $\frac{1}{10}$; sicchè volendo misurare una retta A B coll' approssimazione non minore di $\frac{1}{10}$, sarà sufficiente di disporre la retta stessa per modo che un suo estremo cada sulla divisione 0, e di far quindi scorrere il nonio o verniero D E, sino a che il suo estremo D venga a coincidere coll' estremo B della retta; allora la misura della retta A B potrà aversi leggendo le divisioni che si trovano su di essa avanti il punto B, che sono in numero di 23, e poscia osservando il punto in cui la divisione 3 del verniero corrisponde ad una dell' asta graduata per ottenere 3 decimi per la misura della frazione tra l' ultima divisione 23 e l' estremo B. Che realmente la retta A B sia eguale a 23 divisioni o unità, più tre decimi di queste unità, è facile a dimostrarsi considerando che la sua lunghezza non è altro che la differenza tra 26 divisioni dell'asta graduata e 3 divisioni del nonio.

Perocchè, siccome ogni divisione della retta A B vale 1, ed ogni divisione del nonio vale $\frac{9}{10}$, si avrà che A B sarà eguale a 26 meno $\frac{27}{10}$, ossia a $23 + \frac{3}{10}$, che è la misura letta.

Col mezzo dell'ora descritto nonio sarebbe possibile la misura di una qualunque retta coll' approssimazione di un decimo. Se si volesse spingere, ad esempio, l' approssimazione sino ad un quindicesimo, bisognerebbe costrurre un nonio lungo 14 divisioni della retta, e dividerlo in 15 parti eguali.

In generale per costrurre un nonio che dia un' approssimazione di $\frac{1}{n}$, bisogna prendere $n - 1$ divisioni della retta, e dividere questa in n parti eguali.

Lorchè però l' unità di misura scelta è tale che il nonio da costruirsi, per avere un' approssimazione assai spinta, risulterebbe

troppo lungo e quindi incomodo ad usarsi, si suole prendere per unità di misura una frazione della prima unità, ottenendo così un nonio di giuste dimensioni.

Essendo, per esempio, il centimetro l'unità di misura scelta, e volendo ottenere nella misura delle rette l'approssimazione di un mezzo millimetro, si dovrebbe, per costrurre il nonio, prendere la lunghezza di 19 centimetri e dividerla in 20 parti eguali; ma si ottiene il medesimo intento ripartendo l'unità di misura, e dando al nonio la lunghezza di 9 mezzi centimetri, ossia di 4 centimetri e mezzo, e dividendolo in 10 parti eguali.

Potendo ad ogni linea curva immaginare sostituita una linea spezzata, la quale si approssimi tanto più alla curva quanto maggiore sia il numero di rette di cui si compone, sarà dato sempre di ridurre la misura d'una curva a quella d'una retta.

Sia A D C E B (Fig. 26) una linea curva che si debba misurare. Ecco i vari metodi che all'uopo si possono seguire. 1.° Adattare un filo per modo che coincida esattamente colla curva, e quindi portarlo sopra un regolo graduato: la misura trovata per la lunghezza del filo sarà esattamente la misura della lunghezza della curva, se si è operato con accuratezza. 2.° Sostituire alla curva una linea poligonale, e quindi, tracciata una retta indefinita, portare a partire da un punto F di questa retta, successivamente la lunghezza delle rette che si sono sostituite alla curva; la misura della curva A D C E B sarà pur sempre ridotta alla misura di una linea retta. Questa operazione, che chiamasi *sviluppare una curva,* dà solo una certa approssimazione, poichè per quanto piccole si facciano le rette che devono coincidere colla curva, esse non vengono mai a coincidere coll'ultima esattamente. 3.° Impiegare lo strumento semplicissimo rappresentato alla Fig. 27, e consistente in una ruota che gira attorno ad un perno a vite, fisso ad un sostegno munito di manico. Volendo misurare con questo strumento una curva, basterà condurre la ruota ad un estremo del perno, quindi appoggiarla leggermente alla curva stessa, e farle percorrere tutta la lunghezza di questa; la ruota avrà per tal modo girato sul suo perno, e si sarà avanzata d'un tanto, e basterà perciò fare eseguire alla stessa un movimento contrario sopra di un'asta graduata, sino a che arrivi al punto di partenza, per ottenere la misura della curva, o in termini equivalenti, lo sviluppo della curva.

Relazione tra due rette. — Due rette indefinite o possono incontrarsi e formare così degli angoli, oppure non incontrarsi mai ed essere perciò parallele.

Angoli. — Si chiama angolo lo spazio indefinito compreso fra due rette che s'incontrano. Due rette A B, C D (Fig. 28) che si taglino nel punto E, formano in questo punto degli angoli. Le rette prendono il nome di *lati dell' angolo*, ed il loro punto d' incontro di *vertice dell'angolo*. S'indica un angolo talora con una sola lettera posta al suo vertice, talora con tre lettere, due delle quali ai lati e l'altra sempre al vertice, avendo cura di mettere in mezzo quest'ultima. Si dice quindi che la retta C D incontrando la A B, forma i quattro angoli B E C, A E C, B E D, D E A, oppure i quattro angoli in E. È ovvio rendersi conto, che ogni angolo comprende una porzione di superficie infinita, poichè infiniti se ne possono considerare i lati. Onde la grandezza di un angolo dipende dalla più o meno grande apertura dei suoi lati.

Due angoli D E G, B A C si dicono *eguali*, se sovrapposti coincidono perfettamente, vale a dire se disponendo il lato A B dell'angolo B A C sul lato E D dell'angolo D E G per modo che il punto A cada in E, il lato A C viene a cadere sul lato E G. L' angolo D E H si dice *doppio* dell'angolo B A C, se esso contiene, come lo mostra la figura stessa, due volte l'angolo B A C; e medesimamente l'angolo D E F *triplo* dell'angolo B A C, se esso contiene tre volte quest'ultimo.

Allorquando una retta C D incontrando un'altra retta A B (vedi Fig. 30), forma due angoli B D C, A D C adiacenti eguali, dessa retta C D chiamasi *perpendicolare alla retta* A B, e gli angoli B D C, A D C si dicono *angoli retti*. Da ciò chiaro risulta che tutti gli angoli, che si possono formare da una parte di una retta, eguagliano presi insieme a due retti, e quelli che si possono formare attorno ad un punto, sommano quattro angoli retti.

Se invece una retta C D (Fig. 31) incontrando un'altra retta A B forma due angoli adiacenti disuguali, la retta C D chiamasi *obliqua* per rispetto alla A B, l' angolo maggiore A D C chiamasi *ottuso* e l'angolo minore B D C *acuto*.

Si dicono poi *complementari* due angoli, se la loro somma eguaglia un angolo retto, e *supplementari* se la loro somma eguaglia due angoli retti. I due angoli B D C, A D C sono, per esempio, supplementari l'uno dell'altro.

Infine, due angoli si dicono *opposti al vertice* quando hanno il vertice comune, ed i lati dell'uno sono il prolungamento di quelli dell'altro.È facile a vedersi che tali angoli sono eguali tra loro. Abbiansii nfatti i due angoli B E C, D E A; essi sono supplementari dell'angolo D E B; dunque le somme di ciascuno di essi con quest'ultimo sono eguali, e togliendo ad entrambe D E B, resta B E C eguale a D E A.

Una retta che divida per metà un angolo vien detta la sua *bisettrice*.

Se si dividono per metà due angoli adiacenti, come B D C, A D C (Fig. 33), le loro bisettrici E D, F D formano un angolo F D E retto, poichè avendosi che A D C + C D B = 2 angoli retti, anche la metà di tutta l'espressione è pur vera, cioè F D C + C D E = 1 angolo retto. Di qui ne segue, che volendo dividere un angolo A D C per metà, basta innalzare nel vertice D una perpendicolare alla bisettrice D E dell'angolo supplementare.

Misura dell'angolo. — Da quanto precede risulta che vi hanno tre specie di angoli, cioè l'angolo ottuso, l'angolo acuto, e l'angolo retto. I due primi essendo variabili, vale a dire più angoli potendo essere od ottusi o acuti senza essere eguali tra di loro, è stato scelto per unità di misura il terzo angolo, ossia l'angolo retto. Quest'angolo può infatti servire benissimo di termine di paragone, inquantochè non essendo compatibili tra di loro più angoli retti e disuguali al tempo stesso, esso è invariabile.

Misurare un angolo vuol dire vedere quante volte l'unità di misura, che è l'angolo retto, è contenuta in un dato angolo.

Vi ha in vero una certa difficoltà a concepire la grandezza di un angolo, dappoichè, qualunque sia l'ampiezza compresa tra i suoi lati, dessa può sempre considerarsi come uno spazio indefinito; però, nel mentre si paragonano due o più angoli tra loro, vuolsi avere riguardo alla relativa posizione di quei lati che non si sovrappongono dopo preso un lato comune. Si dirà cioè che un angolo è maggiore o minore d'un altro, se dopo sovrapposti due dei loro lati, l'altro lato del primo cade fuori o dentro lo spazio racchiuso dal secondo angolo.

Gli antichi han convenuto di dividere l'angolo retto in 90 parti eguali, cioè in 90 angoli eguali, ai quali è stato dato il nome di *gradi;* poscia ciascun grado, ossia ciascun angolo della novantesima

parte di angolo retto in 60 parti, od angoli eguali chiamati *primi*, e questi alla loro volta in 60 parti eguali chiamati *secondi*, e così di seguito, proseguendo sempre la divisione di sessanta in sessanta.

Modernamente però e segnatamente in Francia, onde applicare il sistema decimale altresì alla misura degli angoli, è stato proposto di dividere l'angolo retto in cento parti eguali, o angoli eguali chiamati pure *gradi;* questi gradi di nuovo in 100 altre parti eguali chiamate *primi*, e così di seguito, mantenendo le medesime denominazioni come nella divisione antica, chiamata a ragione *sessagesimale* dal numero delle parti in cui ogni unità o grado è diviso, mentre la moderna, per ragione consimile, è stata chiamata divisione *centesimale.*

In Germania poi si usa tuttavia di dividere l'angolo retto in sei parti od angoli eguali chiamati *ore*, queste in *ottavi*, e questi in *quarti*, colla distinzione di *più* e *meno* per le ultime differenze. Tal divisione, che risulta dall'aver diviso il cerchio intiero in due volte 12 ore, si ritiene adatta per le operazioni di Geodesia sotterranea, in quanto ad essa è coordinato un modo d'indicazione speciale della direzione dei filoni e delle gallerie.

Il grado *sessagesimale*, il grado *centesimale*, l'*ora* essendo parti aliquote di un angolo fisso determinato qual è l'angolo retto, possono alla loro volta essere presi per unità di misura di un angolo.

Per la misura degli angoli s'impiegano istrumenti diversi a seconda che si tratta di angoli formati da rette tracciate sulla carta o sopra un piano qualunque, oppure di angoli formati da faccie piane, come nei poliedri, od anco formati da allineamenti sul terreno pei rilievi di campagna. In generale si chiama *Goniometro* (parola che significa *misura d'angoli*), qualunque istrumento destinato a misurare degli angoli; ma in pratica s'intende per Goniometro quell'istrumento che serve ordinariamente per la misura di angoli sul terreno, o di angoli formati da faccie piane in qualunque solido poliedro, mentre si chiama *Rapportatore* quello che si impiega nel disegno per la misura di angoli formati da rette tracciate sulla carta.

Il rapportatore, di cui solo torna opportuno far menzione qui, è un semicerchio più comunemente di lastra cornea (vedi Fig. 32), ma

bene spesso anche di lastra di ottone, verso la cui semicirconferenza si trovano segnate delle divisioni e dei numeri corrispondenti, che indicano la misura degli angoli formati dal diametro A B coi diversi raggi condotti dal centro ai punti ove cadono le divisioni suddette.

Volendo misurare un angolo B C D (Fig. 32) non si ha che a disporre il rapportatore in modo che il centro *c* coincida col vertice di detto angolo ed il diametro A B col suo lato C B, e dopo leggere la divisione su cui cade l'altro lato C D. Nel caso rappresentato dalla Fig. 32 si ha, per esempio, che l'angolo B C D è di 55 gradi, poichè la retta C D cade fra la divisione 50 e 60 delle grandi divisioni, e sulla divisione 5 delle divisioni secondarie.

Il rapportatore, come è disegnato nella contemplata figura, si trova diviso secondo la divisione sessagesimale; vi si veggono marcate 18 grandi divisioni, che danno la misura di dieci in dieci gradi, quindi delle divisioni intermedie di cinque in cinque gradi, e per ultimo delle divisioni di grado in grado.

Vi sono moltissimi rapportatori che portano segnati i mezzi gradi ed i terzi di grado. Questa maggiore suddivisione si fa a seconda del grado d'approssimazione che si desidera di raggiungere nella misura degli angoli, e dipende sempre, per quanto concerne la possibilità di effettuarla coi mezzi meccanici, dalle dimensioni del rapportatore, ossia dal suo raggio.

Ma il rapportatore dovendo servire più specialmente per misurare o riportare angoli sulla carta, cioè angoli formati da linee tracciate colla matita o coll'inchiostro, le quali perciò hanno sempre una certa grossezza, non richiede che la sua divisione sia spinta tant'oltre come negli altri goniometri destinati a misurare angoli, i cui lati sono sempre immaginari; ma basta che somministri tutt'al più i terzi di grado, ossia che dia un'approssimazione sino a venti minuti primi. D'altronde questo istromento non deve eccedere nelle sue dimensioni per essere impiegato comodamente nel disegno geometrico; e farebbe davvero mostra di mancanza di buon senso chi pretendesse di misurare col rapportatore esattamente degli angoli sino ai minuti primi o perfino ai minuti secondi.

Il valore o misura di un'angolo esprimendosi in cifre numeriche, fa d'uopo distinguere quali di queste cifre rappresentano i gradi, quali i minuti primi, i secondi ecc. Si adotta di scrivere un pic-

colo *o* un poco in alto a destra del numero che esprime i gradi a guisa di esponente, una virgola nello stesso posto sopra il numero che esprime i minuti primi, due virgole sopra quello che esprime i minuti secondi, e così di seguito.

Un angolo per esempio di 47 gradi, 2 minuti e 13 secondi, si scrive 47° 2' 13". Ciò per la divisione sessagesimale e centesimale. Trattandosi della divisione in ore, le cifre che esprimono quest'ultime hanno per esponente una piccola *h*, che significa *hora* (dal latino); le altre cifre per gli ottavi ed i quarti mancano di esponente, ma pei primi si scrive soltanto il numeratore della frazione, pei secondi la frazione intiera; in ultimo segue un *p* o un *m* se esiste ancora una differenza in più o in meno. Così per esprimere, per esempio, un angolo di 3 ore, 6 ottavi e tre quarti *più*, si scrive $3^h\ 6\ ^3/_4\ p$.

La divisione più generalmente adottata è quella in gradi, minuti primi, secondi ecc., e tra le due menzionate, quella sessagesimale da un lato perchè il numero 90 ha più divisori comuni del numero 100, e dall'altro per conservare una misura stata adoperata da lungo tempo, e sulla di cui base si sono eseguiti tanti calcoli di sommo pregio. Dimodochè, ad eccezione che venga espressamente dichiarato il contrario, devesi sempre intendere che i gradi di un dato angolo sono sessagesimali.

Siccome però può capitare tra mano qualche autore, che abbia adottato una base piuttosto che un'altra, e può in conseguenza occorrere di dover ridurre i calcoli in base ad una sola divisione, importa conoscere il modo di trasformare le espressioni numeriche da una divisione in un'altra.

Suppongasi dapprima che sia dato di trasformare gradi sessagesimali in gradi centesimali ed in ore. Considerando che 90 gradi sessagesimali corrispondono a 100 gradi centesimali, un grado sessagesimale varrà 100 gradi centesimali diviso per 90, ossia $\frac{10}{9}$.

Basterà adunque moltiplicare per $\frac{10}{9}$ l'angolo sessagesimale dato per averne il valore in gradi centesimali. Nel caso concreto di un angolo di 15° 35' 40", si ha che esso può mettersi sotto la forma $15° + \frac{35}{60} + \frac{40}{3600}$, ossia $15° + \frac{2140}{3600}$, che moltiplicato per $\frac{10}{9}$ dà

per prodotto la frazione $\frac{5614}{324}$. Eseguita questa divisione, si ha 17° 32' 72" circa, che esprimono i gradi centesimali corrispondenti ai 15° 35' 40" sessagesimali.

Considerando poi che 90 gradi sessagesimali corrispondono a 6 ore, si ricava che 1 grado sessagesimale è uguale a 6 ore diviso 90, ossia a $\frac{1}{15}$ d'ora, e siccome 1 ora è eguale a 8 ottavi, uguale a 32 quarti d'ottavo, si avrà:

$$1^{\circ} = \frac{1}{15} \text{ d' ora} = \frac{8}{15} \text{ d' ottavo} = \frac{32}{15} \text{ di quarto}$$

$$1' = \frac{1}{900} \text{ d' ora} = \frac{8}{900} \text{ d' ottavo} = \frac{32}{900} \text{ di quarto}$$

$$1'' = \frac{1}{54000} \text{ d' ora} = \frac{8}{54000} \text{ d' ottavo} = \frac{32}{54000} \text{ di quarto}$$

e così di seguito. Per ridurre quindi 15° 35' 40" in ore, ottavi ecc., basterà moltiplicare i gradi per una delle prime tre frazioni $\frac{1}{15}, \frac{8}{15}, \frac{32}{15}$ (scegliendo naturalmente quella che può dare un prodotto contenente degli intieri), affine di ottenere le ore, gli ottavi, i quarti e le frazioni di quarto; dipoi i minuti primi per l'ultima delle seconde tre, cioè per $\frac{32}{900}$, affine di ottenere i quarti e le frazioni di quarto; infine i minuti secondi per l'ultima delle terze tre, cioè per $\frac{32}{54000}$ affine di ottenere soltanto le frazioni di quarto. È facile a rendersi conto della necessità di tenere quest'ordine nei calcoli, per poco si voglia considerare, che essendo 1 ottavo = 1°,875 = 1° 52' 30", 1 quarto = 0°,46875 = 0° 28' 7" 30"', i gradi possono dare le ore, gli ottavi, i quarti e le frazioni di quarto, mentre i minuti primi non possono dare che i quarti e le frazioni di quarto, ed i minuti secondi soltanto quest'ultime. Ecco l'ordine ed il risultato delle operazioni per la trasformazione in ore di 15° 35' 40":

$$15^\circ \times \frac{1}{15} = \ldots\ldots 1^h\ 0\ 0\ 0$$

$$35' \times \frac{32}{900} = \ldots\ldots \quad {}^1/_4\ \frac{220}{900}$$

$$40'' \times \frac{32}{54000} = \ldots\ldots \quad \frac{1280}{54000}$$

$$15^\circ\ 35'\ 40'' = \ldots\ldots 1^h\ 0\ {}^1/_4\ \frac{181}{675}$$

$$= \ldots\ldots 1^h\ 0\ {}^1/_4\ p.$$

Lo che vuol dire che 15° 35′ 40″ della divisione sessagesimale equivalgono a 1 ora, 0 ottavi e 1 quarto *più* della divisione in ore.

Si debbano ora trasformare i gradi centesimali in gradi sessagesimali ed in ore. Poichè 100 gradi centesimali equivalgono a 90 gradi sessagesimali, ogni grado centesimale vale i $\frac{9}{10}$ di 1 grado sessagesimale, e basta quindi moltiplicare un numero di gradi centesimali per la frazione $\frac{9}{10}$ perchè essi vengano ridotti in sessagesimali. Parimenti, poichè 100 gradi centesimali valgono 6 ore, ogni grado centesimale vale $\frac{6}{100}$ o $\frac{3}{50}$ d'ora, $\frac{24}{50}$ d'ottavo e $\frac{96}{50}$ di quarto; ogni minuto primo $\frac{3}{5000}$ d'ora, $\frac{24}{5000}$ d'ottavo e $\frac{96}{5000}$ di quarto ecc., e così non si avrà che a moltiplicare i gradi, i minuti centesimali per queste frazioni onde ottenere la riduzione loro in ore, osservando però di scegliere al solito per i primi le prime tre $\frac{3}{50}$, $\frac{24}{50}$, $\frac{96}{50}$, per i secondi l'ultima delle seconde tre, cioè $\frac{96}{5000}$ ecc., e ciò stante che 1 ora = 16°, 66666..... 1 ottavo = 2°, 08333..... 1 quarto = 0°, 520833.....

Finalmente volendo trasformare le ore in gradi sessagesimali e centesimali, si dovrà moltiplicare le prime per 15 o per $\frac{50}{3}$, gli ottavi per $\frac{15}{8}$ o per $\frac{50}{24}$ ed i quarti e le frazioni di quarto per $\frac{900}{32}$

o per $\frac{5000}{96}$. Così per ridurre di nuovo in gradi sessagesimali $1^h\ 0\ ^1/_4\ \frac{181}{675}$, il calcolo sarà il seguente:

$$1^h \times 15 = \ldots\ldots\ 15^\circ\ 0'\ 0''\ 0'''$$

$$1 \times \frac{900}{32} = \ldots\ldots\ 0^\circ\ 28'\ 7''\ 30'''$$

$$\frac{181}{675} \times \frac{900}{32} = \ldots\ldots\ 0^\circ\ 7'\ 32''\ 30'''$$

$$1^h\ 0\ ^1/_4\ \frac{181}{675} = \ldots\ldots\ 15^\circ\ 35'\ 40''$$

Si può scorgere facilmente che invece delle frazioni $\frac{15}{8}$, $\frac{900}{32}$ vale lo stesso impiegare i loro equivalenti $1^\circ{,}875 = 1^\circ\ 52'\ 30''$, $0^\circ{,}46875 = 0^\circ\ 28'\ 7''\ 30'''$.

Da quanto precede risulta che il rapporto tra due angoli è sempre una quantità finita. Sarà quindi sempre dato di calcolare il valore di diversi angoli A, B, C, D ... conoscendo i rapporti m, n, p, q .... che passano tra di loro e la misura M della loro somma. Non si avrà perciò che a stabilire le seguenti proporzioni: $A : m :: B : n$, $B : n :: C : p$, $C : p :: D : q$, $D : q :: A : m$; e poscia, sapendosi che in più proporzioni la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come un antecedente qualunque sta al suo conseguente, ricavare $2A + 2B + 2C + 2D : 2m + 2n + 2p + 2q :: A : m :: B : n :: C : p :: D : q$, ossivvero $A + B + C + D : m + n + p + q :: A : m :: B : n :: C : p :: D : q$, e sostituendo ad $A + B + C + D$ la somma M, ottenere da quest'ultima proporzione $A = \frac{m\,M}{m+n+p+q}$, $B = \frac{n\,M}{m+n+p+q}$, $C = \frac{p\,M}{m+n+p+q}$, $D = \frac{q\,M}{m+n+p+q}$. Pel caso in cui i diversi angoli occupino tutto lo spazio attorno ad un punto, come A O B, B O C, C O D, D O A (Fig. 34), siccome la loro somma equivale a quattro angoli retti, si dovrà sostituire 360° ad M nelle precedenti eguaglianze.

Rette parallele. — Due o più rette si dicono parallele quando anche prolungate fino all'indefinito non vengono mai ad incontrarsi. Si possono altresì definire le rette parallele quelle che conservano in tutta la loro lunghezza la medesima distanza. Così se due rette A B, C D (Fig. 35) conservano in tutta la loro lunghezza la medesima distanza fra loro, esse sono parallele. Ne segue da ciò che due rette qualunque E F, G H, che misurino la distanza tra le due parallele A B e C D, saranno eguali, e la retta P Q, che unisce i loro punti di mezzo, sarà tale che distarà egualmente dalle A B e C D, e si potrà dire essere anche il *luogo geometrico* dei punti equidistanti dalle due rette A B, C D, intendendosi in generale per luogo geometrico una linea che è in costante rapporto con altre linee.

Rappresentazione fisica delle parallele. — Tracciare delle rette parallele su di un foglio di carta è una delle operazioni più comuni del disegno geometrico. Per effettuare quest'operazione in pratica si fa uso delle cosidette *righe parallele* o delle *squadre*.

Le righe parallele, o brevemente chiamate parallele (vedi Fig. 36) constano di due righe collegate assieme mediante due spranghette metalliche disposte obliquamente e imperniate ai loro estremi, per modo che le righe stesse possono scostarsi di alquanto l'una dall'altra e di nuovo avvicinarsi fra loro. Volendo con siffatto strumento condurre delle parallele, non si ha che a riunire assieme le due righe, poscia tracciare una retta secondo la linea di fede di una di esse, disposta su due punti della retta nella cui direzione devono esser condotte le parallele, ed infine, tenendo ferma l'altra riga, muovere la prima sino a portare la sua linea di fede sul punto in cui si vuole tirare la parallela, e nel caso che a questo non si possa arrivare con un solo scostamento, riunire di nuovo le righe, tenendo sempre ferma l'ultima mossa, e ripetere poi le stesse operazioni tante volte quante sono necessarie per raggiungere quel punto, pel quale si deve menare la parallela. Generalmente le righe parallele sogliono essere munite verso la metà della loro lunghezza di un piccolo apparecchio che permette mediante una vite di tracciare delle parallele equidistanti. Si vedrà in appresso come si possano tracciare delle parallele colle squadre.

Perpendicolari. — Due rette si dicono perpendicolari tra loro quando si incontrano formando degli angoli adiacenti eguali.

Rappresentazione fisica delle perpendicolari. — Essendo data una retta qualunque AB (Fig. 38) e dovendo innalzare da un suo punto C od abbassare da un punto dato fuori D sulla medesima una perpendicolare, si impiegano molto utilmente le così dette squadre, che non sono altro che sottili assicelle piane di legno terminate da tre spigoli rettilinei, due dei quali s' incontrano ad angolo retto, come vedesi nella figura.

Per innalzare una perpendicolare nel punto C sulla retta A B, non si avrà che ad adattare uno degli spigoli perpendicolari della squadra sulla retta stessa AB per modo che il vertice dell' angolo retto cada nel punto C, e segnare a mezzo dell' altro lato la linea che sarà la perpendicolare domandata. Ma può avvenire che le squadre che si hanno in commercio sieno false, vale a dire che non abbiano i due spigoli che devono formare l'angolo retto fra di loro perpendicolari; epperciò importa conoscere il modo di verificarle. Onde riconoscere l'esattezza di una squadra è sufficiente, dopo avere tirata una perpendicolare CD nel modo indicato, dare alla medesima una posizione simmetrica, come apparisce dalla figura, e, fatto coincidere il suo vertice di nuovo col punto C, segnare una seconda perpendicolare, la quale nel caso che la squadra sia esatta, coinciderà colla prima perpendicolare CD, nel caso contrario sarà un' obliqua CF di posizione simmetrica per rispetto alla vera perpendicolare C D ad un' altra obliqua C E prima segnata invece di C D. La somma degli angoli A C F + B C E, A C E + B C F essendo o minore o maggiore di due retti, i due spigoli della squadra non formano un angolo retto, e quindi la squadra stessa è falsa.

Le squadre, comunque esatte o false, possono anche servire a tracciare delle parallele, facendola scorrere con uno dei loro spigoli accosti alla linea di fede d' una riga o d' altra squadra.

Relazione fra tre rette. — Tre rette indefinite, considerate riguardo alla posizione relativa che possono avere tra loro, danno luogo a proprietà geometriche molto importanti. Voglionsi esaminare quattro casi: o le rette possono essere tutte e tre parallele tra loro, come A B, C D, E F (Fig. 37), oppure due di esse soltanto esser parallele, come A B, C D, E F (Fig. 39), oppure tutte e tre incontrarsi generando un triangolo, oppure infine tutte e tre incontrarsi in un sol punto. Il primo e l'ultimo di questi casi sono stati

studiati di sopra trattandosi delle rette parallele e degli angoli; per cui ora torna opportuno occuparsi solo del secondo e terzo.

Considerando le rette A B e C D (Fig. 39) parallele tra di loro e tagliate dalla retta E F, che perciò si chiama *secante*, si vede che vengono a formarsi otto angoli, quattro dei quali attorno al punto H e quattro attorno al punto G. Questi otto angoli, presi due a due, ricevono denominazioni particolari; così gli angoli E H B, E G D ed E H A, E G C e B H F, D G F ed A H F, C G F, che hanno due a due l'apertura volta nello stesso senso ed i lati paralleli, si chiamano *corrispondenti;* gli angoli A H G, H G D e C G H, G H B, che hanno l'apertura volta nell'interno delle parallele in senso contrario ed i lati paralleli, si chiamano *alterni interni;* gli angoli A H E, D G F e B H E, C G F che hanno l'apertura volta all'esterno delle parallele e sempre in senso contrario, *alterni esterni;* gli angoli B H G, D H G ed A H G, C G H, posti dalla medesima parte della secante, e colla apertura volta all'interno delle parallele in senso diverso, *interni dalla stessa parte;* infine gli angoli B H E, D G F ed F G C, A H E, che sono pure posti dalla medesima parte della secante, ma la di cui apertura è volta all'esterno delle parallele in senso contrario, *esterni dalla stessa parte.*

Due angoli B H E, B H G, che hanno i lati H E, H G sul prolungamento l'uno dell'altro, ed il lato B H comune, sono supplementari; due angoli E H B, A H G, che hanno ciascuno i lati sul prolungamento di quelli dell'altro, sono eguali come opposti al vertice.

Ora, siccome ciò sarà sempre vero anche se i lati degli angoli saranno paralleli, poichè si potranno sempre disporre in modo da trovarsi o gli uni sul prolungamento degli altri, oppure un solo di un angolo sul prolungamento di un altro dell' altro angolo, sarà dato di stabilire che due angoli aventi i loro lati paralleli possono essere o eguali o supplementari, secondochè la loro apertura è volta in un medesimo senso o in un senso diverso.

Ciò premesso, si dirà: 1.° che gli angoli corrispondenti sono eguali, come pure eguali gli angoli alterni interni e gli angoli alterni esterni, siccome aventi i lati paralleli e l'apertura rivolta nella medesima direzione o in direzione opposta; 2.° che gli angoli tanto interni dalla stessa parte, che esterni dalla stessa parte, sono supplementari siccome aventi pure i lati paralleli, ma l' apertura rivolta in direzione diversa.

Triangolo. — La figura piana chiusa da tre rette, epperciò formata da tre angoli, chiamasi *triangolo* (vedi Tav. III, Fig. 40). Il triangolo è il più semplice dei poligoni. Le rette A B, B C, C D, che limitano il triangolo si chiamano *lati del triangolo*, ed i punti d'incontro di questi lati si chiamano i *vertici del triangolo*. La somma delle lunghezze dei lati di un triangolo prende il nome di *perimetro*, nello stesso modo che la misura delle linee che determinano il contorno di una superficie.

Vi sono più specie di triangoli ed ognuna di queste riceve una particolare denominazione, a seconda del rapporto esistente fra i lati, ed a seconda altresì della specie degli angoli.

Un triangolo, se ha tutti e tre i lati eguali, si chiama *triangolo equilatero*, come il triangolo A B C della Figura 41; se due soli dei suoi lati sono eguali tra loro, si chiama *triangolo isoscele* od *equicruro*, come il triangolo A B C della Figura 42; e se infine i suoi tre lati sono tutti disuguali tra loro, si chiama *triangolo scaleno* o semplicemente *triangolo*, come il triangolo A B C della Figura 40.

Se un triangolo poi ha un angolo retto, esso chiamasi *triangolo rettangolo*, come il triangolo A B C della Figura 43. Nel triangolo rettangolo il lato che sta opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*, e gli altri due lati si chiamano *cateti*. Così il lato C B del triangolo A B C (Fig. 43) è l'ipotenusa, e gli altri due lati A B, A C sono i cateti.

Il triangolo rettangolo, i cui cateti sono eguali tra loro, si chiama *triangolo rettangolo isoscele*.

Un triangolo, che abbia tutti e tre gli angoli acuti, chiamasi *triangolo acutangolo*, come il triangolo A B C nella Figura 45; e finalmente un triangolo avente un angolo ottuso, dicesi *triangolo ottusangolo*, come quello della Figura 44.

Proprietà del triangolo. — Nel definire la linea retta è stato detto che essa è il più breve cammino fra due punti. Dunque il lato A B del triangolo A B C (Fig. 46) è il più breve cammino fra A e B; epperciò ogni altra linea spezzata A O B, A C B sarà sempre più lunga della A B, o, in termini generali, *qualunque lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due lati.*

In conseguenza di ciò per ogni triangolo A B C si possono stabilire le tre ineguaglianze: $AB < AC + CB$, $AC < AB + BC$, $CB < AC + AB$; e se in queste si trasporta un termine dal

secondo membro nel primo, si ottengono le tre altre ineguaglianze $AB - AC < CB$, $AC - BC < AB$, $CB - AB < AC$, per cui è dato altresì di conchiudere che *in ogni triangolo la differenza di due lati è sempre minore del terzo lato.*

Perchè adunque un triangolo possa sussistere è necessario che esso sia tale che la somma di due dei suoi lati sia maggiore, e la differenza minore del terzo lato.

Dietro queste proprietà sarà facile dimostrare i due teoremi seguenti:

Teorema 1.° *Se da un punto* O (*Fig.* 46), *preso nell' interno di un triangolo* A B C, *si conducono delle rette ai due vertici* A *e* B, *la somma di queste rette sarà sempre minore della somma dei lati* A C, C B, *che le comprendono.*

Ove si immagini prolungato A O sino all' incontro D col lato C B, si vedrà tosto che nel triangolo A C D, $AD < AC + CD$. Aggiungendo D B a ciascun membro di questa ineguaglianza, si otterrà $AD + DB < AC + CD + DB$; ma A D essendo eguale ad $AO + OD$, ed avendosi inoltre che $CD + DB = CB$, si ricaverà pure che (1) $AO + OD + DB < AC + CB$. Siccome poi dal triangolo O D B si ha che $OB < OD + DB$, se si sostituisce alla somma del 2.° e 3.° termine del primo membro dell' ineguaglianza (1) il termine più piccolo O B, sussisterà con maggior ragione l' ineguaglianza che si voleva dimostrare, cioè che $AO + OB < AC + CB$.

Questa proposizione risulta d' altronde evidente, ove si consideri che una retta è il più breve cammino fra i suoi estremi, e che in conseguenza ogni altra linea condotta da uno di questi estremi all'altro è sempre più lunga, quanto più si scosta dalla retta stessa.

Teorema 2.° *La somma di tre rette condotte da un punto preso nell' interno di un triangolo ai tre vertici del medesimo è minore della somma dei suoi tre lati.*

Dal teorema precedente si ha, che se dal punto O (Fig. 47) si tirano le rette O A, O B, O C, si possono stabilire le tre ineguaglianze

$$AO + OB < AC + CB,$$
$$AO + OC < AB + BC,$$
$$OC + OB < AC + AB.$$

Ora anche la somma dei primi membri di queste ineguaglianze sarà minore della somma dei secondi, e quindi si potrà ottenere l'ineguaglianza

$$2AO + 2OB + 2OC < 2AC + 2AB + 2BC,$$

che tutta divisa per due dà

$$AO + OB + OC < AC + AB + BC,$$

cioè quanto volevasi dimostrare.

Somma degli angoli di un triangolo. — Se prolungasi il lato A B d'un triangolo qualunque A B C (Fig. 48), e quindi pel punto B si mena una parallela B E al lato A C, si vedrà tosto che si hanno i due angoli corrispondenti D B E, B A C, e i due alterni interni A C B, C B E, i quali, come è noto, sono eguali. Tutta la somma dei tre angoli del triangolo si riduce dunque alla somma di tutti quelli formati da una parte della retta A D, ossia a 180°.

Siccome poi la somma dei due angoli A, C del triangolo è uguale alla somma $DBE + EBC = CBD$, si ha pure, che in un triangolo qualunque un angolo esterno, vale a dire formato prolungando uno dei suoi lati, è uguale alla somma dei due angoli interni ed opposti, cioè non adiacenti al primo.

Poichè, qualunque essendo la forma del triangolo, la somma dei suoi angoli è costante ed eguale a due retti, ne segue, che nel triangolo rettangolo che ha un angolo retto, la somma degli altri due angoli sarà sempre eguale ad un retto, e nel triangolo ottusangolo che ha un'angolo ottuso, la somma dei due angoli acuti sarà sempre minore d'un retto; e non vi potrà mai essere un triangolo rettangolo che abbia due angoli retti, od un triangolo ottusangolo, che abbia due angoli ottusi.

Il triangolo avendo tre lati e tre angoli, vuol dire che sei sono gli elementi che lo determinano. Ma non importerà che sieno dati tutti e sei questi elementi per determinare un triangolo; basterà invece che se ne conoscano tre soltanto, come si vedrà in appresso. Per ora, in quanto agli angoli, si scorge già, grazie alla precedente dimostrazione, che sarà sempre sufficiente di conoscerne due per determinare il terzo mediante una semplice sottrazione.

Relazione fra due triangoli. — Prendendo a considerare due triangoli, si vede o che essi possono essere eguali in tutti i loro elementi, oppure che possono avere soltanto alcuni di questi elementi uguali, oppure infine avere questi medesimi elementi tutti disuguali. Si dovranno quindi esaminare distintamente questi diversi casi.

Vuolsi premettere anzitutto che due triangoli eguali, comunque si trovino disposti l'uno rispetto all'altro, sono sempre sovrapponibili, vale a dire tali da potersi cuoprire reciprocamente in modo perfetto, sovrapponendo due a due i lati rispettivamente uguali. Quando gli elementi si trovano disposti ugualmente dalla stessa parte tanto nell'uno come nell'altro triangolo, come alla Fig. 49, si addimostra chiaro il modo di sovrapporli tra loro; ma quando avviene il contrario, cioè quando invece tanto i lati che gli angoli dell'uno si trovano in posizione simmetrica con quelli dell'altro, come alla Figura 50, occorre immaginare una linea, attorno cui possano girare i triangoli per concepir il modo di sovrapporli tra loro, come nel primo caso. Questa linea, che si chiama *linea di simmetria,* vuol essere ad egual distanza dai due triangoli, ossia tale che abbassando, ad esempio, delle perpendicolari sulla medesima dai vertici di uno dei triangoli, queste perpendicolari vadano a incontrare i vertici corrispondenti dell'altro, e restino divise per metà dalla linea stessa. Nel caso ora in questione la simmetria ha luogo secondo una linea retta E D, la quale divide per metà tutte le rette congiungenti i diversi punti corrispondenti dei due triangoli.

Si prendano ora a considerare due triangoli scaleni A B C, A' B' C' (Fig. 49) che siano uguali, allo scopo di trovare quale sia il numero di elementi necessario alla determinazione di un triangolo, e così in quali casi due triangoli sieno o no eguali.

Se si immagina disposto il triangolo A' B' C' sul triangolo A B C per modo che il lato A B coincida col lato A' B', il vertice A col vertice A', il vertice B col vertice B', egli è chiaro, che se l'angolo A' è eguale all'angolo A, l'angolo B' eguale all'angolo B, il vertice C' del triangolo A' B' C', essendo il punto d'intersezione dei lati dei due angoli A', B', coinciderà pure col vertice C del triangolo A B C; e così coincidendo tra loro tutti i vertici dei due triangoli, coincideranno perfettamente anche i loro lati, che non sono che linee rette tirate da un vertice all'altro.

Dunque *due triangoli sono eguali, quando hanno due angoli eguali adiacenti ad un lato eguale.*

Parimenti disponendo il triangolo A' B' C' sul triangolo A B C per modo che il lato A' B' coincida col lato A B, il vertice A' col vertice A, il vertice B' col vertice B, l'angolo A' essendo eguale all'angolo A, il lato A' C' cadrà sul lato A C, ed A' C' essendo eguale ad A C, il vertice C' cadrà in C; ed i due triangoli coincideranno perfettamente, poichè il lato C' B', che è una retta, coinciderà coll' altro C B, che è esso pure una retta.

Epperciò *due triangoli sono pure eguali, quando hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali.*

Finalmente sovrapponendo il triangolo A' B' C' sul triangolo A B C per modo che A' B' coincida con A B, il vertice A' con A, ed il vertice B' con B, essendo A' C' = C B, B' C' = B C, il vertice C' cadrà sul vertice C, poichè questo segna il solo punto che sia distante ad un tempo di A' C', B' C' dai vertici A e B.

Dunque infine *due triangoli sono ancora eguali, quando hanno tutti i lati rispettivamente eguali.*

In tutti i tre casi contemplati dell' eguaglianza di due triangoli, si vede che basta l'eguaglianza di soli tre elementi, perchè il triangolo sia determinato.

Non sempre però tre elementi sono sufficienti per determinare un triangolo, come si verifica nel caso particolare in cui sieno dati due lati ed un angolo non compreso fra i medesimi, poichè in questo caso se ne possono ottenere due dei triangoli.

Ma osservando che in un triangolo si possono abbassare delle perpendicolari dai vertici sui lati rispettivamente opposti, le quali si chiamano *altezze del triangolo,* e condurre delle rette dai vertici alla metà dei lati pure rispettivamente opposti, le quali si dicono *mediane,* si hanno ancora altrettanti elementi per determinare un triangolo, poichè è facile vedere, che tre soltanto possono essere in esso le altezze e tre le mediane; e si ha ancora sempre, che nel maggior numero de' casi, dati tre elementi, il triangolo è determinato.

Ciò posto, è ovvio il vedere che per determinare il triangolo rettangolo, siccome di questo è già conosciuto un angolo, che è l'angolo retto, bastano due elementi, cioè i due cateti, o l'ipotenusa ed un cateto, od un angolo e l'ipotenusa, od un'angolo

ed un cateto, oppure due altri elementi qualunque, purchè tali, che l'uno non sia conseguenza immediata dell' altro. Medesimamente occorrono solo due elementi per determinare il triangolo isoscele.

Trattandosi del triangolo equilatero, che ha tutti e tre i lati eguali, è sufficiente alla sua determinazione un solo degli elementi, rette, quali il lato e l'altezza; poichè in esso i tre angoli sono eguali. Infatti, se in un triangolo equilatero A B C (Fig. 41), si abbassa dal vertice C l'altezza C D sul lato opposto A B, quest'altezza viene a scomporre il triangolo medesimo in due triangoli rettangoli C B D, C A D, che hanno il lato C D comune, il lato C A eguale al lato C B e che sono per conseguenza eguali; onde D B = D A, l' angolo B = A e l' angolo D C B = D C A. Del pari se si abbassa nel medesimo triangolo equilatero l'altezza A E dal vertice A sul lato opposto C B, esso viene a scomporsi negli altri due triangoli rettangoli A C E, A B E, che sono pure eguali per avere A E comune, A C = A B; onde anche l' angolo C = B. Ora C ed A essendo eguali al terzo angolo B, sono anche eguali tra loro, e per tal modo resta dimostrato che i tre angoli del triangolo equilatero sono eguali, cioè che il triangolo equilatero è equiangolo.

Da quanto precede risulta altresì dimostrato, che nel triangolo equilatero le tre altezze sono eguali, e sono ad un tempo le sue mediane, poichè incontrano i suoi lati sulle metà.

Per ultimo il triangolo equilatero gode di più la proprietà, che da un punto P preso a piacere sopra uno qualunque dei suoi lati A B abbassando due perpendicolari P Q, P R, sugli altri due lati, la somma di queste due perpendicolari è precisamente eguale ad una delle sue altezze, cioè P Q + P R = A E = C D = B F. Basta per dimostrarlo immaginare dal punto P condotta la parallela P G al lato C B; si ha così che il triangolo A G P è pure equilatero o equiangolo, sendochè gli angoli G P A, C B A e A G P, A C B sono eguali tra loro come corrispondenti; per cui l' altezza P Q è eguale all' altezza A H, e siccome P G è parallelo a B C e P R, parallelo ad A E, P R = H E, è P Q + P R = A H + H E = A E, cioè uguale ad una qualunque delle altezze del triangolo equilatero A B C.

Con ragionamento del tutto analogo si può dimostrare che *il triangolo isoscele ha eguali gli angoli opposti ai lati eguali.* Difatto abbassando dal vertice C dell' angolo disuguale del triangolo iso-

scele A B C (Fig. 42) l'altezza C D, e considerando che i due triangoli C D A, C D B sono rettangoli ed hanno il lato C D comune, il lato A C = B C, e che quindi sono eguali, si vede che l'angolo A = B. Inoltre, poichè il lato A D = D B e l'angolo A C D = D C B, risulta che *nel triangolo isoscele l'altezza abbassata dal vertice dell'angolo disuguale sulla base opposta divide questa per metà, e l'angolo al vertice pure per metà.*

Ove poi dai vertici A e B del medesimo triangolo isoscele si abbassino le altre due altezze A E, B F, si vede che esso è scomposto, dalla prima nei due triangoli rettangoli A E C, A E B, dalla seconda nei due triangoli B F C, B F A, e che di questi triangoli A E C = B F C, A E B = B F A siccome aventi, i primi l'angolo C comune ed il lato C A = C B, i secondi il lato A B comune e l'angolo A = B; per cui C F = C E, A F = B E e l'altezza A E = B F. Se si prende quindi un punto qualunque P sul lato A B e si abbassano due perpendicolari P R, P Q sui lati uguali del triangolo isoscele, la somma di queste perpendicolari sarà eguale ad una qualunque delle altezze A E, B F abbassate sui lati eguali del triangolo isoscele; imperciocchè menando P G parallelo a B C, il triangolo A P G sarà pure isoscele, e quindi l'altezza A H = P Q, e siccome P R ed H E sono parallele come perpendicolari ad una medesima retta, si avrà anche che P R = H E; onde P R + P Q = H E + A H = A E = B F.

Dunque *le perpendicolari, abbassate da un punto qualunque della base di un triangolo isoscele sugli altri due lati, sommano assieme ad una delle due altezze condotte dai vertici degli angoli adiacenti alla base.*

Premesse le proprietà del triangolo equilatero e del triangolo isoscele, resta facilissimo dimostrare i due seguenti teoremi relativi, l'uno al triangolo rettangolo, l'altro al triangolo ottusangolo; cioè, 1.° *La retta che unisce il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo colla metà dell'ipotenusa è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa;* 2.° *In ogni triangolo ottusangolo il lato opposto all'angolo ottuso è maggiore del lato opposto ad un angolo acuto.*

Per dimostrare che in un triangolo rettangolo A B C (Fig. 43) la retta A D, che unisce il vertice A dell'angolo retto col punto di mezzo D dell'ipotenusa B C, è eguale a C D o D B, basterà osservare che se si suppone la retta A D condotta per modo, che l'angolo D A B

sia eguale all'angolo B, si avrà che il triangolo A D B sarà isoscele, e quindi A D = D B; donde D A C = 1 retto — D A B = 1 retto — B, e siccome anche C = 1 retto — B, il triangolo A C D sarà pure isoscele, ed A D = C D; e C D, D B essendo eguali entrambi ad una terza lunghezza A D, vorrà dire che l'ipotenusa resterà divisa per metà in D dalla retta A D condotta nel modo sopra indicato, o inversamente la retta A D, che unisce il vertice A dell'angolo retto col punto di mezzo D dell'ipotenusa C D, è uguale alla metà di questa ipotenusa.

Questa proprietà del triangolo rettangolo porge il mezzo di giudicare della natura di un triangolo; perocchè a seconda che la retta condotta dal vertice dell'angolo maggiore al lato opposto è maggiore od eguale o minore della metà di questo lato, il triangolo sarà acutangolo o rettangolo o ottusangolo.

Per dimostrare poi che in un triangolo ottusangolo A B C (Fig. 44) il lato C B che si oppone all'angolo ottuso è maggiore d'uno qualunque degli altri due lati, per esempio A C, basta immaginare formato un angolo B A D = A B C, ed allora si scorge che il triangolo A D B è isoscele, e quindi A D = D B; e siccome dal triangolo A D C si ha C D + D A > A C, sostituendo in questa ineguaglianza a D A il suo eguale D B, risulta C D + D B > A C, ossia C B > A C.

Considerando ora due triangoli che non sieno più eguali in tutti i loro elementi, ma che abbiano due soli lati eguali, si vedrà come il terzo lato dell'uno, che sta opposto ad un angolo maggiore, sia maggiore del terzo lato dell'altro triangolo, opposto ad un angolo minore, e viceversa.

Siano A B C, D E F (Tav. IV, Fig. 51) due triangoli aventi il lato A C = D F, il lato C B = F E e l'angolo C < F; se si sovrappongono questi due triangoli in modo che il lato A C coincida col lato D F, il vertice A col vertice D, il vertice C col vertice F, posto che l'angolo C è minore dell'angolo F, il lato C B si disporrà nell'interno del triangolo, cioè il lato C B cadrà in F B' ed il triangolo D F B' rappresenterà il triangolo A B C.

Ora avendosi, per quanto è stato dimostrato al Teorema 1.° pag. 35, che in un triangolo D E F, F B' + B' D < F E + E D, ove si tolgano da ambi i membri di questa ineguaglianza le medesime quantità F B' o F E, si ottiene che B' D < D E, cioè che il lato A B

opposto all'angolo C nel triangolo A B C è minore del lato D E opposto all'angolo maggiore F nel triangolo D E F.

Ma tenendo la via indicata per giungere alla voluta dimostrazione potrebbe avvenire che coincidendo un lato dei due triangoli, il terzo vertice, a vece che nell'interno del triangolo, cadesse o sul terzo lato, oppure fuori del triangolo, come è rappresentato nelle figure 52 e 53.

Nel caso come quello della figura 52, cioè in cui il vertice B cada in B' sul lato D E, è di per sè stesso evidente che il lato A B = D B' è minore del lato D E, perocchè, se vuolsi, D B' è una parte aliquota di D E.

Nel caso però della figura 53, in cui sovrapponendo il triangolo A B C sul triangolo D E F, il vertice B cade in B' ed il lato A B in D B', cioè fuori del triangolo D E F, per dimostrare che sarà sempre A B o D B' < D E', basterà prendere in considerazione i due triangoli D G B', F G E per stabilire le due ineguaglianze D B' < D G + G B', F E < G E + G F', le quali sommate termine a termine daranno luogo all'altra D B' + F E < D G + G B' + G E + G F, che, dopo sostituito D E a D G + G E e F B' a F G + G B' si ridurrà a D B' + F E < D E + F B', e questa infine, togliendo ad ambi i suoi membri la medesima quantità F E o F B', a D B' < D E.

Proprietà della perpendicolare, dell'obliqua, e della bisettrice di un angolo. — Trattando dell'angolo è stato detto, che perpendicolare era quella retta, che incontrando un'altra retta formava due angoli adiacenti eguali chiamati angoli retti; obliqua quella, che incontrando pure un'altra retta, formava angoli diseguali; infine bisettrice quella retta, che bipartiva in parti eguali un angolo. Ora che si sono trattate le proprietà generali dei triangoli, si applicheranno queste proprietà allo studio di quelle della perpendicolare, dell'obliqua e della bisettrice.

Le proprietà della perpendicolare si possono esprimere coll'enunciare le due seguenti proposizioni: 1.° *Da un dato punto non si può abbassare che una sola perpendicolare ad una data retta;* 2.° *La perpendicolare è la linea più breve fra un dato punto ed una data retta.*

A dimostrare che dal punto C preso fuori della retta A B (Fig. 54) non si può abbassare sulla medesima che una sola perpendico-

lare C D, si giungerà facilmente coll'ammettere per un istante il caso inverso, cioè che ove sia dato invece d'abbassarne diverse delle perpendicolari, come C G, C F, allora è chiaro che prolungando C D di una quantità eguale D E, e tirando poscia le rette E G, E F, i triangoli C G D, G D E sarebbero eguali, come pure eguali i triangoli C D F, D F E, poichè avrebbero tanto gli uni che gli altri due lati eguali comprendenti un angolo eguale siccome retto, onde D F C = D F E, D G C = D G E; ma ammesso che le rette C G, C F fossero perpendicolari alla A B, gli angoli D F C, D G C sarebbero retti, e quindi le linee spezzate C F E, C G E dovrebbero essere linee rette, o quanto dire, dovrebbero confondersi nell'unica perpendicolare C E, una sola essendo la retta che può unire due punti.

Per dimostrare poi che la perpendicolare C D è la minore retta che si possa condurre dal punto C alla retta A B, non si avrà che ad osservare che prolungando C D di una lunghezza eguale a D E e tirando un'altra retta qualunque C F e quindi F E, risulta un triangolo C F E in cui il lato C E < C F + F E; per lo che dividendo per metà la detta ineguaglianza, si ottiene C D < C F, ossia minore di qualunque altra retta condotta dal punto C ad un punto della retta A D diverso da D.

La perpendicolare abbassata da un punto ad una retta essendo la più corta di tutte le linee che si possono condurre dall'uno all'altra, esprime la misura della distanza dal punto alla retta.

La proprietà dell'obliqua tirata da un punto ad una retta è di essere tanto più lunga, quanto maggiormente distante è il suo piede o punto d'intersezione colla retta, dal piede della perpendicolare abbassata dal punto medesimo alla medesima retta.

La verità di tale proposizione si rileva dalla semplice considerazione di due oblique C H, C G (Fig. 55) condotte dal punto C alla retta A B, essendo sufficiente di abbassare a questa la perpendicolare C D e indi prolungarla di una lunghezza eguale D E, e poscia di tirare le rette E H, E G, perchè se ne veda risultare un triangolo C G E, dal quale, dietro i noti principii, è dato ricavare l'ineguaglianza C H + H E < C G + G E, che divisa per metà somministra C H < C G, che denota che l'obliqua C G, che più si scosta dalla perpendicolare C D, è più lunga della obliqua C H, che meno si scosta dalla perpendicolare medesima.

Analoga considerazione delle oblique C F, C I conduce ugualmente a stabilire che la prima è più lunga della seconda.

Due oblique C I, C H (Fig. 55) *condotte da un punto* C *ad eguale distanza dal piede* D *della perpendicolare* D C *sono eguali.* Imperciocchè avendosi che i due triangoli risultanti H D C, D I C sono rettangoli ed hanno il cateto C D comune, ed il cateto D H = D I, l'ipotenusa ed obliqua C H sarà eguale all'ipotenusa ed obliqua C I.

La bisettrice di un' angolo ha la proprietà di essere equidistante dai lati dell' angolo, o in altri termini, di essere tale che tutti i suoi punti distanno egualmente dai due lati dell' angolo.

Per dimostrare la verità di questa proposizione si prenda a considerare un angolo B A C (Fig. 56), la di cui bisettrice sia A D, cioè una retta che forma l'angolo C A B = B A D, e si vedrà, che se da un punto qnalunque E della bisettrice A D si abbassa una perpendicolare E G sul lato A B ed una perpendicolare E I sul lato A C, ne risulteranno formati due triangoli rettangoli A E G, A E I, i quali avendo un angolo acuto eguale, cioè G A E = E A I, e l'ipotenusa A E comune, saranno eguali; onde, siccome è teoria generale che in triangoli eguali ad angoli eguali stanno opposti lati eguali, il cateto E G sarà eguale al cateto E I, epperciò il punto E egualmente distante dai due lati dell' angolo. Analogo ragionamento servirebbe a dimostrare che per qualunque altro punto F della bisettrice A D, le perpendicolari F H, F P, abbassate sui lati dell' angolo, sono eguali; cosicchè resta perfettamente accertato, che tutti i punti della bisettrice d'un angolo godono della proprietà sovra enunciata.

Premesse le proprietà sulla perpendicolare, sull' obliqua e sulla bisettrice, è dato dimostrare i quattro teoremi seguenti, relativi a tutti i triangoli, di qualunque specie essi sieno.

Teorema 1.° *Le bisettrici dei treangoli di un triangolo s'incontrano in un medesimo punto equidistante dai lati del triangolo.*

Sia A B C (Fig. 57) il triangolo dato. Se si dividono per metà gli angoli A e B, il punto d'incontro O delle due bisettrici si troverà evidentemente, per la nota proprietà di questa retta, ad ugual distanza dai lati A C, A B, e dai lati A B, B C, cioè sarà tale che abbassando dal medesimo delle perpendicolari O F, O D, O E rispettivamente sui lati del triangolo, si avrà O F = O D, O D = O E, ossia, siccome due quantità uguali ad una terza sono

uguali tra loro, $OF = OD = OE$; lo che dimostra ad un tempo che il punto O si trova ad egual distanza dai tre lati del triangolo A B C ed è l'unico incontro delle tre bisettrici A O, B O, C O.

Teorema 2.° *Le perpendicolari innalzate per i punti di mezzo dei tre lati di un triangolo si incontrano in un sol punto equidistante dai vertici del triangolo.*

Se dai punti D ed E (Fig. 58) di mezzo dei lati A B, B C del triangolo A B C si innalzano due perpendicolari verso il centro del triangolo medesimo, queste perpendicolari si incontreranno in un punto O tale che le oblique O A, O B, O C, da esso condotte ai vertici A, B, C del triangolo e che misurano la sua distanza da questi vertici, saranno due a due eguali, cioè $OA = OB$, $OB = OC$, ossia anche, per la solita ragione che due quantità eguali ad una terza sono eguali tra loro, $OA = OB = OC$; lo che dimostra che il punto O si trova altresì sulla perpendicolare F O innalzata sulla metà del lato A C, e quindi che le tre perpendicolari innalzate sulla metà dei lati si incontrano in un sol punto equidistante dai vertici.

Teorema 3.° *Le altezze di un triangolo si incontrano in un sol punto.*

Abbiasi un triangolo A B C (Fig. 59) e dai suoi vertici A, B, C si conducano delle rette D F, F E, E D, parallele ai lati C B, A C, A B, rispettivamente opposti; risulterà un altro triangolo D E F, i cui lati saranno doppi di quelli del triangolo A B C, e resteranno divisi per metà nei punti stessi corrispondenti ai vertici di quest'ultimo. Infatti considerando i triangoli A C D, A B C, si vede che hanno il lato A C comune, gli angoli A C D, C A B uguali come alterni interni e gli angoli D A C, A C B parimente uguali come alterni interni, e quindi essi triangoli sono eguali; considerando pure i triangoli C B E, A B C si vede che per ragioni analoghe sono eguali; infine considerando A B F, A B C, anch'essi si addimostrano eguali; onde $DC = CE = AB$, $AD = AF = CB$, $BE = BF = CA$. Ora se dai punti A, B e C s'innalzano delle perpendicolari A G, B H, C I ai lati del triangolo, queste in virtù del teorema precedente debbono incontrarsi in un sol punto O. Ma queste stesse perpendicolari sono le altezze del triangolo A B C, avendo questo i lati paralleli a quelli del triangolo D E F. Dunque rimane per tal modo dimostrato il teorema.

Teorema 4.° *Le tre mediane di un triangolo si incontrano in un medesimo punto.*

Abbiasi un triangolo A B C (Fig. 60) in cui si sieno condotte le due mediane A D, B E che si incontrano nel punto O.

Tirando la retta E D e dai punti E e D le rette E F, D F al punto di mezzo F del lato A B, si avrà, per ciò che è stato osservato nel teorema precedente, che queste rette E D, D F, E F saranno rispettivamente parallele ed eguali alla metà dei lati A B, A C, C B del triangolo A B C. Ripetendo questa costruzione sul triangolo A O B, cioè unendo con rette i punti di mezzo G, H, F dei suoi lati, si otterrà per le stesse ragioni, che G H, H F, G F saranno pure rispettivamente parallele ed uguali alla metà dei lati A B, A O, O B del triangolo suddetto. Si potrà quindi stabilire che

$$E D = A F = F B, \; G H = A F = F B, \text{ ossia } E D = G H = \frac{1}{2} A B.$$

Ma considerando ora che i triangoli E O D, G O H sono eguali, poichè hanno il lato E D = G H, gli angoli E O D, G O H eguali come opposti al vertice, e gli angoli O D E, O G H, e O E D, O H G pure eguali come alterni interni, sarà O D = O G, O H = O E; e siccome O G = G A, H B = O H per costruzione, sarà infine O D = O G = G A, O E = O H = H B, lo che esprime che le due mediane A D, B E si incontrano ad un terzo della loro lunghezza a partire dalla base, e due terzi a partire dal vertice. In conseguenza di ciò la mediana C F tirata dal vertice C dovrà tagliarsi colla mediana A D nel rapporto trovato e passare per O. Dunque le tre mediane condotte in un triangolo, oltrechè s'incontrano in un sol punto, si tagliano nello stesso rapporto, cioè ad un terzo della loro lunghezza a partire dalla base, e a due terzi a partire dal vertice.

Studiando le proprietà del triangolo si è visto che la lunghezza dei lati lo determina così esattamente che non possono esistere due triangoli aventi lati eguali ed al tempo stesso angoli diseguali. Ciò vuol dire che il triangolo è figura geometrica tale, che non può in verun modo cambiare di forma ove i suoi lati si mantengano costanti di lunghezza. Gli è così che nelle costruzioni per formare dei sostegni sospesi stabili, quali armature di tettoie ecc., si usa di collegare assieme i singoli pezzi in forma triangolare, come ad esempio si scorge alla Fig. 61.

Relazione fra quattro rette. — Allorquando quattro rette non s'incontrano in un sol punto e non sono tutte parallele tra di loro, risulta ciò che si chiama un poligono di 4 lati, in altri termini un *quadrilatero,* come A B C D (Fig. 62).

Il quadrilatero riceve denominazioni particolari, se vi ha una certa relazione tra i suoi lati ed angoli. Occorre anzitutto distinguere due casi, cioè uno in cui due lati del quadrilatero sono paralleli, un altro in cui tutti i lati del medesimo sono due a due paralleli; nel primo caso il quadrilatero si chiama *trapezio,* come il poligono A B C D (Fig. 63), che ha il lato A B parallelo al lato C D; nel secondo si chiama *parallelogramma*, come il poligono A B C D nelle figure 64, 65, 66 e 67, ove i lati A B, C D e A D, B C sono paralleli e conseguentemente eguali. Il parallelogramma poi, potendo avere solamente i lati opposti eguali, oppure tutti i lati eguali, oppure solo i lati opposti eguali e tutti gli angoli retti, oppure infine tutti i lati eguali e tutti gli angoli retti, si distingue a sua volta in *romboide*, come A B C D (Fig. 64) che ha D C = A B, A D = B C; in *rombo* o *losanga*, come A B C D (Fig. 65), che ha D C = D A = A E = E C; in *rettangolo*, come A B C D (Fig. 66), che ha tutti gli angoli retti ed i lati opposti eguali, cioè A B = D C, A D = B C; ed infine in *quadrato*, come A B C D (Fig. 67), che ha tutti gli angoli retti e tutti i lati eguali, cioè A B = B C = C D = D A.

Proprietà generali dei quadrilateri. — In ogni quadrilatero A B C D (Fig. 62), si possono tirare diverse rette A C, B D, unendo due a due i vertici dei suoi angoli non adiacenti. Ognuna di queste rette si chiama *diagonale*. È chiaro che da ciascun vertice A, B... di un quadrilatero non si può tirare che una sola diagonale A C, B D... la quale scompone il quadrilatero stesso in due triangoli, come A C D, A C B o A B D, B D C. Siccome quattro sono i vertici in un quadrilatero, parrebbe a prima giunta dovere essere pure quattro le diagonali possibili a condursi nel medesimo, ma riflettendo che ogni diagonale è comune a due vertici, si giunge facilmente a conoscere che in realtà non si possono tirare in questo poligono che due diagonali, ossia un numero eguale alla metà dei suoi vertici. Queste diagonali poi si tagliano nei quattro quadrilateri speciali sovra contemplati in un punto, per cui esse acquistano proprietà importanti nelle diverse figure; così nel trapezio le due diagonali s'incontrano

in un punto collocato sulla retta che unisce i punti di mezzo dei lati paralleli; nel romboide le diagonali si tagliano per metà; nel rombo si tagliano per metà e ad angolo retto; nel rettangolo oltre a tagliarsi per metà, le due diagonali sono eguali tra loro; nel quadrato infine si tagliano per metà, sono eguali fra loro e si incontrano ad angolo retto.

Queste proprietà delle diagonali condotte nei diversi quadrilateri indicati, possono anche dirsi le proprietà essenziali di quest'ultimi. Eccone le dimostrazioni.

Proprietà del trapezio. — Abbiasi il trapezio A B C D (Fig. 63), e sieno A C, B D le sue diagonali, che s'incontrano in un punto G; si vedrà facilmente che prendendo il punto di mezzo F della base A B di questo trapezio, e tirando la retta F G, questa dividerà la base D C superiore parallela alla prima pure per metà; imperocchè, ove si consideri che i triangoli A B G, D G C hanno gli angoli in G eguali come opposti al vertice, gli angoli G A B, G C D e G B A, G D C pure eguali come alterni interni, ossia tutti gli angoli eguali, la retta E F è al tempo stesso una mediana nel triangolo A G B e nel triangolo D G C.

Il trapezio, a seconda che ha o non ha i lati non paralleli eguali, riceve la denominazione speciale d'*isoscele* o di *scaleno*. Inoltre in ogni trapezio si distinguono due basi che sono i lati paralleli, ed un'altezza che è la perpendicolare comune a questi lati.

Nel trapezio isoscele in particolare, come A B C D (Fig. 63), le diagonali A C, B D sono eguali, e la retta E F, che congiunge i punti di mezzo delle basi, è anche al tempo stesso la sua linea di simmetria e la sua altezza. Per dimostrare tutto ciò, basti l'osservare che in esso trapezio i lati A D, B C non paralleli eguali fanno necessariamente con quelli paralleli A B, D C degli angoli interni dalla stessa parte eguali, cioè D A B = A B C, A D C = B C D; conseguentemente i triangoli A B C, A B D e A D C, B D C sono eguali, e la diagonale A C è eguale alla diagonale B D; ma dall'eguaglianza di quest'ultimi triangoli risulta anche quella dei triangoli A G D, B G C, ed infine quella dei triangoli A G F, B G F, da cui si deduce che la retta E F incontra la retta A B facendo due angoli adiacenti A F G, B F G eguali, epperciò è perpendicolare alla stessa retta A B e alla parallela a questa D C, e linea di simmetria del trapezio.

Proprietà del parallelogramma romboide. — Abbiasi un parallelogramma romboide A B C D (Fig. 64), che si suol chiamare semplicemente *parallelogramma*, e sieno A C, B D le sue diagonali, che s'incontrano in un punto O; se si considerano i due triangoli A O B, D O C, si scorgerà che essi hanno un angolo opposto al vertice in O eguale, il lato A B = C D, e di più, essendo A B parallelo a D C, gli angoli A B O, C D O e B A O, D C O eguali, siccome alterni interni, e per conseguenza che essi sono eguali; onde se questi triangoli sono eguali, il lato A O opposto all'angolo A B O è eguale al lato O C opposto all'angolo C D O, e medesimamente il lato O B opposto all' angolo B A O è eguale al lato O D opposto all' angolo D C O; epperciò le due diagonali del parallelogramma si tagliano per metà nel punto O.

Ogni lato del parallelogramma può esser preso per la sua base, ed ogni perpendicolare comune a due dei suoi lati opposti per la sua altezza. Un parallelogramma ha quindi quattro basi e due altezze. Però scelta una base, l' altezza sarà soltanto la perpendicolare comune a questa base e alla sua parallela.

Proprietà del rombo. — In un rombo A B C D (Fig. 65), tirando una diagonale D B si vengono a formare due triangoli eguali ed isosceli D C B, D A B, e tirando poi l' altra diagonale A C si viene, per la propietà comune ad ogni parallelogramma, a tagliare per metà D B; dimodochè gli angoli D O C, C O B, D O A, A O B risultano retti siccome formati in triangoli isosceli da rette congiungenti la metà della base col vertice opposto. Dunque le diagonali del rombo s'incontrano ad angolo retto.

Il rombo ha le basi e le altezze come nel parallelogramma.

Proprietà del rettangolo. — Anche nel rettangolo, che è un parallelogramma, le diagonali si tagliano per metà. Il rettangolo avendo inoltre tutti gli angoli retti, resta diviso da ognuna delle diagonali in due triangoli rettangoli eguali, poichè questi triangoli hanno per cateti i lati del rettangolo stesso.

Così il rettangolo A B C D (Fig. 66) resta scomposto dalle diagonali A C, B D, nei quattro triangoli rettangoli A B C, A C D, A B D, B D C tra loro eguali. Da ciò si deduce che le diagonali stesse A C, B D, che sono le ipotenuse di quei triangoli, sono pure eguali.

I lati del rettangolo essendo due a due paralleli o perpendicolari, possono servire indistintamente di base e di altezza del ret-

tangolo stesso. Anche qui però, come nel parallelogramma, scelta una base, l'altezza sarà soltanto uno dei lati a questa base perpendicolari.

Proprietà del quadrato. — Il quadrato essendo un parallelogramma rettangolo, che ha tutti i lati eguali, le sue diagonali si taglieranno per metà, e saranno eguali tra di loro. Oltracciò, siccome ogni diagonale A C condotta in un quadrato A B C D (Fig. 67), scompone questo quadrato in due triangoli rettangoli isosceli A B C, A C D, è chiaro che essa diagonale verrà tagliata dall'altra B D ad angolo retto, per la stessa ragione addotta di sopra trattando del rombo; per cui le due diagonali del quadrato sono anche perpendicolari tra loro.

La base e l'altezza in un quadrato è indistintamente uno dei suoi lati.

Venendo ora a considerare che ogni diagonale scompone un quadrilatero in due triangoli, si rende manifesto che alla sua determinazione concorrono due volte tre elementi, cioè sei elementi, i quali però, stante che la diagonale stessa è un lato comune ai due triangoli, si riducono soltanto a cinque. Nel caso poi di quadrilateri speciali, di cui sono dati già alcuni elementi, il numero degli elementi necessario alla loro formazione si ridurrà evidentemente ancora di alquanto. Così pel trapezio, di cui si sa che due lati sono paralleli, bastano quattro elementi; pel parallelogramma o romboide, che ha tutti i lati paralleli, bastano tre; pel rombo, che ha tutti i lati eguali, e pel rettangolo che ha tutti gli angoli retti, bastano due; infine per il quadrato, che ha tutti i lati eguali e tutti gli angoli retti, basta un solo elemento.

Ogni quadrilatero essendo scomponibile in due triangoli, la somma dei suoi angoli ossia degli angoli al perimetro è eguale a due volte due retti, ossia eguale a quattro retti. Parimente se in un quadrilatero A B C D (Fig. 62), si prolungano i quattro lati, gli angoli esterni in tal modo ottenuti, come B A H, C B E, D C F, A D G, sommano assieme a quattro retti; poichè, siccome questi angoli unitamente a quelli del poligono fanno otto retti, la differenza tra gli uni e gli altri è quattro.

Relazione tra più rette. — Allorquando più rette non sono parallele tra loro e non passano per un medesimo punto, s'incontrano dando luogo a figure, che si distinguono sempre col nome generico

di *poligoni*. In questi, come negli altri poligoni già studiati, le rette che ne determinano il contorno si chiamano *lati*, i loro punti di incontro *vertici*, gli angoli da essi formati *angoli al perimetro dei poligoni*.

I poligoni si distinguono in *regolari* ed *irregolari*, secondochè hanno o no tutti i lati eguali e gli angoli al perimetro eguali. Il triangolo equilatero è un poligono regolare medesimamente il quadrato; ogni altro triangolo ed ogni altro quadrilatero è irregolare.

Altramente e più ancora si distinguono i poligoni con denominazioni esprimenti il numero dei lati, di cui si compongono: così si chiama *pentagono* il poligono terminato da cinque lati, *esagono* quello terminato da sei lati, *ettagono* quello da sette, *ottagono* quello da otto, *ennagono* quello da nove, *decagono* quello da dieci, *endecagono* da undici, *dodecagono* da dodici, *pentadecagono* da quindici, e così di seguito.

Per indicare dunque nel modo il più esatto un dato poligono, fa d'uopo impiegare una delle denominazioni precedenti per esprimere il numero dei lati, ed aggiungere la parola regolare od irregolare per esprimere se i lati e gli angoli al perimetro sono o no eguali.

In un pentagono A B C D E (Fig. 68), da un vertice qualunque A si possono condurre due diagonali A C, A D, che scompongono il pentagono stesso in tre triangoli A B C, A C D, A D C. Ora nel pentagono i vertici essendo cinque, le diagonali sarebbero due moltiplicato per cinque, ossia dieci; ma siccome ogni diagonale è comune a due vertici, in realtà non si potranno condurre in un pentagono che sole cinque diagonali.

Qualunque sia pertanto il numero dei lati del poligono, si avrà sempre che le diagonali in esso condotte saranno comuni a due dei suoi vertici, ed il numero totale di questi sarà eguale al numero dei suoi lati. Sarà quindi a dirsi in generale che *in un poligono di* n *lati il numero delle diagonali che si possono condurre da ciascun vertice è eguale al numero dei lati meno tre, cioè* $n - 3$; *e il numero di tutte le diagonali, che si possono condurre da tutti i vertici assieme, è eguale a questa differenza moltiplicata per la metà del numero dei lati*, cioè $\frac{n(n-3)}{2}$. Per esempio, nell'esagono

si potranno tirare da cadaun vertice $6 - 3 = 3$ diagonali ed in tutto $\frac{6\,(6-3)}{2} = 9$ diagonali.

Ogni pentagono venendo decomposto da due diagonali in tre triangoli, il numero degli elementi necessari alla sua determinazione sarà tre moltiplicato per tre, ossia nove; ma poichè le due diagonali sono comuni rispettivamente a due triangoli, quel numero di elementi si ridurrà in conclusione a nove meno due, ossia a sette.

In generale *un poligono di n lati scomponendosi in $n - 2$ triangoli, il numero degli elementi necessari alla sua determinazione sarà espresso dalla formola $3\,(n-2) - (n-3)$, ossia da $2\,n - 3$.* Dimodochè a determinare il pentagono occorrono sette elementi, l'esagono nove, ecc.

Ma ove si tratti però di costrurre un poligono regolare basterà un solo elemento; poichè, data la natura del poligono, si ricava tosto il valore dell'angolo al perimetro, considerando che se n sono i lati del poligono, desso si scompone in $n - 2$ triangoli, i cui angoli sommano assieme a $2\,r\,(n-2)$, onde ciascuno degli angoli al perimetro eguali del poligono sarà dato da $\frac{2\,r\,(n-2)}{n}$, ossia, se vuolsi, da $\frac{180\,(n-2)}{n}$, ossia ancora da $\frac{180\,n - 360}{n}$, e quindi da $180 - \frac{360}{n}$.

Quanto poi alla somma degli angoli esterni di un poligono, cioè di quelli formati dai prolungamenti dei lati come L A B, F B C, G C D, H D E, I E A (Fig. 68), essa è sempre costante ed eguale a quattro retti, perocchè è sempre eguale a tante volte due retti quanti sono i vertici (o i lati), meno la somma degli angoli al perimetro del poligono, cioè $2\,r\,n - 2\,r\,(n-2)$, ossia $2\,r\,n - 2\,r\,n + 4\,r$, ossia ancora $4\,r$.

Due poligoni qualunque si dicono eguali se hanno tutti gli elementi eguali, o, se vuolsi, se si compongono di triangoli rispettivamente eguali; od ancora se sovrapposti coincidono perfettamente. Due poligoni eguali possono essere disposti egualmente o simmetricamente l'uno rispetto all'altro nello stesso modo osservato pei triangoli.

Si dice pure che due poligoni, come i due esagoni A B C D E F, A' B' C' D' E' F' (Fig. 69), sono simmetrici se si trovano disposti l'uno rispetto all'altro in modo che i vertici corrispondenti sieno due a due, come D, D', sulla medesima perpendicolare condotta ad una linea di simmetria G H, e da questa egualmente distanti.

Che due poligoni qualunque, come A B C D E, A' B' C' D' E' (Fig. 68), sieno eguali quando si compongono di un egual numero di triangoli eguali ed egualmente disposti, è facile a vedersi immaginando di sovrapporre due a due i triangoli corrispondenti ed eguali formati dai lati e dalle diagonali, come A B C, A C D, A D E, A' B' C', A' C' D', A' D' E'. Infatti, dopo sovrapposti il triangolo A B C sul suo eguale e corrispondente A' B' C', il triangolo A C D su A' C' D', e A D E su A' D' E', è evidente che i due poligoni stessi coincidono perfettamente e quindi sono eguali.

Poligoni regolari. — Si è detto che un poligono regolare è quello che ha tutti i lati e gli angoli al perimetro eguali. Il poligono A B C D E F G H I L (Fig. 70), che ha dieci lati eguali e dieci angoli al perimetro eguali, è un decagono regolare. Ogni poligono regolare ha un centro, vale a dire un punto egualmente distante da tutti i vertici del poligono. Di fatto prendendo ad esempio l'indicato decagono, se a ogni suo vertice si tira la bisettrice del corrispondente angolo al perimetro, è chiaro che tutte le bisettrici debbono essere eguali e quindi incontrarsi in un tal punto centrale O, poichè i triangoli risultanti O A B, O B C, O C D ecc.; essendo isosceli ed avendo tutti un lato eguale e due angoli adiacenti a questo lato eguali, sono eguali. Da ciò emerge eziandio, che tutti i vertici di un poligono regolare qualunque, si trovano sempre su di una circonferenza di circolo descritto con centro nel centro del poligono, e con raggio eguale alla distanza tra detto centro ed uno qualunque dei vertici del poligono.

La retta abbassata dal centro su di un lato si chiama *apotema*. Le apoteme che si possono tirare in un poligono regolare sono eguali, poichè non sono altro che le altezze dei triangoli isosceli eguali in cui si scompone, unendone il centro coi vertici.

Dato il lato o l'apotema, si potrà sempre costrurre un poligono regolare, ma non però dato l'angolo, inquantochè la sola natura del poligono determina l'angolo al perimetro.

Trattandosi di costrurre un poligono regolare di quattro lati di lunghezza qualunque, non si ha che a tirare una retta A B (Fig. 71), e su questa retta ed ai suoi estremi innalzare delle perpendicolari A D, B C, di lunghezza ad essa eguale, ed infine unire con una retta gli estremi D, C di queste perpendicolari: risulta così per poligono regolare un quadrato A B C D. Condotte poi in questo quadrato le diagonali A C, B D, le quali è noto essere eguali e tagliarsi per metà, se si fa centro nel loro punto di mezzo O e con raggio O A si descrive una circonferenza, questa passa per i quattro vertici A, B, C, D del quadrato, poichè O A = O B = O C = O D.

Costrutto un quadrato e descritta la circonferenza che passa pei suoi vertici, è facile trovare il modo di costrurre l'ottagono regolare. Sapendo infatti che in un poligono regolare le bisettrici degli angoli non sono altro che i raggi della circonferenza che passa pei suoi vertici condotti a questi vertici, se si dividono per metà tutti gli angoli al centro A O B, B O C, C O D, D O A del quadrato, le bisettrici incontrando la circonferenza determinano su questa quattro vertici E, F, G, H dell'ottagono, che basta che sieno convenientemente uniti coi vertici del quadrato per ottenere l'ottagono regolare A E B F C G D H.

Medesimamente per costrurre un poligono regolare di 16 lati non si ha che a dividere gli angoli al centro dell'ottagono regolare per metà, ed unire con rette i punti d'incontro delle bisettrici colla circonferenza che passa pei vertici dell'ottagono convenientemente coi vertici di quest'ultimo, come apparisce dall'ispezione della stessa Fig. 71, in cui si scorge essere il poligono in questione E 1 B 2 F 3 C 4 G 5 D 6 H 7 A 8.

Si può adunque conchiudere essere possibile la costruzione di un poligono regolare, il cui numero di lati sia una potenza perfetta del due.

Volendo ora costrurre un poligono regolare di tre lati, cioè un triangolo equilatero, basta tirare una retta A B (Fig. 72) e descrivere con far centro nei suoi estremi con raggio eguale alla retta stessa due archi in modo che si taglino in un certo punto C, e per ultimo condurre le rette A C, B C, chè il triangolo risultante A B C è il voluto. Anche questo poligono avendo un centro, poichè le perpendicolari innalzate sui lati dai loro punti di mezzo si incontrano in un sol punto O ad eguale distanza dai tre vertici

A, B, C, si può descrivere una circonferenza che passi per questi medesimi vertici facendo centro in O e con uno dei raggi O A, O B, O C.

In modo analogo indicato per l'ottagono regolare si può quindi costrurre un poligono regolare di sei lati, dopo determinato quello di tre. Non si ha per ciò che a dividere gli angoli A O B, B O C, C O A per metà ed unire convenientemente i punti d'incontro D, E, F delle bisettrici colla circonferenza coi vertici del triangolo equilatero A B C, per ottenere nel poligono A D B E C F un esagono regolare.

Se ora si considera che ogni angolo al centro dell'esagono regolare, come D O B, è la sesta parte di 4 retti, cioè 60°, e che il triangolo D O B è isoscele, e che per conseguenza gli angoli O D B, D B O sono eguali tra loro, epperciò ciascuno di 60°, risulta evidente che il triangolo D O B è un triangolo equilatero; onde si può inferire che il lato D B dell'esagono regolare è eguale al raggio O D della circonferenza, o, in altri termini, che portando di seguito il raggio di un circolo come corda sulla circonferenza, esso vi è contenuto sei volte esattamente.

Per costrurre inoltre un dodecagono regolare, cioè un poligono regolare di dodici lati, conviene al solito dividere per metà gli angoli al centro del poligono che ha la metà dei lati, cioè dell'esagono, ed unire convenientemente i punti d'incontro delle bisettrici colla circonferenza che passa pei vertici dell'esagono con questi medesimi vertici, nel modo che chiaro apparisce dalla figura, nella quale il poligono in parola è indicato A 6 D 1 B 2 E 3 C 4 F 5.

Da quanto precede, si può ben anco conchiudere, che sarà sempre possibile la costruzione di un poligono regolare, in cui il numero dei lati sia una potenza del due moltiplicato per tre.

In conclusione coi metodi indicati si potranno costrurre i poligoni regolari di 4, 8, 16, 32, 64... ed anche di 3, 6, 12, 24, 48... lati, o, in termini generali, sarà possibile la costruzione di quei poligoni regolari, il cui numero di lati è una potenza perfetta del due ovvero una simile potenza moltiplicata per tre.

QUA

DELLE FORMOLE CONTE

RET

Misura coll'approssimazione di $\frac{1}{n}$ { lunghezza / divisione

ANG

Trasformazione

Sessagesimale in Centesimale	Sessagesimale in Ore			Centesimale in Sessagesimale
gradi, primi, secon.	gradi	primi	secondi	gradi, primi, secondi
$\times\frac{10}{9}$	$\times\frac{1}{15}, \frac{8}{15}, \frac{32}{15}$	$\times\frac{32}{900}$	$\times\frac{32}{54000}$	$\times\frac{9}{10}$

POLI

Diagonali da un vertice

$n - 3.$



Triangoli
da un vertice
$n - 2$

Diagonali
da tutti i vertici

$\frac{n\,(n-3)}{2}$

Numero degli elementi necessari per determinare un poligono

irregolare	regolare
$2\,n - 3$	2

NB. n = numero dei lati del poligono,

DRO

NUTE NEL PRIMO LIBRO

TE

del nonio L $= n - 1$ parti della retta.

del nonio D $= \frac{n-1}{n}$.

OLI

della divisione

Centesimale in Ore			Oraria in Sessagesimale			Oraria in Centesimale		
gradi	primi	secondi	ore	ottavi	q., fraz. di q.	ore	ottavi	q., fraz. di q.
$\times\frac{3}{50}\frac{24}{50}\frac{96}{50}$	$\times\frac{96}{5000}$	$\times\frac{96}{500000}$	$\times 15$	$\times\frac{15}{8}$	$\times\frac{900}{32}$	$\times\frac{50}{3}$	$\times\frac{50}{24}$	$\times\frac{5000}{96}$

GONI

Somma degli angoli al perimetro	Somma degli angoli esterni formati col prolungamento dei lati	Angolo al perimetro di un poligono regolare
$2r(n-2)$	$4r$	$\frac{2r(n-2)}{n}$

$r =$ angolo retto).

PROBLEMI.

1.° — *Dividere una retta data in due parti eguali.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 1).

Risoluzione. — Sia A B la retta data da dividersi.

Facciasi centro nell' estremo A e con un' apertura di compasso qualunque, purchè maggiore della metà della retta data, descrivasi superiormente ed inferiormente ad essa un arco di circolo. Colla medesima apertura di compasso facciasi di poi centro nell' estremo B, e descrivasi un secondo arco di circolo, che taglierà il primo nei due punti C e D. Uniscansi questi due punti col mezzo di una retta; il punto d' intersezione E colla retta data si troverà ad eguale distanza dagli estremi di essa, epperciò bipartirà in parti eguali la retta medesima.

Dimostrazione. — Si tirino le rette A C, B C, B D e D A. I due triangoli A C D, D C B saranno uguali perchè aventi il lato A C = B C, A D = B D per costruzione, ed il lato C D comune; onde saranno pure uguali gli angoli A C E, E C B ed i triangoli A C E, E C B che hanno questi angoli uguali, il lato A C = B C per costruzione ed il lato C E comune. Ora essendo uguali questi due triangoli A C E, E C B, anche i loro lati A E, E B, che si trovano opposti ad angoli uguali, saranno uguali, e conseguentemente la retta data A B si troverà divisa per metà in E.

Discussione. — Se gli archi descritti per la determinazione del punto D lo fossero con diverso raggio di quelli descritti per la determinazione del punto C, la retta C D dividerebbe sempre la data retta in parti eguali, poichè si avrebbe sempre l' eguaglianza dei triangoli C A D e C B D, essendo A D = D B, A C = C B e C D comune.

2.° — *Innalzare una perpendicolare ad una retta data in un punto dato della medesima.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 2).

Risoluzione 1.ª — Sia nel punto C della retta data A B che si debba innalzare una perpendicolare.

Prendasi una distanza qualunque C E = C D; facciasi centro nel punto E, e con un raggio qualunque, purchè maggiore della metà di E D, descrivasi un arco di circolo; collo stesso raggio, e facendo centro nel punto D, descrivasi un secondo arco, che taglierà il primo in un punto F; uniscansi infine i due punti F e C col mezzo di una retta, questa sarà la retta perpendicolare alla retta data A B.

Dimostrazione. — Si tirino le rette D F ed E F. I due triangoli D C F, E C F hanno il lato D C = E C, il lato D F = E F per costruzione, di più, il lato C F comune; essi sono perciò eguali. Siccome in triangoli eguali a lati eguali corrispondono angoli eguali, l'angolo E C F opposto ad E F sarà eguale all'angolo D C F opposto a D F. Ma la somma dei due angoli E C F, D C F corrispondendo a due angoli retti, ne segue che ciascuno di essi è retto, e la retta F C perpendicolare alla A B.

(Vedi Tav. VI, Fig 3).

Risoluzione 2.ª — Sia nell'estremo A della retta data A B che si debba innalzare la perpendicolare.

Egli è chiaro che ove si potesse prolungare la retta BA, non si avrebbe che ad adottare il modo ora esposto. Ma non potendosi prolungare la B A, prendasi un punto qualunque C sulla retta data, e facendo centro prima nel punto A e poi nel punto C, si descrivano con eguale raggio e qualunque due archi di circolo, che si taglieranno nel punto D; si tiri in appresso la retta C D, e la si prolunghi di una quantità D E = D C, e si congiungano infine i punti E ed A con una retta, questa sarà la domandata perpendicolare.

Dimostrazione. — Infatti se si tira la retta D A, egli è evidente per la fatta costruzione, che i due triangoli C A D, A D E sono isosceli, epperciò l'angolo A C D = C A D, e l'angolo A E D = E A D;

onde sommando termine a termine queste due eguaglianze, si avrà la seguente espressione: A C D + A E D = C A D + E A D, il cui secondo membro, come risulta dall' ispezione della figura, si riduce all' angolo C A E, lo che significa che la somma dei due angoli acuti C ed E del triangolo C A E eguaglia il terzo A, ossia, siccome la somma dei tre angoli di un triangolo è eguale a due angoli retti, che l'angolo A è retto e la retta E A perpendicolare alla A B data.

(Vedi Tav. VI, Fig. 4).

Risoluzione 3.ª — Sia nell'estremo A della retta data A B che si debba innalzare la perpendicolare senza poter prolungare la retta data.

Prendasi un punto qualunque D ed in questo si faccia centro e si descriva un arco di circolo con raggio D A, che taglierà la retta A B nel punto C; si tiri poscia la retta C D e la si prolunghi sino all'incontro dell'arco di circolo in E; conducasi in ultimo la retta E A, e questa sarà la perpendicolare domandata.

Dimostrazione. — Si tiri la retta D A, e si vedrà tosto che D A = D C = D E, perchè raggi dello stesso circolo, e quindi sono isosceli i due triangoli A D C, A D E; epperciò, per le medesime ragioni di cui alla dimostrazione della 2.ª risoluzione di questo problema, l'angolo C A E è retto e la retta A E di conseguenza perpendicolare alla A B.

3.° — *Da un dato punto preso fuori di una retta data abbassare su questa una perpendicolare.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 5).

Risoluzione. — Sia dal punto C che si debba abbassare una perpendicolare alla retta A B.

Facciasi centro nel punto dato C e con un raggio sufficientemente grande si descriva un arco di circolo che venga a tagliare la retta data A B in due punti D ed E. Dividasi per metà la distanza D E ed uniscasi il punto dato C col punto di divisione F per mezzo di una retta, che sarà la perpendicolare domandata.

Dimostrazione. — Si conducano le rette D C e C E e si vedrà tosto l'eguaglianza dei due triangoli D F C, C F E per avere essi il lato

D F = F E per costruzione, il lato D C = C E perchè raggi dello stesso arco di circolo, e di più il lato C F comune. Ora siccome in triangoli eguali a lati eguali si oppongono angoli eguali, così ai lati D C, C E si opporranno gli angoli eguali D F C, E F C. Ma la somma di questi due angoli adiacenti è di due retti, dunque ciascuno di essi è retto ed in conseguenza la retta C F è perpendicolare alla retta A B.

4.° — *Dividere un dato angolo per metà.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 6).

Risoluzione. — Sia B A C l'angolo da bisecarsi.

Prendasi a partire dal vertice A dell'angolo la distanza qualunque A D = A E; si faccia quindi centro prima in D e poi in E e con eguale raggio a piacere, purchè maggiore della metà di D E, si descrivano due archi che si taglieranno nel punto F. Conducasi la retta A F, che sarà la bisettrice domandata.

Dimostrazione. — Infatti tirando le rette E F, D F, si vedrà tosto l'eguaglianza dei due triangoli F E A, F A D per avere essi A E = A D, E F = F D per costruzione ed il lato F A comune; e per la solita proprietà dell'eguaglianza degli angoli che si oppongono a lati eguali in triangoli eguali, risulterà che l'angolo E A F = D A F e che perciò la retta A F ha effettivamente diviso l'angolo B A C in due parti eguali.

5.° — *Trisecare l'angolo retto.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 7).

Risoluzione. — Sia l'angolo retto B A C che si abbia a dividere in tre parti eguali.

Facciasi centro nel vertice A e con un raggio qualunque A D descrivasi un quarto di circolo; collo stesso raggio si faccia successivamente centro in D e G e si descrivano due archi che taglieranno il quarto di circolo nei punti F ed E. Tirando le rette A F ed A E, esse divideranno in tre parti eguali l'angolo dato.

Dimostrazione. — Conducendo le rette D F e G E è facile a scorgersi che il triangolo A D F avendo tutti e tre i lati eguali per costruzione, è equilatero, epperciò l'angolo D A F, di 60°, e l'an-

golo G A F di 30°, cioè il terzo dell' angolo retto; che parimente, per identiche ragioni, il triangolo A E G è pure equilatero, l' angolo G A E di 60°, e l'angolo E A D di 30°; che in conclusione anche F A E è di 30°, e l' angolo retto C A B resta diviso in tre parti uguali dalle rette A F, A E.

6.° — *Per un punto dato fuori d'una retta data condurre a questa una parallela.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 8).

Risoluzione 1.ª — Sia dal punto P che si debba condurre una parallela alla retta data A B.

Prendasi sulla retta data A B un punto qualunque C, e facendo centro in questo punto e con raggio C P descrivasi un arco di circolo P D; quindi collo stesso raggio e facendo centro in P, descrivasi un altro arco di circolo, e si porti su questo C E = D P; si tiri la retta P E, e dessa sarà la parallela domandata.

Dimostrazione. — Si conduca la retta P C; egli è chiaro che i due angoli C P E, P C D essendo eguali per costruzione ed essendo alterni interni, la retta P E è parallela alla A B.

(Vedi Tav. VI, Fig. 9).

Risoluzione 2.ª — Sia dal punto P che si debba tirare la parallela alla retta A B.

Facciasi centro in un punto qualunque C e descrivasi con raggio C P un semicircolo, che taglierà la retta A B nei punti D ed F; si porti la distanza D P da F in E e si conduca la retta P E, che sarà la parallela domandata.

Dimostrazione. — Si conducano le rette C P, C E, P D, E F, e si vedrà facilmente che i due triangoli D P C e C E F sono eguali e simmetrici, poichè hanno C P = C E, C D = C F come raggi dello stesso circolo, D P = F E per costruzione; quindi anche le perpendicolari P Q, E R sono eguali, epperciò la retta P E è parallela alla retta A B.

7.° — *Costruire un triangolo equilatero conoscendone il lato.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 10).

Risoluzione. — Sia sulla retta A B che si debba formare un triangolo equilatero.

Si faccia centro prima nel punto A, e quindi in B, e con una apertura di compasso eguale alla retta data A B si descrivano due archi di circolo, che si taglieranno nel punto C; si tirino di poi le rette A C e C B, ed il triangolo A B C sarà il triangolo equilatero richiesto.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C avendo per costruzione i tre lati eguali tra loro ne segue che non può essere altro che equilatero.

8.° — *Costruire un triangolo equilatero conoscendone l'altezza.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 11).

Risoluzione. — Sia la retta C D l'altezza di un triangolo equilatero da costruirsi.

Nell'estremo D si innalzi una perpendicolare alla retta C D; si formino quindi due angoli D C A, D C B di 30°, all'altro estremo, col mezzo indicato nel Problema 5.°, ed il triangolo risultante sarà equilatero e sarà il domandato.

Dimostrazione. — Considerando i due triangoli rettangoli A D C, D C B che hanno un angolo acuto eguale, chiaro vedesi che sarà anche l'angolo D B C = D A C, epperciò il triangolo A B C isoscele. Ora l'angolo A C B essendo di 60° per costruzione, gli altri angoli A e B devono pure essere eguali a 60°, e per conseguenza il triangolo A B C essere equilatero.

9.° — *Costruire un triangolo conoscendone i tre lati.*

(Vedi Tav. VI, Fig. 12).

Risoluzione. — Siano *a*, *b*, *c* i tre lati del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di questa si prenda una lunghezza A B = *a*; indi si faccia centro nel punto A e con un raggio eguale al lato dato *b*, si descriva un grande arco di circolo; suc-

cessivamente si faccia centro in B e con un raggio eguale al terzo lato dato *c*, descrivasi un'altro arco di circolo, che taglierà il primo nei punti C e C'; si conducano infine le rette A C, A C', B C, B C', ed i due triangoli risultanti risponderanno al problema. Essi sono simmetrici per rispetto al lato A B.

Dimostrazione. — I due triangoli A B C, A B C' avendo ciascuno i tre lati eguali ai tre lati dati per costruzione, sono eguali ed inoltre simmetrici, epperciò uno qualunque dei due soddisfa al problema.

10.° — *Costruire un triangolo conoscendone due lati e l' angolo tra questi compreso.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 13).

Risoluzione. — Sieno *a* e *b* i lati ed H l' angolo tra essi compreso del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra questa si prenda una distanza A B eguale al lato *b;* si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo dato H, e si porti sulla linea A D una distanza A C eguale al lato dato *a;* si tiri la retta C B ed il triangolo risultante sarà il triangolo richiesto.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C avendo il lato A B $= b$, il lato A C $= a$, e l' angolo A $=$ H per costruzione, risolve precisamente il problema.

11.° — *Costruire un triangolo conoscendone due lati e l'angolo adiacente ad uno di essi.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 14).

Risoluzione. — Sieno *a* e *b* i lati dati, e sia H l'angolo adiacente al lato *a* del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra questa si prenda una distanza A B $= a;$ si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo dato H; si faccia quindi centro in B e con raggio eguale al lato dato *b*, si descriva un arco di circolo, che taglierà la retta A C' nei due punti C e C'; si avrà ora che tirando le rette C B e C' B, i triangoli A C B, A C' B risponderanno al problema.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C ha il lato A B $=a$, il lato B C $=b$ e l'angolo A $=$ H; parimenti il triangolo A B C' ha il lato A B $=a$, B C' $=b$ e l'angolo A $=$ H; per conseguenza i due triangoli risolvono il problema.

12.° — *Costruire un triangolo conoscendone un lato e due angoli adiacenti a questo lato.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 15).

Risoluzione. — Sia a il lato dato, e sieno H e K i due angoli del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si porti una distanza A B $=a$; si formi in A un angolo eguale all'angolo H, ed in B un angolo eguale all'angolo K; il triangolo risultante sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C ha per costruzione i requisiti richiesti.

13.° *Costruire un triangolo conoscendone la base, l'altezza ed un lato adiacente.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 16).

Risoluzione. — Sia a la base, h l'altezza ed l il lato adiacente del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si prenda una distanza A B $=a$; si prenda quindi un punto qualunque D su A B e si innalzi su questa retta una perpendicolare D E $=h$; per il punto E conducasi una parallela alla retta A B, e facendo centro in A con raggio eguale ad l si tagli la parallela nel punto C; infine tirisi la retta C B ed il triangolo risultante A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Se dal vertice C si abbassa la perpendicolare C F, si vedrà tosto che essa è eguale a D E, perchè le parallele comprese fra parallele sono eguali. Dunque C F $=$ D E $=h$, e per conseguenza il triangolo A B C ha l'altezza data. Inoltre la base A B $=a$ per costruzione, e per la stessa ragione A C $=l$; onde il triangolo A B C riunisce in sè le condizioni proposte e perciò risolve il problema.

14.° — *Costruire un triangolo conoscendone la base, l'altezza ed un angolo adiacente alla base.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 17).

Risoluzione. — Sia a la base data, h l'altezza ed H l'angolo adiacente alla base del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si prenda una distanza $AB = a$; in un punto qualunque D si innalzi una perpendicolare $DE = h$, e pel punto E si tiri una parallela alla A B. Si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo dato H, e si verrà a tagliare la parallela nel punto C. Tirando la retta C B, il triangolo A B C sarà il richiesto.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C ha la base $AB = a$, l'angolo $A = H$ per costruzione, l'altezza $CF = ED = h$ altezza data, epperciò risolve il problema.

15.° — *Costruire un triangolo conoscendone l'altezza ed i due lati adiacenti.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 18).

Risoluzione. — Sia h l'altezza, e sieno d e b i lati adiacenti del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si prenda un punto qualunque D, e si innalzi una perpendicolare $DC = h$. Facciasi centro in C e dapprima con un raggio eguale a d e poscia con un raggio eguale a b si descrivano due archi, che taglieranno la retta indefinita nei due punti A e B. Si tirino le rette C A, C B ed il triangolo risultante A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C ha l'altezza $CD = h$, il lato $CA = d$, il lato $CB = b$ per costruzione, epperciò risolve il problema.

16.° — *Costruire un triangolo conoscendone l'altezza e due angoli.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 19).

Risoluzione. — Sia h l'altezza, e sieno H e K i due angoli del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra di questa si prenda un punto qualunque D, e si innalzi una perpendicolare $DE = h$. Pel punto E si conduca una parallela alla retta indefinita e in un punto qualunque A di questa si formi un angolo eguale all'angolo dato H, di cui un lato taglierà la parallela nel punto C. Si formi in un altro punto qualunque G della retta indefinita un angolo eguale all'angolo K, e pel punto C si conduca una parallela alla retta che forma tale angolo. Risulterà un triangolo A B C, che sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti il triangolo A B C ha l'angolo $A = H$ per costruzione, gli angoli B, G, H eguali perchè corrispondenti, l'altezza $CF = DE = h$ altezza data; desso dunque risolve il problema.

17.° — *Costruire un triangolo conoscendone due altezze e l'angolo opposto ad entrambe*

(Vedi Tavola VII, Fig. 20).

Risoluzione. — Sieno h ed h' le altezze, e sia H l'angolo opposto del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita, e sopra questa si prenda un punto qualunque A e si formi un angolo eguale all'angolo dato H; si innalzi quindi alla retta indefinita in un punto qualunque D della medesima una perpendicolare $DE = h$, e per E si tiri una parallela alla A D, che taglierà la retta dell'angolo nel punto C; s'innalzi in seguito in un punto qualunque F della retta A C una perpendicolare $FG = h'$, e pel punto G si conduca una parallela alla A C, che taglierà la A D in R; si tiri per ultimo la retta C R, chè il triangolo A C R così ottenuto risolve il problema.

Dimostrazione. — Se dal vertice C si abbassa la perpendicolare C H e dal vertice R la perpendicolare R I sulle rispettive basi, si vedrà tosto che il triangolo A R C ha l'angolo $A = H$ per costruzione, l'altezza $CH = ED = h$, l'altezza $RI = GF = h'$, e che in conseguenza è il triangolo domandato.

18.° — *Costruire un triangolo conoscendone il perimetro e due angoli.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 21).

Risoluzione. — Sia *h* il perimetro ed H e K i due angoli del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e si porti su di essa una distanza A B = *h;* si formi in A un angolo eguale all'angolo H, ed in B un angolo eguale all'angolo K; si dividano quindi ciascuno di questi due angoli per metà, e dal punto C d' incontro delle bisettrici si tirino le rette C G e C H rispettivamente parallele alle rette formanti gli angoli dati: il triangolo G H C sarà il richiesto.

Dimostrazione. — La retta A C essendo la bisettrice dell'angolo A, ed essendo la retta C G parallela al lato dell'angolo H, ne segue che l' angolo A C G = C A G, epperciò il triangolo A G C isoscele ed il lato A G = G C. Per le stesse ragioni il triangolo C H B è isoscele e quindi C H = H B.

Il triangolo G H C soddisferà alla condizione del problema, inquantochè il perimetro o somma dei suoi lati C G + G H + H C si trasforma in quest'altra espressione sua eguale A G + G H + H B = A B = *h* perimetro dato; e gli angoli G ed A, H e B sono rispettivamente eguali siccome corrispondenti.

19.° — *Costruire un triangolo rettangolo conoscendone l' ipotenusa e la somma dei due cateti.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 22).

Risoluzione. — Sia *s* la somma dei due cateti e sia *p* l' ipotenusa del triangolo rettangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e su questa si prenda una distanza F B = *s* somma dei due cateti; si formi quindi in F un angolo semiretto, cioè di 45°, e facendo centro in B con raggio eguale alla ipotenusa *p* descrivasi un arco che taglierà la retta F E nei due punti C ed E. Dal punto C e dal punto E si abbassino sulla retta F B due perpendicolari; si tirino le rette C B, E B, ed i triangoli risultanti A C B, D E B risolveranno il problema.

Dimostrazione. — Il triangolo A C B risolve il problema, poichè in esso riscontrasi: che l'angolo A è retto stante la perpendicolarità tra loro delle rette A C, A B; che il lato C B è eguale per costruzione all'ipotenusa data *p;* che infine la somma dei lati o cateti C A, A B risponde alla lunghezza data $s = F B$ essendo $A C = A F$, come è facile a dimostrarsi ove si consideri che il triangolo A G F, avendo l' angolo A retto e l' angolo F di 45°, è rettangolo ed isoscele al tempo stesso.

Il triangolo D B E risolve altresì il problema, poichè egli è pure rettangolo ed ha l' ipotenusa $B E = p$ e la somma dei due cateti $E D + D B = F D + D B = F B = s$ somma data per la ragione d'isoscelismo del triangolo rettangolo F D E.

Discussione. — I due triangoli A B C, D B E non solo risolvono ambedue il problema, ma sono ben'anco eguali tra loro. Per dimostrare l'eguaglianza di questi triangoli basterà dimostrare l'eguaguaglianza di due dei loro elementi, tali che uno di essi non sia conseguenza dell' altro; così avendo i triangoli in parola l'ipotenusa $C B = B E$, basterà dimostrare che essi hanno eziandio un angolo acuto eguale, perchè risulti provata la loro eguaglianza. Ciò posto, considerando il triangolo C B E, si vede tosto che egli è isoscele, e che perciò l'angolo $B C E = B E C$. Se a ciascuno di questi due angoli si leva un angolo di 45°, i resti sono ancora eguali, cioè l'angolo $G C B = G E B$; ma l'angolo G C B è alterno interno dell' angolo C B A, vorrà quindi dire che l' angolo acuto C B A del triangolo rettangolo A B C è eguale all'angolo acuto D E B del triangolo rettangolo D B E; epperciò questi due triangoli sono eguali.

20.° — *Costruire un triangolo conoscendo l' ipotenusa rettangolo e la differenza dei due cateti.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 23).

Risoluzione. — Sia *p* l' ipotenusa e sia *d* la differenza dei due cateti del triangolo rettangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si porti una distanza $D B = d$; si formi quindi un angolo A D C di 45°, e facendo centro in B con raggio eguale alla ipotenusa *p* si tagli la retta D C in C, e per questo punto si abbassi una perpendicolare C A : il triangolo rettangolo C A B sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti si ha che il triangolo A B C è rettangolo, poichè C A è perpendicolare ad A B per costruzione; che la sua ipotenusa è uguale a quella data p pure per costruzione; che la differenza fra i suoi cateti A B, A C è D B, poichè il triangolo A D C è isoscele e quindi A C $=$ A D; che per tutte queste ragioni esso risolve il problema.

21.° — *Costruire un triangolo conoscendone la base, l'angolo opposto e la somma degli altri due lati.*

(Vedi Tavola VII, Fig. 24).

Risoluzione. — Sia b la base, H l'angolo opposto ed s la somma dei due lati che comprendono l'angolo dato nel triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra questa si prenda una distanza F B $= s$; nel punto F si formi un angolo che sia la metà dell'angolo dato, e facendo centro in B con raggio eguale alla base data b si descriva un arco di circolo, che taglierà la retta F E nei due punti C ed E. Si formi dipoi un angolo F C A $=$ A F C, e pel punto E si tiri una parallela alla C A. I due triangoli A C B, D B E risolvono il problema.

Dimostrazione. — Siccome l'angolo esterno di un triangolo è eguale alla somma dei due interni ed opposti, così l'angolo B A C è eguale ad A F C $+$ F C A, e siccome questi sono eguali tra loro ed eguali alla metà dell'angolo H, così l'angolo B A C è eguale ad H. La base B C del triangolo A B C è eguale alla base data b per costruzione, e la somma dei due lati A B $+$ A C è eguale ad A B $+$ A F $=$ F B $= s$, e ciò a motivo dell'isoscelismo del triangolo F A C. Il triangolo A B C risponde dunque al quesito.

Considerando il triangolo D B C si vede che ha la base B E $= b$ per costruzione, gli angoli B D E, B A C eguali perchè corrispondenti ed eguali ad H, e la somma dei due lati D B $+$ D E $=$ D B $+$ D F $=$ F B $= s$, e ciò per essere il triangolo F D E isoscele. Per conseguenza anche il triangolo D B C risolve la domanda del problema.

Discussione. — I due triangoli A B C, D B E, oltre al risolvere entrambi il problema, sono anche eguali tra loro. Infatti hanno il lato B C $=$ B E per costruzione, gli angoli B A C, B D E uguali perchè corrispondenti, e l'angolo A B C $=$ D E B, poichè avendosi

B C E = B E C e tirando C O parallela ad A B, risulta che il triangolo C O E è isoscele (stante che O C E = D F E = C E D) e quindi che B C E — E C O = B E C — C E O, ossia O E B = O C B = C B A per essere i due ultimi alterni interni.

22.° — *Costruire un triangolo conoscendone la base, l'angolo opposto e la differenza degli altri due lati.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 25).

Risoluzione. — Sia *b* la base, H l'angolo opposto e *d* la differenza degli altri due lati del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra questa si prenda una distanza D B = *d;* si formi quindi un angolo A D C eguale alla metà del supplemento dell'angolo dato H, e facendo centro in B con raggio *b* si descriva un arco, che taglierà la retta B C nel punto C. Si formi un angolo D C A = A D C ed il triangolo risultante A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — L'angolo D A C sarà il supplemento della somma dei due angoli A D C + D C A; ma siccome ciascuno di questi è la metà del supplemento dell' angolo H, vorrà dire che l' angolo D A C sarà eguale all'angolo H. Ora il triangolo A B C avendo l'angolo A = H, la base B C = *b*, e la differenza dei suoi due lati B A, A C essendo D B per la ragione che A C è eguale ad A D per l'isoscelismo del triangolo A D C, sarà quel triangolo che risolverà il problema.

23.° — *Costruire un triangolo rettangolo isoscele che abbia i suoi vertici su tre date parallele.*

(Vedi Tavola VIII, fig. 26).

Risoluzione. — Siano D E, P G, H I le tre rette parallele, sulle quali si devono trovare i vertici del triangolo rettangolo isoscele da costruirsi.

Si innalzi una perpendicolare comune alle tre parallele e sia questa L C O; si porti una distanza L A = C O ed una distanza O B = C L; si tirino le rette A C, C B, A B ed il triangolo A B C sarà rettangolo ed isoscele.

Dimostrazione. — Essendo O L perpendicolare alle tre parallele, i triangoli C L A, C O B sono rettangoli ed eguali, perchè hanno i cateti C L = O B, L A = C O; epperciò le ipotenuse C A, C B sono eguali, ed il triangolo A B C è isoscele. Ma siccome l'angolo L C A è eguale a C B O e la somma O C B + C B O equivale ad un angolo retto, così anche la somma L C A + O C B equivarrà ad un retto, e di conseguenza A C B dovrà essere retto, ed il triangolo A B C rettangolo.

24.° — *Collocare un triangolo, di cui sono dati i lati, in modo che i suoi vertici si trovino rispettivamente sopra tre rette date, delle quali due sono parallele fra loro.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 27).

Risoluzione. — Sieno *a, b, c,* i tre lati dati del triangolo da costruirsi, e sieno A B, C D, E F le rette date, di cui due, A B, C D, sono parallele.

Si faccia centro in un punto qualunque G della retta A B, e con raggio eguale prima ad *a* si descriva un arco che tagli la retta C D nel punto H, poscia con raggio eguale a *c* un arco da tagliarsi nel punto I con un secondo arco descritto con raggio eguale a *b* facendo centro in H. Si tiri pel punto I una retta parallela alla A B, e nel punto R d'incontro colla retta E F si conducano le rette R T parallela ad I G, R P parallela ad I H, e P T parallela ad H G. Il triangolo R P T sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti, essendo R T parallela ad I G e R I parallela a T G, e le rette parallele comprese fra parallele essendo tra loro eguali, sarà R T = I G = *c*, e per la stessa ragione R P = I H = *b* e T P = G H = *a;* e quindi il triangolo P R T avendo i tre vertici sulle tre dette date ed i lati eguali ai lati dati risolve il problema.

25.° — *Costruire un triangolo isoscele conoscendone la base e l'angolo opposto.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 28).

Risoluzione. — Sia *b* la base data ed H l'angolo dato del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B $=b$, e nei punti A e B si formi un angolo eguale alla metà del supplemento dell'angolo dato; il triangolo risultante risponderà al problema.

Dimostrazione. — La somma dei tre angoli di un triangolo facendo due angoli retti, e gli angoli A e B essendo ciascuno la metà del supplemento dell'angolo H, la loro somma farà il supplemento dell'angolo H; epperciò l'angolo C deve essere eguale ad H ed il triangolo A B C è il domandato, stante che la base A B è eguale alla base b data per costruzione.

26.° — *Costruire un quadrato conoscendone la somma del lato colla diagonale.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 29).

Risoluzione. — Sia s la somma del lato colla diagonale di un quadrato da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si prenda una distanza E C $=s$; si formi nel punto E un angolo C E D che sia la quarta parte di un angolo retto, nel punto C un angolo E C D di 45°, e nel punto D così ottenuto un angolo C D A retto. Per il punto A si tiri una retta parallela alla D C e pel punto C una parallela alla D A. Il quadrato risultante A B C D sarà il domandato.

Dimostrazione. — L'angolo C E D essendo eguale per costruzione ad un quarto di retto, l'angolo E C D alla metà di un retto, è chiaro che l'angolo C D E sarà eguale ad un retto più un quarto di retto, cioè l'angolo A D E $=$ A E D $=\frac{1}{4}$ R. Ora essendo il triangolo E A D isoscele, E A è uguale ad A D; epperciò A C $+$ A D $=$ A C $+$ A E $=$ C E $=s$, ed il quadrato A B C D è il domandato.

27.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone i quattro lati ed una diagonale.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 30).

Risoluzione. — Sieno a, b, c, e i lati e d la diagonale del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B = *a*. Si faccia centro in A e con raggio eguale alla diagonale *d* si descriva un arco, che verrà tagliato in D da un secondo arco descritto con raggio eguale al lato *b* e facendo centro in B. Si faccia quindi centro prima in D e poscia in A, e con raggi rispettivamente uguali ai lati *c* ed *e* si descrivano due archi, che si taglieranno in C. Si tirino le rette A C, C D, D B, ed il quadrilatero A B D C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Il quadrilatero A B D C avendo per costruzione i quattro lati eguali ai quattro lati dati ed avendo la diagonale A D eguale alla diagonale data *d*, evidentemente risolve il problema.

Discussione. — Egli è evidente che se, tirata la retta A B = *a*, si fosse fatto centro in B e con un raggio eguale alla diagonale *d* si fosse descritto un arco che venisse a tagliarne un secondo descritto con centro in A e con raggio eguale al lato *b*, e dal punto ottenuto B si fossero descritti altri due archi con raggi rispettivamente eguali agli altri due lati dati *c* ed *e*, si sarebbe ottenuto un quadrilatero che egualmente avrebbe risolto il problema, e di più sarebbe stato simmetrico al quadrilatero A B C D, come non è difficile rilevarlo dalla figura.

Parimenti, se si considera che non v' ha ragione alcuna di prendere prima un lato piuttosto di un altro, non si tarderà a scoprire che, essendo dati i quattro lati e una diagonale di un quadrilatero, si possono ancora costruire, oltre ai due già spiegati, altri 10 quadrilateri, cinque dei quali simmetrici agli altri cinque.

28.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone tre lati e due diagonali.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 31).

Risoluzione. — Sieno *a*, *b*, *c* i tre lati e *d*, *d'* le diagonali del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B = *a*. Si faccia centro prima in A e con raggio eguale a *d'* si descriva un arco, quindi in B e con raggio eguale al lato *c* si descriva un altro arco, che taglierà il primo nel punto D. Si faccia centro di nuovo prima in A, e con raggio eguale al lato *b*, si descriva pure un arco, poi con centro in B e con raggio *d* un altro arco, che

taglierà il precedente nel punto C. Si tirino le rette A C, C D, D B, ed il quadrilatero A B C D risultante sarà il domandato.

Dimostrazione. — Il quadrilatero A B C D avendo i lati A B, B D, A C e le diagonali B C, A D uguali rispettivamente ad *a*, *b*, *c*, *d*, *d'* per costruzione, risolve senza dubbio il problema.

29.° — *Costruire un quadrilatero di cui si conoscano quattro lati ed un angolo.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 32).

Risoluzione. — Siano *a*, *b*, *c*, *d* i lati ed H un angolo del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra di essa si prenda una distanza A B = *a*. Nel punto A di questa retta si formi un angolo eguale all'angolo dato H, e si porti sul suo lato non comune ad A B una distanza A C = *b*. Si faccia quindi centro prima in C e poscia in B, e con raggi rispettivamente uguali ai lati *c* e *d* si descrivano due archi, che si taglieranno nel punto D. Si tirino le rette B D, C D ed il quadrilatero ottenuto sarà il domandato.

Dimostrazione. — Essendo per costruzione A = H, A B = *a*, A C = *b*, C D = *c*, D B = *d*, il quadrilatero A B C D risolve il problema.

30.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone tre lati e due angoli adiacenti allo stesso lato.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 33).

Risoluzione. — Siano *a*, *b*, *c* i tre lati e H, K gli angoli dati del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B = *a*. Si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo dato H, ed in B un angolo eguale all'angolo K. Si porti sui lati degli angoli non comuni ad A B una distanza A C = *b* ed una B D = *c*. Tirata la retta C D, il quadrilatero ottenuto A B C D sarà il domandato.

Dimostrazione. — Essendo per costruzione A B = *a*, A C = *b*, B D = *c* e l'angolo A = H, l'angolo B = K, il quadrilatero A B C D risolve il problema.

31.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone due lati e tre angoli.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 34).

Risoluzione. — Siano *a* e *b* i lati dati e sieno L, K ed H gli angoli pure dati del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B $=$ *a*. Si formi in A un angolo eguale all'angolo dato H ed in B un angolo eguale all'angolo pure dato K, e si porti sul lato dell'angolo H non comune ad A B la distanza A C $=$ *b*. Nel punto C si formi un angolo eguale all'angolo dato L, ed il quadrilatero A B C D risultante sarà il domandato.

Dimostrazione. — Per costruzione essendo il lato A B $=$ *a*, il lato A C $=$ *b*, l'angolo A $=$ H, l'angolo B $=$ K e l'angolo C $=$ L, il quadrilatero A B C D risponderà al problema.

32.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone tre lati, un angolo ed una diagonale.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 35).

Risoluzione. — Sieno *a*, *b*, *c* i tre lati dati, *d* la diagonale data ed H l'angolo dato del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B $=$ *a*. Si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo dato H, sul lato di quest'angolo non comune ad A B si porti una distanza A C $=$ *b*. Si faccia centro in A e con raggio eguale della diagonale *d* si descriva un arco, poscia si faccia centro in B e con raggio eguale al lato *c* si descriva un altro arco, che taglierà il primo nel punto D. Tirate le rette B D, D C, il quadrilatero A B C D sarà il domandato.

Dimostrazione. — Essendo per costruzione il lato A B $=$ *a*, il lato A C $=$ *b*, il lato B D $=$ *c*, l'angolo A $=$ H, e la diagonale A D $=$ *d*, il quadrilatero A B C D è effettivamente il domandato.

33.° — *Costruire un quadrilatero conoscendone i quattro lati e sapendo che due di essi sono eguali, e che la somma degli angoli opposti del quadrilatero è eguale a due angoli retti.*

(Vedi Tavola VIII, Fig. 36).

Risoluzione. — Sieno *a*, *b*, *c*, *c* i quattro lati del quadrilatero da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra questa si porti una distanza A B $= a$ ed una distanza B G $= b$. Pel punto di mezzo H della retta A G si innalzi una perpendicolare, e facendo centro in B e con raggio eguale ad uno dei lati eguali *c*, si descriva un arco, che taglierà la perpendicolare nel punto C. Si faccia quindi centro prima in C e con raggio eguale a *c* si descriva un arco, poscia in A e con raggio eguale a *b* un altro arco, che taglierà il precedente in D. Tirate le rette A D, D C, C B, il quadrilatero A B C D sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti si ha che A B $= a$, B C $= c$, C D $= c$, D A $= b$ per costruzione; e se si considera che il triangolo B G C è eguale al triangolo A C D per essere B G $= b =$ A D, B C $= c =$ C D, C G $=$ A C perchè il triangolo A G C è isoscele, si vedrà tosto che l'angolo D è eguale all'angolo G B C, e poichè G B C $+$ C B A equivale a 2 angoli retti, la somma A B C $+$ A D C $= 2$ retti.

34.° — *Costruire un trapezio conoscendone i quattro lati.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 37).

Risoluzione. — Sieno *a* e *c* i lati paralleli e *b* e *d* gli altri due lati del trapezio da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra di essa si prenda una distanza A B $= a$, ed a partire da A si porti una distanza A E $= c$. Si faccia centro prima in E, e con raggio eguale a *b* si descriva un arco, poscia in B e con raggio eguale a *d* si descriva un altro arco, che taglierà il precedente nel punto D. Per il punto D si conduca una parallela alla A B, e per il punto A una parallela alla E D. Unendo con una retta i punti D e B, il trapezio A B C D risultante sarà il domandato.

Dimostrazione. — Infatti, essendo A B $=$ *a*, A C $=$ E D $=$ *b*, C D $=$ A E $=$ *c*, B D $=$ *d* e C D parallelo ad A B per costruzione, il quadrilatero A B C D è il trapezio che soddisfa alle condizioni del problema.

35.° — *Costruire un trapezio conoscendone tre lati ed una diagonale.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 38).

Risoluzione. — Sieno *a*, *b*, *c*, i tre lati e *d* la diagonale del trapezio da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sopra di essa si prenda una distanza A B $=$ *a*. Si faccia centro in A, e con raggio eguale alla diagonale data *d* si descriva un arco, poscia in B, e con raggio uguale a *c* si descriva un altro arco, che taglierà il primo in C. Per questo punto C si conduca una parallela alla retta A B, e si prenda sulla medesima una distanza C D $=$ *b*. Tirando le rette D A e C B, il quadrilatero A B C D sarà il trapezio domandato.

Dimostrazione. — Il quadrilatero A B C D avendo i due lati A B, C D paralleli è un trapezio; inoltre avendo il lato A B $=$ *a*, il lato C D $=$ *b* e il lato C B $=$ *c* per costruzione, esso è appunto quel trapezio che risolve il problema proposto.

36.° — *Costruire un trapezio conoscendone tre lati ed un angolo.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 39).

Risoluzione. — Sieno *a*, *b*, *c* i tre lati dati ed H l'angolo dato del trapezio da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e su di essa si prenda una distanza A B $=$ *a*. Si formi nel punto A un angolo eguale all'angolo H e sul lato di quest'angolo non comune ad A B si porti una distanza A C $=$ *c*. Pel punto C si meni una parallela alla retta A B di lunghezza C D $=$ *b*. Tirando la retta D B, il quadrilatero A B C D sarà il domandato.

Dimostrazione. — Essendo C D parallelo ad A B, il quadrilatero A B C D è un trapezio. Questo trapezio ha il lato A B $=$ *a*, il lato A C $=$ *c*, il lato C D $=$ *b* e l'angolo A $=$ H per costruzione, dunque desso è quel trapezio che soddisfa al problema.

37.° — *Costruire un trapezio conoscendone due lati e due angoli.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 40).

Risoluzione. — Sieno a e b i due lati, ed H e K i due angoli del trapezio da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e su di essa si prenda una distanza A B $= a$. Si formi nel punto A un angolo eguale all' angolo dato H, e nel punto B un angolo eguale all'angolo dato K. Si porti sul lato dell' angolo H non comune ad A B una distanza A C $= b$, e pel punto C si meni una parallela alla retta A B. Il quadrilatero A B C D sarà il trapezio domandato.

Dimostrazione. — Essendo C D parallela per costruzione ad A B, il quadrilatero A B C D è un trapezio. Questo trapezio ha A B $= a$, A C $= b$ per costruzione, l'angolo A = H e l'angolo B = K pure per costruzione; perciò risolve il problema.

38.° — *Costruire un parallelogramma conoscendone le diagonali ed un lato.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 41).

Risoluzione. — Sieno d e d' le diagonali date e sia l il lato dato del parallelogramma da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e sovra di essa si prenda una distanza A B $= l$. Facendo centro prima in A e poi in B, si descrivano con raggi rispettivamente eguali alla metà delle diagonali d, d' due archi, che si taglieranno nel punto O. Si tirino le rette A O, B O, e si prolunghino di lunghezze eguali, cioè si faccia O C = O A, O B = O D. Condotte le rette C D, C B, D A, il quadrilatero A B C D risultante sarà il parallelogramma domandato.

Dimostrazione. — I due triangoli A O B, D O C avendo gli angoli in O eguali perchè opposti al vertice, il lato A O = O C, il lato B O = O D per costruzione, sono eguali, ed in conseguenza il lato D C è eguale al lato A B. Parimente, considerando i due triangoli A O D e B O C, si vede per le stesse ragioni che essi sono eguali, e quindi che A D = B C. Ma il quadrilatero A B C D avendo i lati opposti eguali, è un parallegramma. Ma in questo parallelo-

gramma essendo il lato A B $= l$, e le diagonali A C $= d$ e B D $= d'$, è chiaro che desso risolve il problema.

Discussione. — Egli è evidente che se dopo aver tirato A B $= l$ si fosse fatto centro in B, e con raggio B O eguale alla metà della diagonale d si fosse descritto un arco tagliato di poi da un secondo arco descritto con centro in A e con raggio eguale alla metà di d', tirate di poi le rette dai punti A e B al punto di intersezione e prolungate di quantità eguali, si sarebbe ottenuto un parallelogramma eguale al parallelogramma A B C D, ma che sarebbe stato simmetrico a questo e avrebbe pure risolto il problema. La linea di simmetria sarebbe stata una perpendicolare alla base A B.

39.° — *Per un dato punto tirare una secante a due parallele, sicchè la lunghezza intercetta fra queste sia una data.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 42).

Risoluzione. — Sia P il punto dato dal quale si debba tirare una secante alle due parallele A B, C D per modo che la lunghezza intercetta tra queste parallele sia eguale alla retta data m.

Si faccia centro in un punto qualunque E della retta A B, e con raggio eguale ad m si descriva un arco di circolo, che taglierà la retta C D nei due punti F e G. Si tirino le rette E F, E G, e per il punto P dato si conducano delle parallele a queste rette, che saranno le secanti domandate.

Dimostrazione. — Essendochè le parallele comprese fra parallele sono eguali, sarà T Q $=$ E G $= m$, S R $=$ E F $= m$, e qualunque delle due secanti P Q, P R risolverà il problema.

40.° — *Per un punto dato condurre a due parallele date una secante tale, che la somma delle lunghezze comprese fra il punto dato ed i punti in cui la secante taglia le parallele, sia di una lunghezza data.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 43).

Risoluzione. — Sia P il punto dato, dal quale si debba tirare una secante alle due parallele A B, C D, per modo che la somma

delle distanze dal punto P ai punti in cui la secante taglierebbe le due parallele sia eguale alla lunghezza data *s*.

Si tiri una parallela E F alla retta A B e distante da questa di una distanza eguale alla distanza dal punto P alla retta C D, distanza che si misura colla perpendicolare abbassata dal punto P sulla retta C D. Si faccia centro nel punto P, e con raggio eguale alla retta *s* si descriva un arco che taglierà la parallela E F nei due punti G ed H. Si tirino le rette P G e P H, che saranno le secanti domandate.

Dimostrazione. — Essendo P T = I G, P S = K H siccome porzioni di secante comprese fra parallele, ne segue che sarà P I + P T = P G = *s*, P K + P S = P H = *s* per costruzione; e perciò qualunque delle due secanti P I e P K risolverà il problema.

41.° — *Dato un angolo ed un punto sopra un lato di esso, trovare sul lato stesso un altro punto equidistante dal punto dato e dall'altro lato dell'angolo.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 44).

Risoluzione. — Sia B A C l'angolo dato, e sia P il punto dato sul lato B A sul quale si tratta di trovare un secondo punto, che disti egualmente dal punto P e dal lato A C dell'angolo.

Nel punto P si innalzi una perpendicolare al lato A B, che incontrerà il lato A C nel punto Q. Si divida in due parti eguali l'angolo P Q A ed il punto in cui la bisettrice incontrerà il lato A B sarà il punto domandato.

Dimostrazione. — È proprietà della bisettrice di un angolo che tutti i suoi punti distanno egualmente dai due lati dell'angolo, cosicchè il punto X distarrà egualmente dai lati Q P e Q A dell'angolo P Q A, cioè abbassando dal punto X una perpendicolare sul lato A C, questa perpendicolare X T sarà eguale alla distanza X P pure perpendicolare per costruzione a P Q. Dunque la perpendicolare X T segnando la distanza che esiste dal punto X al lato A C, ed essendo X T = X P, il punto X risolve il problema.

42.° — *Segnare la bisettrice dell' angolo da due rette che non s' incontrano sul disegno.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 45).

Risoluzione 1.ª — Sieno A B, C D due rette ad angolo che non si possono prolungare, e sia proposto di segnare la bisettrice del loro angolo.

In un punto qualunque F della retta C D si innalzi una perpendicolare alla retta stessa e in un altro punto qualunque E della retta A B una perpendicolare pure alla retta. Si porti quindi su queste perpendicolari una distanza F I = E G, F K = E H. Per i punti I e K si conducano due parallele alla retta C D, e pei punti G ed H due parallele alla retta A B. I punti O e P d' incontro delle parallele saranno due punti della bisettrice, epperciò la retta O P sarà la bisettrice domandata.

Dimostrazione. — Il punto P trovandosi sulla parallela condotta dal punto G alla retta A B, distarrà da questa di una quantità eguale ad E G; e trovandosi il punto P contemporaneamente sulla parallela condotta dal punto I alla retta C D, distarrà da questa di una quantità eguale ad F I; ma essendo per costruzione E G = F I, il punto P distarrà egualmente dalla retta A B e dalla retta C D, e quindi sarà un punto della bisettrice richiesta.

Con identico ragionamento essendo facile dimostrare che il punto O è egualmente distante dalle due rette A B e C D, rimarrà evidente che la retta P O è bisettrice dell' angolo formato dalle due rette A B, C D.

(Vedi Tavola IX, Fig. 46).

Risoluzione 2.ª — Siano A B e C D le due rette ad angolo, di cui è proposto segnare la bisettrice.

Si tiri una retta qualunque E F che tagli le due rette date A B e C D, e quindi si dividano per metà i quattro angoli A E F, C F E, B E F, D F E (operazione che si può eseguire dividendo i due primi per metà ed innalzando delle perpendicolari alle bisettrici, che divideranno gli altri due angoli per metà). Si uniscano i punti P ed O d' incontro delle bisettrici con una retta, che sarà la bisettrice richiesta.

Dimostrazione. — Il punto P trovandosi contemporaneamente sulla bisettrice dell' angolo A E F e su quella dell' angolo C F E, distarrà egualmente dalle rette E A, E F, C F; onde sarà anche un punto della bisettrice dell'angolo delle due rette A B, C D.

Parimenti il punto O trovandosi contemporaneamente sulle bisettrici degli angoli B E F, D F E, sarà esso pure un punto della bisettrice suddetta. Dunque la retta P O sarà la bisettrice domandata.

43.° — *Costruire un quadrato di lato dato che abbia i vertici sui lati di un altro quadrato dato.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 47).

Risoluzione. — Sia A B C D il quadrato dato, sui lati del quale si debbano trovare i vertici di un altro quadrato di lato dato l da costruirsi.

Si tirino le diagonali nel quadrato A B C D, che si taglieranno nel centro O; si porti quindi sui lati A B ed A D una distanza A E $=$ A G $= l$, e si tiri la retta G E, che taglierà la diagonale A C nel punto F. Facendo centro nel centro O e còn raggio eguale ad F G si taglino i quattro lati del quadrato nei punti K, I, H ed L. Tirate le rette I K, K L, L H, H I, la figura L H I K è il quadrato domandato.

Dimostrazione. — La figura L H I K ha per costruzione i vertici sui lati del quadrato A B C D. Trovandosi il punto O, come centro del quadrato A B C D, egualmente distante dai quattro lati A B, B C, C D, D A, ogni secante condotta per esso a due di questi lati paralleli resterà divisa per metà in esso punto medesimo, e reciprocamente i punti d' intersezione di archi descritti collo stesso raggio e con centro in O con due di quei lati paralleli, si troveranno col punto O sulla medesima retta. Conducendo dunque le diagonali K H, I L, esse passeranno pel centro O. Ciò posto, il triangolo K I H risulta per costruzione tale che O H $=$ O K $=$ O I, ed in conseguenza l'angolo K I H è retto. Per le stesse ragioni si dimostra che gli angoli I K L, K L H, L H I sono retti. Quindi la figura L H I K non può essere altro che o un quadrato od un rettangolo. Ma la retta G E essendo eguale, per la fatta costruzione alla diagonale di un quadrato di lato l, ed avendo preso O K $=$

O I = O H = O L = F G = $\frac{GE}{2}$, ne segue che il quadrilatero L H I X è un quadrato di lato *l*. Dunque questo quadrato è il richiesto.

Discussione. — Dall'ispezione della figura non sarà difficile di vedere che ove il lato dato sia eguale al lato del quadrato dato, il quadrato domandato coinciderà col quadrato dato e sarà, per conseguenza, il massimo dei quadrati rispondenti al problema. Parimenti se il lato dato è eguale alla metà della diagonale del quadrato dato, il quadrato domandato avrà i suoi vertici sulla metà dei lati del quadrato dato, e sarà il minimo dei quadrati rispondenti al problema.

Perchè adunque si possa costrurre un quadrato di lato dato per modo che i suoi vertici si trovino sui lati di un altro quadrato dato, è necessario che il lato dato del quadrato da costruirsi sia maggiore della metà della diagonale e minore del lato del quadrato dato.

44.° — *Costrurre un triangolo equilatero di lato dato che abbia i vertici sui lati di un altro triangolo equilatero dato.*

(Vedi Tavola IX, Fig. 48).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo equilatero dato, e sia *l* il lato del triangolo equilatero da costruirsi, per modo che i suoi vertici si trovino sui lati del primo.

Si dividano gli angoli A e B del triangolo equilatero A B C in due parti eguali, e si unisca il punto d'incontro O delle bisettrici col vertice C. Si porti sul lato A B una distanza A G = *l*, e pel punto G si meni una parallela alla B O, che taglierà A O in H. Si faccia centro in O e con raggio eguale ad H A si taglino i tre lati del triangolo equilatero A B C nei tre punti D, E, F. Si tirino le rette D E, E F, F D ed il triangolo D E F sarà il domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo D E F ha per costruzione i vertici sui tre lati del triangolo A B C. Inoltre, avendo diviso gli angoli del triangolo equilatero dato per metà, i triangoli A O B, B O C, C O A sono eguali tra loro, epperciò l' angolo O B A = O C B. Considerando i due triangoli O D B e O C E, che hanno il lato O B = O C, O E = O D per costruzione e l'angolo O B A

= O C B, si vede che sono eguali, epperciò B D = C E. Considerando ancora i due triangoli D B E, C F E, che hanno l'angolo B = C, il lato B D = C E, il lato C F = B E, risulta pure che essi sono eguali, e che quindi D E = F E. Parimente, considerando i triangoli A F D, F E C, si ha che F D = F E. Dunque il triangolo D E F ha i tre lati eguali. Inoltre essendosi tirata H G parallela a B O, risulta che il triangolo A H G è isoscele, come lo è il triangolo A O B, e quindi che l'angolo A H G = A O B. Di più, siccome il triangolo A O B è stato dimostrato eguale al triangolo B O C ed il triangolo D O B eguale al triangolo E O C, può inferirsene che anche il triangolo A O D è uguale al triangolo B O E, e perciò che l'angolo A O D = B O E ed il lato O D = O E. Da ciò è dato rilevare altresì che l' angolo A O B = D O E, poichè entrambi questi angoli sono la differenza tra il medesimo angolo A O E ed uno degli angoli eguali A O D, B O E. Or quindi considerando i due triangoli A H G, D O E, si vede che sono isosceli ed eguali, sendochè O D = O E = H A = H G e l' angolo A H G = D O E; d' onde il lato A G = D E; ma poichè A G = l anche D E = l ed il triangolo equilatero D E F ha per lato l, e conseguentemente è il richiesto.

45.° — *Costrurre un rettangolo che abbia i vertici sui lati d'un altro rettangolo dato ed una posizione determinata.*

(Vedi Tavola X, Fig. 49).

Risoluzione. — Sia A B C D il rettangolo sui cui lati si debbano trovare i vertici di un altro rettangolo da costruirsi, per modo che uno di essi vertici cada nel punto P sul lato A D.

Si porti sul lato opposto B C, ed a partire dal punto B la distanza B R = D P. Si tiri la retta P R, e facendo centro nel punto di mezzo O si descriva con raggio O P una circonferenza che taglierà i lati del rettangolo A B C D nei punti S, Q, S' e Q'. Si tirino le rette P S, P Q, Q R, R S, P Q', Q' R, R S', S' P, ed i due rettangoli risultanti P S R Q, P Q' R S' risponderanno al problema.

Dimostrazione. — Avendosi O S = O P = O R = O Q, gli angoli P S R, Q R S, R Q P, Q P S sono retti; quindi la figura P S R Q è un rettangolo. Analogo ragionamento dimostra che la figura P Q' R S' è pure un rettangolo. Perciò qualunque dei due rettangoli P S R Q, P Q' R S' risponde al problema.

46.° — *Trovare la via più breve fra due punti toccando per strada una retta data.*

(Vedi Tavola X, Fig. 50).

Risoluzione. — Siano M ed N i due punti dati ed A B la retta data.

Dal punto M si abbassi una perpendicolare sulla retta A B, e la si prolunghi al di sotto di questa di una quantità eguale, cioè di D E $=$ M D. Si tiri la retta N E, ed il punto C in cui tale retta taglia la A B sarà il punto cercato, cioè tale che unito coi punti dati M ed N, la somma delle rette M C $+$ C N sarà la minore possibile.

Dimostrazione. — Dimostrando che prendendo un punto C' a sinistra del punto C ed un punto C'' a destra, e unendo ciascuno di questi coi punti dati M ed N, le somme M C' $+$ C' N, M C'' $+$ C'' N sono maggiori di M C $+$ C N, rimarrà anche dimostrata esatta l'indicata risoluzione.

1.° Per il punto C' si ha che tirando C' E, questa retta risulta eguale a C' M per la ragione che D M $=$ D E e D C' perpendicolare ad M E, onde la lunghezza M C' $+$ C' N si ridurrà a C' E $+$ C' N. Ma la lunghezza M C $+$ C N si riduce ad E C $+$ C N, e questa somma a tutto E N; quindi si ha a considerare un triangolo, di cui un lato rappresenta la somma M C $+$ C N e gli altri due insieme la somma M C' $+$ C' N; e siccome in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due, così resta dimostrato che E N $<$ E C' $+$ C' N, ossia E C $+$ C N $<$ E C' $+$ C' N, ossia ancora M C $+$ C N $<$ M C' $+$ C' N.

2.° Per il punto C'' si ha allo stesso modo che tirando C'' E, questa risulta eguale C'' M, e che quindi M C'' $+$ C'' N $=$ E C'' $+$ C'' N. E siccome anche qui la questione si riduce ad un triangolo, che è il triangolo N E C'', è facile vedere che E N $<$ E C'' $+$ C'' N, ossia che E C $+$ C N $<$ E C'' $+$ C'' N, ossia ancora che M C $+$ C N $<$ M C'' $+$ C'' N. Dunque in ambedue i casi il più corto cammino è sempre M C $+$ C N.

Discussione. — Essendo il triangolo M C E isoscele, l'angolo M C D $=$ D C E, ed essendo uguali gli angoli D C E, B C N perchè

opposti al vertice, l'angolo formato dalla retta M C colla retta A B è identico all'angolo formato dalla retta N C colla stessa retta A B.

Osservazione. — Un raggio di luce diretto secondo M C su di uno specchio A B si riflette secondo CN, cioè facendo colla perpendicolare C O innalzata su A B un angolo M C O, detto d'*incidenza,* eguale all'angolo O C N, detto di *riflessione.*

Questa legge dell'eguaglianza dell'angolo d'incidenza coll'angolo di riflessione si verifica altresì pei corpi che vengono ad urtare in una qualunque direzione su di una superficie piana.

47.° — *Trovare la via più breve fra due punti toccando per strada due rette date.*

(Vedi Tavola X, Fig. 51).

Risoluzione. — Sieno P e Q i due punti ed A B, A C le due rette date.

Dal punto P si abbassi una perpendicolare sulla retta A C e la si prolunghi di una quantità D E = P D. Dal punto Q si abbassi una perpendicolare sopra la retta A B e si prolunghi essa pure di una quantità F G = F Q. Si tiri la retta G E e si uniscano il punto Q col punto S, il punto P col punto R.

La via più breve fra i due punti P e Q, toccando le rette A B, A C, è la linea Q S R P.

Dimostrazione. — I triangoli P R E, Q S G sono isosceli per costruzione, conseguentemente l'angolo C R P = C R E e l'angolo B S Q = B S G; e siccome C R E = A R S, B S G = A S R perchè opposti al vertice, anche (1) C R P = A R S e (2) B S Q = A S R. Ora a motivo della dimostrazione antecedente si ha che la più breve strada fra il punto P ed il punto S è la linea P R S, e la più breve strada fra il punto Q ed il punto R la linea Q S R. Dunque la linea P R S Q è la più breve strada fra i due punti P, Q, toccando le rette A C, A B.

Corollario. — Stante le uguaglianze (1) e (2) si verifica anche nella linea spezzata P R S Q che l'angolo di incidenza è eguale a quello di riflessione.

48.° — *Trovare la direzione in cui si deve muovere una palla di bigliardo onde arrivi a toccare un' altra palla di posizione data dopo avere percossa una, due, tre, quattro volte la sponda del bigliardo stesso.*

(Vedi Tavola X, Fig. 52).

Risoluzione 1.ª — Sia da trovarsi la direzione in cui si deve muovere la palla P del bigliardo A B C D, perchè dopo avere percossa la sponda A D del bigliardo arrivi a toccare la palla Q.

Sapendo che una palla urtando contro una sponda del bigliardo rimbalza facendo un angolo d' incidenza eguale a quello di riflessione (pur avvertendo di prendere in centro la palla nell' imprimerle il movimento), non si avrà a far altro, per ottenere l' intento, che l' applicazione del Problema 46.°, cioè immaginare abbassata sulla sponda A D una perpendicolare, e questa prolungata di una quantità E F eguale ad E P, quindi condotta una retta al punto F dalla palla Q; il punto G in cui questa viene ad incontrare la sponda A D sarà il punto su cui dovrà dirigersi la palla P, onde colpire con questa la palla Q.

Dimostrazione. — Essendo il triangolo G P F isoscele, gli angoli P G E, F G E sono uguali tra loro; e siccome gli angoli F G E, A G Q sono pure uguali tra loro perchè opposti al vertice, così si avrà P G E = A G Q, e tirando G O perpendicolare ad A D, anche P G O = Q G O, ossia l' angolo d' incidenza uguale all'angolo di riflessione.

(Vedi Tavola X, Fig. 53).

Risoluzione 2.° — Sia P la palla che si deve muovere perchè dopo avere percosse due sponde, ad esempio A D, B C, del bigliardo, venga a toccare la palla Q.

Si abbassi P E perpendicolare ad A D e la si prolunghi di una quantità E F = P E. Si abbassi pure la perpendicolare Q L e si prenda L I = L Q. Si tiri la retta I F, che determinerà i due punti G ed H in cui la palla P deve incontrare le sponde per venire a colpire la palla Q.

Dimostrazione. — Essendo i triangoli P F G, Q H I isosceli, si ha sempre che l'angolo P G E = E G F = A G H, L H Q = L H I =

C H G, cioè gli angoli d'incidenza eguali a quelli di riflessione (perchè quando gli angoli adiacenti alle rette A D, B C sono uguali, sono pure uguali gli angoli di incidenza e di riflessione P G O, H G O e G H O', Q H O', potendosi considerare le perpendicolari O G, O' H come bisettrici degli angoli intermedi P G H, G H Q).

(Vedi Tavola X, Fig. 54).

Risoluzione 3.ª — Sia P la palla che si debba muovere per venire a toccare la palla Q dopo aver percosso, ad esempio, le tre sponde A D, D C, C B del bigliardo.

Si abbassi sulla sponda A B la perpendicolare P E e la si prolunghi di una quantità E F = E P. Si abbassi pure una perpendicolare Q R sulla sponda B C e la si prolunghi di quantità R L = R Q. Dal punto L si abbassi una perpendicolare sulla sponda D C e la si prolunghi di K I = K L. Si tirino le rette I F, P G, L H, Q S; la linea P G H S Q sarà quella che dovrà percorrere la palla P per colpire la palla Q e toccare le tre sponde A D, D C, C B del bigliardo.

Dimostrazione. — Essendo il triangolo F P G isoscele, si ha l'angolo E G P = E G F = D G H. Parimenti pel triangolo isoscele L H I si ha l'angolo L H K = K H I = D H G, e pel triangolo isoscele Q S L, l'angolo Q S R = R S L = C S H. Da ciò si deduce anche qui che per la fatta costruzione gli angoli d'incidenza sono uguali agli angoli di riflessione, e conseguentemente che urtando la palla P nella direzione P G, essa rimbalzerà tre volte toccando le sponde A D, D C, C B e verrà a colpire la palla Q.

(Vedi Tavola X, Fig. 55).

Risoluzione 4.ª — Sia P la palla che si debba muovere, perchè dopo avere percosso le quattro sponde del bigliardo, venga a colpire la palla Q.

Sulla sponda D C si abbassi la perpendicolare P E e la si prolunghi di E F = P E, e quindi dal punto F si abbassi un'altra perpendicolare alla sponda A D e la si prolunghi di H I = H F. La medesima operazione si ripeta pel punto Q, cioè si abbassi da questo la perpendicolare Q L su A B, per modo che Q K sia eguale a K L, e dal punto L la perpendicolare L T su B C, per modo che L V

sia eguale a V T. Si tirino le rette T I, O F, P G, L R, Q S; la linea P G O R S Q sarà la linea che percorrerà la palla P quando venga spinta nella direzione P G per venire a toccare la palla Q.

Dimostrazione. — I triangoli P G F, F O I, L R T, L Q S essendo isosceli per costruzione, si avranno le seguenti eguaglianze di angoli, cioè l'angolo P G E = E G F = D O G, G O D = D O I = A O R, S R B = B R T = C R O, Q S K = K S L = B S R. E perciò le rette P G, G O, O R, R S, S Q facendo colle rispettive sponde del bigliardo angoli d'incidenza eguali ad angoli di riflessione, la linea P G O R S Q sarà il cammino che percorrerà la palla P per giungere a colpire la palla Q dopo avere percosso le quattro sponde del bigliardo.

49.° — *Trovare la forma e la posizione dell' immagine di un oggetto piano sopra uno specchio piano perpendicolare al piano dell'oggetto.*

(Vedi Tavola X, Fig. 56).

Risoluzione. — Sia M N lo specchio piano e sia A B C D E F la figura data, e di cui è proposto di trovare la forma e la posizione dell' immagine sullo specchio M N.

Dai singoli punti A, B, C, D, E, F della figura data si abbassino delle perpendicolari sullo specchio piano M N e si prolunghino le medesime di quantità eguali. Unendo convenientemente i loro estremi A', B', C', D', E', F' col mezzo di rette, si ha la figura A' B' C' D' E' F' che è la domandata, cioè eguale e di posizione simmetrica alla figura data.

Dimostrazione. — Se si immagina l'occhio dell'osservatore posto in O, si vedrà tosto che essendo per costruzione E 2 = 2 E' ed M N perpendicolare ad E E', l'angolo E Q M = M Q E', e siccome M Q E' ed N Q O sono eguali come opposti al vertice, così anche M Q E = N Q O. Ne segue dunque qui pure che l'angolo di incidenza è eguale all'angolo di riflessione, e perciò che il punto E è l'immagine del punto E. Con ragionamento analago si dimostrerebbe che D' è l'immagine del punto D per essere uguali gli angoli adiacenti N P O e D P M; e lo stesso per gli altri punti A', B', C', F'. Dunque la figura A' B' C' D' E' F' è l'immagine della figura A B C D E F, essendochè tutti i raggi emessi dai diversi punti A, B, C, D,

E, F, e riflessi sullo specchio, segnano, dopo la loro riflessione, la stessa direzione come se fossero tutti partiti dai punti A′, B′, C′, D′, E′, F′. Avendosi poi per costruzione che F 1 = 1 F′, E 2 = 2 E′, ecc.; e che queste rette sono perpendicolari allo specchio M N, risulta evidente l'eguaglianza e simmetria dell' immagine colla figura data per rispetto allo specchio.

50.° — *Trovare le varie immagini di un punto allora che esso è posto fra due specchi.*

(Vedi Tavola X, Fig. 57).

Risoluzione 1.ª — Supponga si che i due specchi dati formino un angolo di 60° e siano questi A B, A C, e sia P il punto dato di cui si vuole cercare le diverse immagini.

Si conduca dal punto P una perpendicolare allo specchio A B, e si prolunghi la stessa oltre lo specchio di tanto quanto P è distante da A B; l'estremo suo P‴ così ottenuto sarà una immagine del punto P. Si prosegua in modo analogo a condurre perpendicolari sugli specchi sempre dall' ultima immagine ottenuta, alternando prima su uno e poi sull'altro, e si avranno le altre diverse immagini P^IV, P^V e poi anche P′ e P″ ricominciando la costruzione dal punto P per rispetto allo specchio A C. Dall' ispezione della figura si vedrà facilmente che tutte queste immagini si debbono trovare sopra una circonferenza descritta con centro in A e con raggio A P.

Dimostrazione. — Supponendo in O l' occhio dell' osservatore, questi vedrà, per esempio, l' immagine P‴ sulla visuale O P‴, inquantochè unendo con una retta il punto P col punto 6 d'incontro di essa visuale collo specchio A B, gli angoli P 6 A ed O 6 B risultano uguali ed in conseguenza eguali gli angoli d'incidenza e di riflessione del raggio P 6. Lo stesso si dimostra per gli altri punti, cioè l'osservatore vedrà questi punti sulle visuali O P′, O P^IV, O P^V, O P″. I raggi P 1 e P 6 danno, dopo una sola riflessione, uno l'immagine P′ e l' altro l' immagine P‴. I raggi P 2 e P 4 danno, dopo due riflessioni, il primo l'immagine P″, il secondo l'immagine P^IV. Il raggio P 9 infine dà l' immagine P^V dopo tre riflessioni.

Si osservi che conducendo dal punto P″ una perpendicolare allo specchio A C essa passa pel punto P^V, ed in conseguenza in luogo

di sei si hanno solo cinque immagini. Per dimostrarlo si tiri la retta $P\,P^{v}$. Questa retta fa con $P^{v}\,P^{iv}$ un angolo di 60°, essendo le rette $P^{iv}\,P^{v}$, $P\,P'''$ parallele, i loro estremi ugualmente distanti rispettivamente dalla perpendicolare comune A B, e gli angoli $P^{v}\,P^{iv}\,P'''$, e $P\,P'''\,P^{iv}$, uguali come alterni interni ed entrambi di 60°. Ora abbassando $P^{v}\,N$ perpendicolare ad A C, siccome l'angolo $P^{iv}\,P^{v}\,N$ sarebbe di 120°, ne risulta che gli angoli $P\,P^{v}\,N$, $P^{v}\,P\,P'$ sono di 60°, e perciò che la retta $P\,P^{v}$ incontra lo specchio A C nello stesso punto 8 in cui esso è incontrato dalla retta $P'\,P''$, la quale fa pure con $P\,P'$ un angolo in P' (punto ad eguale distanza di P da A C) di 60°.

Considerando i triangoli 8 P *n* e 8 P′ *n* si vede che sono rettangoli ed hanno il cateto 8 *n* comune, e gli altri due cateti P *n*, P′ *n* uguali, perciò sono eguali e gli angoli P′ 8 C, P 8 C sono pure eguali e la retta A C è la bisettrice dell'angolo P 8 P′, ossia dell'angolo $P''\,8\,P^{v}$. E siccome A C passa pel centro della circonferenza P, P′, P^{iv}, ecc.; i punti d'incontro dei lati dell'angolo $P^{v}\,8\,P''$ colla circonferenza stessa dovranno trovarsi ad ugual distanza da A C. Dunque abbassando dal punto P'' una perpendicolare su A C e prolungandola, essa verrà nuovamente ad incontrare la circonferenza nel punto P^{v}, e la terza immagine che si ottiene dopo P′ e P'' si confonderà con P^{v}.

Discussione. — Se l'angolo formato dai due specchi è retto, il numero delle immagini che si ottengono è di tre. Se l'angolo è semiretto se ne otterranno sette delle immagini, e sarà facile trovarle quando siasi bene inteso il modo di trovare le cinque per gli specchi che fanno l'angolo di 60°.

(Vedi Tavola X. Fig. 58).

Risoluzione 2.ª — Supponghasi che i due specchi dati sieno paralleli tra loro e siano essi A B, C D e sia P il punto dato.

Abbassando dal punto P una perpendicolare sullo specchio A B, questa perpendicolare sarà anche perpendicolare allo specchio C D.

Prolungando questa perpendicolare al di là degli specchi e prendendo una distanza H I = H P e una distanza F E = E P, i punti I e F saranno due immagini del punto P. Ripetendo questa costruzione pel punto I rispetto allo specchio C D e pel punto F rispetto allo specchio A B, si otterranno le altre due immagini K e

G, che si troveranno pure sulla stessa perpendicolare I F. Continuando sempre così per le nuove immagini ottenute si avrà un numero infinito d'immagini.

Dimostrazione. — Ammesso in O l'occhio dell'osservatore, e tirando per esempio la visuale O I, si vede tosto che l'angolo H 1 P = H 1 I = B 1 O, e quindi che il raggio O 1 si riflette sullo specchio A B facendo un angolo di incidenza uguale a quello di riflessione. Altrettanto si dimostra pei punti F, G, K ecc. Dunque questi punti sono tutte immagini del punto P.

I raggi P 1, P 3 danno, dopo una sola riflessione, il primo, l'immagine I, il secondo l'immagine F; come pure i raggi I 4, F 2 danno sempre dopo una sola riflessione, uno l'immagine K, l'altro l'immagine G; e così via di seguito per tutti gli altri punti sino all'infinito.

LIBRO SECONDO

SULLE CURVE.

Come è già stato detto sin dai preliminari, per linea curva deve intendersi ogni linea che non è nè retta, nè composta di linee rette, o se vuolsi, ogni linea tale, che girando attorno a due de' suoi punti, cambia continuamente di posizione. Le curve, di cui è oggetto in questo libro, sono quelle che possono esser contenute in un piano, ed il cui andamento è in costante rapporto o con dati punti o con date rette.

L'andamento di una curva viene determinato da certi angoli, che si chiamano di *contingenza* o di *curvatura*. Questi angoli sono formati da rette che toccano la curva in modo da potersi considerare quali prolungamenti di due successivi elementi rettilinei tanto corti da confondersi colla curva stessa per tratti piccolissimi. Ognuna di tali rette si dice *tangente della curva*. Così le rette P Q, S R (Vedi Tav. XI, Fig. I), che possono considerarsi come il prolungamento di due successivi elementi piccolissimi F G, G H della curva A B C D E F G H I, formano l'angolo di contingenza o di curvatura P T S, cioè determinano col loro angolo nel punto G d'incontro di detti due elementi l'andamento della curva.

Egli è evidente che trattandosi di una curva qualunque, come quella sopra indicata, una tangente alla curva può avere con questa più punti a comune, cioè intersecarla ed anco toccarla in qualche altro punto; ma trattandosi di una curva che non presenti punti singolari d'inflessione, di regresso ecc.; una tangente alla curva non avrà con questa che un sol punto a comune. E di leggieri eziandio comprendesi come in una curva di andamento variabile l'angolo di contingenza varii in ogni punto della curva, ed

in una curva di andamento costante, come la circonferenza del circolo, lo stesso angolo sia pure costante, cioè uguale per ogni punto della curva.

Se sui lati d'un angolo di curvatura d'una curva s'innalzano delle perpendicolari dai loro punti di contatto colla curva, queste perpendicolari s'incontrano sotto un angolo uguale a quello di curvatura ed in un punto che è ugualmente distante dai predetti punti di contatto; per cui il circolo descritto con centro in quel punto d'incontro e con raggio uguale ad una delle perpendicolari menzionate, passa pei punti di contatto dei lati dell'angolo di curvatura colla curva. Il centro di questo circolo si chiama *centro di curvatura*, ognuno dei suoi raggi perpendicolari alle tangenti che formano l'angolo di curvatura *raggio di curvatura*, il circolo stesso *circolo osculatore* della curva. Il circolo di centro O è un circolo osculatore della curva A B C D E F G H I nei punti B, D, i raggi O B, O D, sono raggi di curvatura della stessa curva negli stessi punti B, D, detto centro O è un centro di curvatura della stessa curva corrispondente ai punti B, C, D.

Si può scorgere facilmente come a misura che l'angolo di curvatura, ossia la curvatura d'una curva cresce o diminuisce, diminuisca o cresca il raggio di curvatura della curva stessa, tanto che è dato inferire che l'angolo di contingenza ed il raggio di curvatura d'una curva stanno tra loro in rapporto inverso. Ciò si fa maggiormente evidente prendendo a considerare più circoli di diverso raggio; poichè mentre in ciascuno di essi l'angolo di curvatura è costante, riferiti poi gli stessi circoli ad un medesimo centro, e condotto un raggio al massimo circolo, gli angoli al centro corrispondenti agli angoli di curvatura nei punti in cui le circonferenze sono incontrate da detto raggio, diminuiscono o crescono a seconda della lunghezza dei raggi delle circonferenze medesime.

È stato pur detto sin dai preliminari che le curve in genere si distinguono in curve aperte ed in curve chiuse, secondo che hanno o non hanno limiti. La curva rappresentata alla Fig. 1 è una curva aperta, quelle rappresentate alle Fig. 2 e 3 sono curve chiuse. Si tratterà ora delle principali curve appartenenti a ciascuna delle due classi, e si comincierà da quelle chiuse.

Curve chiuse.

Le curve chiuse il cui andamento è in rapporto costante o con dati punti o con date rette, sono la circonferenza del circolo e la ellisse.

Vi sono certe curve composte di diversi archi di circolo e conosciute col nome di *ovali*, le quali, sebbene abbiano per ognuno degli archi che le compongono comuni le proprietà colla circonferenza, non possono in certo modo considerarsi come luoghi geometrici propriamente detti, e quindi trovano, anzichè qui, il loro posto in quei corsi di disegno che servono sussidiariamente per lo studio di ornato, di architettura, ecc. (*).

Circonferenza del circolo. — La circonferenza del circolo è quella curva chiusa che ha tutti i suoi punti ugualmente distanti da un punto interno chiamato centro. Si può ancora definire la circonferenza quella curva che può scorrere sopra sè stessa senza cangiare di posizione, o meglio di curvatura. Ed ancora può dirsi essere la circonferenza il luogo geometrico di tutti i punti egualmente distanti da un dato punto.

Si prendano ora a considerare le rette, gli angoli ed i poligoni in rapporto col circolo.

Ogni retta tirata in un circolo dal centro alla circonferenza chiamasi *raggio*, ed ogni altra retta limitata dalla circonferenza, e che passi pel centro, si chiama *diametro*; così la retta O C nel circolo di centro O (Fig. 3) è un raggio, la A B è un diametro: e poichè A O = O B, A B è doppio di O C, per cui può dirsi in generale che

(*) Moltissimi sono gli ovali che si possono costrurre, il numero degli archi per comporli essendo affatto indeterminato; però i più semplici, cioè quelli a minor numero di centri, sono quelli che ricevono più applicazioni degli altri. Si avrà l'idea d'un ovale nella seguente costruzione di uno a quattro centri su assi dati.

Tirate due rette A B, D E (Fig. 2) tra loro perpendicolari, e riportate su di esse le lunghezze assegnate per gli assi in modo da restare entrambe divise per metà nel punto d'incontro O di dette rette, si faccia centro in questo punto O, e con raggio O A si descriva un quarto di circonferenza A G F; quindi si faccia centro nell'estremo A, e collo stesso raggio si descriva un arco, che taglierà il quarto di circonferenza in G; si unisca con rette il punto G col punto F, col punto O e col punto A, e poscia si conduca D H parallela ad F G ed H C'' parallela a GO, ed i punti C, C'' saranno due centri, e per ragione di simmetria C', C''' gli altri due centri per descrivere con raggi rispettivamente uguali a C H e C'' H l'ovale A N E L B I D H.

tutti i diametri sono doppi dei raggi. Ogni retta nel circolo terminata alla circonferenza, e che non passi pel centro, si chiama *corda;* così le rette C D, A C si dicono corde nel circolo di centro O. *Ogni corda tirata in un circolo è minore di un diametro.* Infatti, se agli estremi d'una corda A C si conducono i raggi O C, O A, si vede tosto che la figura A C O è un triangolo, e per conseguenza che il lato A C è minore della somma degli altri due, che sommano assieme ad un diametro. Qualunque retta indefinita o limitata, tagliata in due punti dalla circonferenza di un circolo, si chiama secante di questo circolo: la retta S P è per esempio una secante del circolo di centro O: la parte Q R di essa retta compresa nel circolo, chiamasi la *parte interna della secante,* ogni parte rimanente *parte esterna.* Quando poi una retta è, per rispetto ad una circonferenza, tirata in modo da non aver con questa che un sol punto a comune detto di contatto, la retta stessa diviene una *tangente* della circonferenza: tale può considerarsi E F, che ha un sol punto di contatto T colla circonferenza di centro O. Ogni qualunque altra retta che non incontri la circonferenza di un circolo, come la retta G H per rispetto al circolo di centro O, chiamasi *esterna* allo stesso circolo.

Da quanto precede si vede chiaramente che *una retta non può incontrare una circonferenza in più di due punti, e che la maggiore retta possibile in un circolo è un diametro.*

La minor corda che si possa condurre in un circolo da un punto preso nel suo interno è la perpendicolare al diametro che passa pel punto dato. Di fatto, come si scorge dalla Fig. 6, in cui essendo P il punto dato, e tirando da questo punto il diametro A B, C D perpendicolare a questo diametro ed un'altra corda qualunque E F, uniti gli estremi di queste due corde mediante i raggi O C, O D, O E, O F, ed abbassata dal centro O la perpendicolare O G sulla corda E F, risulta tosto che il triangolo P G O è rettangolo, e quindi che il cateto O G è minore dell'ipotenusa O P, dimodochè, siccome i triangoli rettangoli C P O e G O F hanno l'ipotenusa eguale ed il cateto O G $<$ O P, sarà P C $<$ G F per la nota proprietà dell'obliqua, e per conseguenza 2 P C $<$ 2 G F, ossia C D $<$ E F.

Un angolo per rispetto al circolo riceve particolari denominazioni secondochè si trova disposto col suo vertice internamente od esternamente al circolo, od anco sulla circonferenza del circolo, e se-

condochè ha i suoi lati secanti o tangenti al circolo stesso. Ogni angolo formato da due raggi, o in altri termini, ogni angolo che abbia il vertice nel centro di un circolo, si chiama *angolo al centro* di questo circolo: l' angolo B O C (Fig. 4), formato dai raggi B O, O C nel circolo di centro O, è un angolo al centro. Ogni angolo che abbia il vertice sulla circonferenza, ossia ogni angolo formato da due corde, si chiama *angolo inscritto* nel circolo: così l' angolo B A C (Fig. 4) è un angolo inscritto nel circolo di centro O. Un angolo poi che abbia i lati tangenti alla circonferenza di un circolo, si chiama *angolo circoscritto* alla stessa circonferenza: tale è l'angolo T P Q (Fig. 5) per rispetto alla circonferenza di centro O. Infine, allorchè un angolo ha il vertice o nell' interno o fuori di un circolo, ed i lati secanti la circonferenza del circolo stesso, chiamasi *angolo eccentrico*, come l' angolo A P B (Fig. 5) formato dalle due secanti P A, P B del circolo di centro O, che si incontrano in un punto P esterno allo stesso circolo, ed anche come l' angolo A C B avente il vertice C nell' interno di esso circolo, e formato dalle due secanti C A, C B.

Ad ognuno degli angoli or specificati corrispondono una o più corde congiungenti o i punti di contatto o i punti d' intersezione dei loro lati colla circonferenza, come ad ognuna di esse corde corrispondono, per conseguenza, gli archi compresi da quegli angoli. Vi debbe quindi avere analoga relazione fra gli angoli e gli archi, come tra le corde e questi ultimi, a tal che le proprietà degli uni si possano ripetere da quelle delle altre. Sarà dato perciò di giungere a conoscere le proprietà degli angoli in rapporto coi circoli mediante quelle delle corde, che sono facilmente a dedursi da quelle già note delle altre rette condotte nel circolo.

Essendo A B una corda tirata in un circolo di centro O (Fig. 7), è chiaro che, condotti i raggi O A, O B, che sono tra loro uguali, il triangolo risultante A O B è un triangolo isoscele, ed in conseguenza la retta che unisce il vertice O col punto di mezzo D della corda A B, è a questa perpendicolare e divide per metà l' angolo al centro A O B. Se ora viene prolungato D O sino all' incontro della circonferenza in C, e quindi tirato C A, C B, si ottengono i due triangoli A O C, C O B, che sono eguali, epperciò tali, che sovrapposti, coincidono perfettamente. Ma coincidendo questi triangoli, debbono necessariamente coincidere anche gli archi A C,

C B. Dunque si può dire che *la perpendicolare innalzata sulla metà di una corda tirata in un circolo, passa pel centro di questo circolo e divide l' arco sotteso dalla corda per metà.*

Abbiansi ora in circoli eguali di centro C e C' (Fig. 8) due angoli al centro A C B, A' C' B', che sieno eguali; è evidente che dietro la sovrapposizione loro l' arco A D B viene a coincidere perfettamente coll' arco A' D' B'; onde si può anche dire: 1.° *che se due archi di circonferenza descritti con eguale raggio sono eguali, gli angoli al centro sono pure eguali;* 2.° *che in un medesimo circolo o in circoli eguali, gli archi sottesi da corde eguali sono eguali.*

Prendendo infine a considerare, sempre in circoli eguali, angoli al centro diseguali, come A B C, A' C' E (Fig. 8), siccome se se ne opera la sovrapposizione, l'arco A' E opposto all'angolo maggiore A' C' E risulta maggiore dell' arco A' B' = A B opposto all' angolo minore A' C' B' = A C B, come pure la corda corrispondente all'angolo maggiore risulta maggiore della corda corrispondente all'angolo minore, sarà altresì dato di stabilire: *che in un medesimo circolo o in circoli eguali l' arco opposto ad un angolo maggiore è maggiore d'un arco opposto ad un angolo minore, e conseguentemente la corda che sottende un arco maggiore è maggiore d'una corda che sottende un arco minore.* Ciò sta peraltro soltanto trattandosi di angoli minori di 180°; perocchè se gli angoli superano questo valore, è chiaro che succede affatto il contrario, cioè le corde corrispondendo allora alle differenze tra questi angoli e quattro retti, diminuiscono o crescono col crescere o diminuire degli angoli. Così ad esempio un angolo di 300° è sotteso dalla stessa corda che sottende un angolo di 60°.

Misura dell' angolo. — Nel primo libro si è visto il modo di valutare un dato angolo secondo una delle divisioni adottate in pratica, ma non però il modo di trovare il rapporto esatto o approssimato di un angolo con un altro angolo qualunque, che può essere scelto per unità di misura, lo che conduce a determinare la vera misura di un angolo.

Fondandosi sulla proprietà che hanno angoli al centro eguali, in un medesimo circolo od in circoli eguali, di comprendere archi eguali, puossi stabilire, che il rapporto di due angoli è misurato dal rapporto di due archi di circolo da essi compresi e descritti con un medesimo raggio e con centro nel loro vertice. E poichè

archi eguali e descritti con un medesimo raggio sono sottesi da corde eguali, è lecito pur anco di ricavare il rapporto di due angoli riferendoli al centro di un medesimo circolo o di circoli eguali, e quindi vedendo quante volte la corda che sottende l' arco dell'uno può portarsi a sottendere il medesimo arco sull'arco dell'altro. Così volendo conoscere il valore dell'angolo B A C (Fig. 9), essendo nota l'unità di misura nell'angolo D E F, basta descrivere con centro nei rispettivi vertici di questi angoli e col medesimo raggio a piacere i due archi B C, D F, e quindi, mediante il compasso, portare sull'arco B C come corda, la corda D F tante volte quante vi può stare, per ottenere nel numero così trovato l'espressione della misura dell'angolo B A C. Nel caso rappresentato dalla figura si vede che la corda che sottende l' arco D F può riportarsi come corda quattro volte sull' arco B C; e ciò significa che l' angolo B A C è quadruplo dell' angolo D E F, ossia che l' angolo B A C ha per misura quattro. Di fatto, se si tirano le rette A G, A H, A I dal vertice A ai punti G, H, I, segnati col compasso nel riportare D F su B C, l'angolo B A C è scomposto in quattro angoli eguali all'angolo D E F.

L' eguaglianza del rapporto degli archi con quello degli angoli che li intercettano sussiste sempre, purchè i primi sieno descritti col medesimo raggio; vale a dire per due angoli qualunque D E F, B A C (Fig. 10) che comprendono due archi D E, B C descritti col medesimo raggio e con centro nei loro vertici, si può sempre avere la proporzione:

(1) ang. D F E : ang. B A C :: arco D E : arco B C.

Suppongasi infatti che il quarto termine di questa proporzione non sia B C, ma un arco maggiore qualunque B K; allora potendo sempre dividere esattamente D E in tante parti, per modo che una di esse, riportata successivamente su B K, venga a cadere in un punto 6 intermedio tra C e K (lo che è sempre facile a raggiungersi, spingendo convenientemente la divisione per due dell' arco D E), si darebbe pur luogo alla proporzione:

(2) D F E : B A 6 :: D E : B 6

a motivo della commensurabilità dei due archi D E, B 6. Ora le due proporzioni ([1]), ([2]) avendo gli antecedenti eguali, ne risulterebbe l'altra tra i loro conseguenti

B A C : B A 6 :: B K : B 6.

Ma questa proporzione è assurda. Dunque il quarto termine della proporzione ([1]) non può essere maggiore di B C. Analogamente si dimostrerebbe che lo stesso termine non può essere minore di B C.

Nel fare il confronto di due archi, riportando la corda che sottende il più piccolo come corda successivamente sul più grande, può avvenire che si trovi che la stessa corda non stia un numero esatto di volte sul secondo arco, ma che resti una certa frazione. Quindi, per misurare un arco o un angolo, importa saper valutare una tal frazione.

I metodi che si possono seguire per trovare la misura d'un arco sono identici con quelli già spiegati per trovare la misura d'una retta. In primo luogo, sia che si conosca l'unità di misura, sia che si vogliano confrontare tra loro due angoli qualunque, lo che equivale a trovare la comune misura di due angoli, serve il portare la corda che sottende l'arco unità di misura, ossivvero l'arco più piccolo successivamente come corda sull'arco più grande tante volte quante vi può stare, quindi la corda della frazione d'arco restante nello stesso modo sul primo arco, e così di seguito sino a trovare una corda tale che possa stare un numero esatto di volte e sull'arco minore e sull'arco maggiore: il rapporto tra i numeri in tal guisa trovati esprime la misura di uno degli angoli per rispetto all'altro, preso per unità di misura.

Secondariamente, una circonferenza graduata, cioè divisa secondo una delle divisioni svolte nel primo libro, offre il mezzo di misurare direttamente un angolo, ove si applichi il vertice di questo nel centro della circonferenza, e si faccia passare uno dei lati dati pella divisione zero, come è rappresentato alla Fig. 11 per l'angolo B A C.

Ma anche per gli archi può avvenire che, per quanto si spinga l'operazione di portare la corda dell'uno successivamente sull'altro arco, e quindi la corda della frazione d'arco restante sul primo

e così di seguito; oppure per quanto si spinga la divisione della circonferenza in gradi, minuti primi, minuti secondi, ecc.; non si giunga mai a trovare la comune misura di due angoli: in tal caso gli archi e conseguentemente gli angoli corrispondenti, sono incommensurabili alla stessa guisa delle rette; non se ne può cioè trovare la misura che per approssimazione, il cui grado dipende o dal punto al quale si è spinta la prima operazione, o dal punto al quale si è portata la suddivisione della circonferenza.

In pratica per raggiungere una certa approssimazione per la misura d'un angolo, che non sarebbe permessa coi mezzi meccanici col solo dividere una circonferenza di giuste dimensioni, si adotta di applicare a quest'ultima un nonio o verniero fondato sullo stesso principio di quello rettilineo. Così il nonio curvilineo che deve dare l'approssimazione di $\frac{1}{2}$ abbraccia $n - 1$ divisioni della circonferenza, ed è diviso in n parti. La Fig. 11 spiega l'applicazione del nonio ad un quarto di circonferenza diviso di cinque in cinque gradi: il nonio ivi rappresentato abbraccia 4 divisioni, ed è diviso in cinque parti eguali; esso adunque somministra i gradi; così, ad esempio, per l'angolo B A C indica una misura di 48°.

Ora, dietro la regola del nonio rettilineo, è facile di costrurre pure un nonio curvilineo che dia qualunque voluta approssimazione. Così per una circonferenza divisa in gradi e mezzi gradi volendo costrurre un nonio che dia un'approssimazione sino ad un minuto primo, basta fare il medesimo di una ampiezza di 29 mezzi gradi, e quindi dividerla in 30 parti eguali; poichè l'approssimazione in tale caso risulta di $^1/_{30}$ di mezzo grado sessagesimale, che vale 30'.

Rapporto di due archi. — Premesso che il rapporto di due angoli è eguale al rapporto degli archi intercetti dai loro lati in un medesimo circolo o in circoli eguali descritti con centro nel vertice degli stessi angoli, si passi ora a vedere quale sia il rapporto di due archi descritti con diverso raggio.

Suppongasi di conoscere il rapporto di due angoli A O B, D O C (Tav. XII, Fig. 12) al centro, in due circoli concentrici e di raggio O A, O D, e vogliasi determinare il rapporto degli archi rispettivamente intercetti dai loro lati.

È chiaro, che immaginando prolungati i lati dell'angolo D O C

sino all' incontro della circonferenza di raggio maggiore O A, si possono stabilire le due proporzioni:

arco A B : arco A E :: ang. A O B : ang. A O E

arco A E : arco D C :: O A : O D.

Ora, moltiplicando termine a termine queste due proporzioni, si ha

$$A B \times A E : A E \times D C :: A O B \times O A : A O E \times O D$$

la quale, dividendo i suoi due primi termini per A E, si riduce ad

$$A B : D C :: A O B \times O A : A O E \times O D,$$

da cui si desume, che il rapporto dei due archi è espresso dal rapporto composto dei raggi e degli angoli.

Proprietà delle corde parallele. — Si è visto che in un circolo qualunque di centro O (Fig. 13), un raggio O T abbassato perpendicolarmente su di una corda C D, divide l' arco da questa sotteso per metà, cioè in due parti C T, T D eguali.

Tirando ora una corda A B parallela a C D, è evidente che sarà pure l' arco A T eguale all' arco B T, ed eziandio C A eguale B D, ciascuno di questi ultimi potendosi considerare come la differenza di quantità eguali. È a dirsi dunque in generale che, *in un circolo due corde parallele intercettano archi eguali.*

Se parallelamente alle corde C D, A B, si tirino inoltre le due tangenti E F, G H, si avrà che i loro punti di contatto T ed M colla circonferenza, saranno gli estremi di un diametro perpendicolare alle corde; dimodochè esse tangenti divideranno pure gli archi dalle corde sottesi per metà. Dimostrare la verità di questa proposizione, vale lo stesso che dimostrare che la tangente d' un circolo, è perpendicolare al raggio del medesimo circolo condotto al punto di contatto della medesima tangente; poichè allora resta evidente che due raggi condotti al punto di contatto di due tangenti parallele, non possono confondersi che in un diametro perpendicolare ad ambe le dette tangenti.

A quest' uopo, si prenda a considerare una tangente A B ad un circolo di centro O (Fig. 14) ed un raggio O T di questo circolo condotto al punto di contatto di essa tangente: è chiaro che qua-

lunque altra retta O C condotta dal centro O ad un altro punto C della tangente A B diverso dal punto T di contatto di essa tangente col circolo, è più lunga di O T; inquantochè, ammesso che potesse essere O C eguale o minore di O T, la tangente A B si cambierebbe in una secante del circolo incontrandone la circonferenza in due punti; onde O T è la retta più corta che si possa condurre dal centro O alla retta A B, e quindi è a questa perpendicolare. Dunque *in un circolo il raggio condotto al punto di contatto di una tangente è a questa perpendicolare, e inversamente una perpendicolare innalzata alla tangente di un circolo sul punto di contatto, passa sul centro del circolo stesso.*

Relazione tra due circonferenze. — Due circonferenze ricevono denominazioni particolari a seconda della loro relativa posizione. Così si dicono *esterne* due circonferenze di centro C ed O (Fig. 15) che si trovano l'una affatto esternamente all'altra e non si toccano in nessun punto; si dicono *tangenti esternamente* due circonferenze di centro O e C (Fig. 16) che si toccano l'una esternamente all'altra, e *tangenti internamente* due come quelle O e C' (Fig 16), che si toccano l'una internamente all'altra; inoltre si chiamano *eccentriche* due circonferenze di centro C ed O (Fig. 17) che si trovano una dentro l'altra, e *concentriche* due circonferenze di raggio O A, O D, descritte con un medesimo centro; infine due circonferenze che si tagliano come quelle di centro O e C (Fig. 18) si dicono *secanti.*

La distanza di due circonferenze esterne è espressa dalla differenza fra la distanza dei loro centri e la somma dei loro raggi. Dimodochè si dirà che le circonferenze di centro O e C (Fig. 15) distanno tra loro di $EF = OC - (OE + CF)$.

In due circonferenze, tangenti tanto esternamente che internamente, la linea che unisce i centri passa per il punto di contatto. Infatti è evidente, che se si immaginasse tirato per il punto di contatto T (Fig. 16) di due circonferenze di centro O e C tangenti esternamente, o di centro O e C' tangenti internamente, una perpendicolare alla tangente comune, tale perpendicolare dovrebbe passare ad un tempo sui rispettivi centri C, C' ed O delle circonferenze.

Quando due circonferenze si tagliano, la retta che unisce i due punti d'intersezione, è corda comune nei due circoli; sicchè una

perpendicolare innalzata sulla sua metà, passa necessariamente pei centri dei medesimi circoli.

Dunque in generale può dirsi che, *in due circonferenze secanti, la retta che unisce i centri, è perpendicolare sulla metà della corda comune.*

È poi facile a vedersi, che perchè due circonferenze si taglino, bisogna che la distanza dei loro centri sia minore della somma, e maggiore della differenza dei loro raggi.

Rapporto degli angoli inscritti, circoscritti, eccentrici cogli archi da loro intercetti. — Sia A B D (Fig. 19) un angolo iscritto in un circolo di centro O.

Se si tira il diametro B C, esso angolo A B D viene scomposto nei due angoli A B C, C B D; e se si tira poscia il raggio O A, si ha che il triangolo A B O è isoscele, e quindi che l'angolo O B A = O A B. Ora l'angolo A O C esterno al triangolo A B O è eguale alla somma dei due interni ed opposti, cioè A O C = 2 A B O; donde derivasi che l'angolo A B O è la metà dell'angolo A O C, e che in conseguenza l'angolo A B C ha per misura la metà dell'arco A C intercetto dall'angolo al centro A O C.

Se inoltre si tira anche il raggio O D, e si fa una pari considerazione pel triangolo B O D, si ricava che C O D = 2 C B D, cioè che l'angolo C B D è la metà dell'angolo C O D, ossivvero che l'angolo C B D è misurato dalla metà dell'arco C D. Dunque l'angolo totale A B D, è misurato dalla metà dell'arco A D compreso fra i suoi lati.

Se si prende in seguito a considerare un altro angolo qualunque A B C (Fig. 20) inscritto in un circolo di centro O, tirato il diametro B D, è facile per il ragionamento antecedente, vedere che l'angolo C B D ha per misura la metà dell'arco C D, che l'angolo A B D ha per misura la metà dell'arco A D, e che perciò la differenza di questi due angoli, cioè A B C, ha per misura la metà dell'arco A C. Si può quindi stabilire che, *ogni angolo inscritto in un circolo ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.*

Segue da quanto precede, che se si inscrivono diversi angoli come A C B, A D B, A E B, A F B (Fig. 21) in uno stesso segmento di circolo di centro O, essi risultano tutti eguali tra loro, siccome aventi per misura un identico arco. Donde l'arco del segmento

A C D E F B, può considerarsi come il luogo geometrico dei punti che uniti con A e B, danno un angolo di grandezza costante. Dunque *tutti gli angoli inscritti in un medesimo segmento di circolo sono eguali tra loro.*

Vogliasi ora trovare il rapporto di un angolo eccentrico A B C (Fig. 22) in un circolo di centro O, cogli archi intercetti dai suoi lati. Se si prolungano i lati dell'angolo sino all'incontro in E e D della circonferenza, e pel punto D si mena D F parallela al lato B C, si vede che l'angolo A D F è eguale ad A B C siccome suo corrispondente; ora, il primo come inscritto nel circolo essendo misurato dalla metà dell'arco A C F compreso fra i suoi lati, anche l'angolo eccentrico A B C avrà per misura la metà dell'arco A C F. Ma l'arco C F è eguale all'arco E D, poichè D F ed E C sono due corde parallele. Si potrà quindi dire che, *ogni angolo eccentrico nell'interno ad un circolo*, *cioè tale che il suo vertice si trovi tra il centro e la circonferenza d'un circolo, è misurato dalla metà della sómma degli archi intercetti dai suoi lati.*

Avendosi poi un angolo eccentrico esternamente ad un circolo, cioè formato da due secanti d'un circolo, come l'angolo B A C (Fig. 23), per trovarne la misura serve che s'immagini dal punto D condotto D F parallela ad A B, allora l'angolo F D C risultando eguale all'angolo B A C come suo corrispondente, e l'arco B F = E D per essere sì l'uno che l'altro compreso fra corde parallele, si ricava subito che l'angolo B A C, è misurato dalla metà della differenza degli archi B C, E D intercetti dai suoi lati. Cosicchè *ogni angolo eccentrico esternamente ad un circolo, è misurato dalla metà della differenza degli archi intercetti dai suoi lati.*

Trattandosi inoltre di un angolo formato da una tangente ed una corda, come l'angolo B C D o A C D (Tav. XIII, Fig. 24), è facile vedere, che sarà sempre misurato dalla metà dell'arco compreso fra i suoi lati; perocchè se per il punto di contatto C della tangente si immagina tirato il diametro C E, si ha un angolo E C D inscritto, che è misurato dalla metà dell'arco E D: e si ha pure l'angolo E C B che è misurato dalla metà dell'arco compreso tra i suoi lati, poichè esso stesso angolo è retto, e l'arco E D C è una semicirconferenza; onde colla loro differenza arco C D si ha la misura dell'angolo D C B, e colla loro somma arco C E D la misura dell'angolo A C D. Quindi, *ogni angolo formato da una tan-*

gente ed una corda d'un circolo, ha per misura la metà dell' arco compreso tra i suoi lati.

Per un angolo A P B (Fig. 25) formato da una secante P B e da una tangente P A, la misura è la metà della differenza degli archi compresi fra i suoi lati. Infatti, immaginando tirata pel punto di contatto T una parallela T D alla secante P B, si vedrà che l'angolo A T D è eguale all'angolo B P A come suo corrispondente e che gli archi B D, C T sono eguali fra loro come intercetti da corde parallele; per lo che siccome l'angolo D T A formato da una tangente e da una corda è misurato dalla metà dell'arco compreso fra i suoi lati, l'angolo B P A sarà misurato dalla metà della differenza dei due archi B D T, C T compresi fra i suoi lati. Laonde *ogni angolo formato da una secante e da una tangente d'un circolo, ha per misura la metà della differenza dei due archi compresi fra i suoi lati.*

Per ultimo, considerando un angolo circoscritto ad un circolo, vale a dire un angolo formato da due tangenti ad un circolo, come l'angolo E P A (Fig. 26), per giungere a trovarne la misura basterà condurre pel punto di contatto T di una delle tangenti una parallela all'altra tangente P E; si scorgerà allora che l'angolo A T D è eguale all'angolo A P E siccome suo corrispondente, e che gli archi C T, C D sono tra loro eguali perchè intercetti da due corde parallele; per cui stante che A T D è misurato dalla metà dell' arco T D, l'angolo E P A sarà misurato da T D C — C D, ossia T D C — C T. Dunque anche *l' angolo circoscritto ad un circolo, è misurato dalla metà della differenza degli archi compresi fra i suoi lati.*

Trovato che ogni angolo inscritto in un circolo è misurato dalla metà dell' arco compreso fra i suoi lati, è facile a comprendersi come ogni qualvolta un angolo inscritto intercetta coi suoi lati una semicirconferenza, esso angolo sia un angolo retto. Dietro ciò potrassi dimostrare il teorema seguente:

Le altezze di un triangolo sono le bisettrici degli angoli di un altro triangolo avente per vertici i piedi delle stesse altezze.

Sia A B C (Fig. 27) un triangolo qualunque, in cui si sono condotte le tre altezze A E, B F, C D, ed in cui si tratta di dimostrare che nel triangolo D E F avente i vertici ai piedi di dette altezze, sono queste altezze medesime le bisettrici degli angoli.

Si descrivano sopra i singoli lati del triangolo A B C delle semi-

circonferenze: è evidente che ognuna di queste deve passare per i piedi di due altezze del triangolo, cioè la semicirconferenza descritta sul lato A B, per i piedi F ed E delle altezze B F ed A E, quella descritta sul lato A C, per i piedi D ed E delle altezze C D, A E, e quella descritta sul lato B C, per i piedi D ed F delle altezze C D, B F, e questo, perchè le indicate semicirconferenze sono i luoghi geometrici di tutti quei punti che uniti con rette cogli estremi del rispettivo diametro, che è un lato del triangolo A B C, determinano degli angoli retti, o se vuolsi, degli angoli formati dall' altezza d'un triangolo colla relativa base.

Prendasi ora a considerare uno dei due angoli in cui viene scomposto ciascuno degli angoli del triangolo D E F dalle altezze del triangolo A B C, per esempio l' angolo D F B. Quest' angolo è inscritto nella medesima semicirconferenza di diametro C B in cui è inscritto l'angolo D C B, ed ha con questo comune la misura nella metà dell'arco D B; per cui detto angolo D F B = D C B. Ma quest'ultimo angolo D C B, essendo complemento dell'angolo B, nel triangolo rettangolo D B C, è eguale all'angolo B A E, che è pure complemento dello stesso angolo B nel triangolo rettangolo A B E. Ma l'angolo B A E è inscritto nella semicirconferenza di diametro A B ed ha per misura la metà dell' arco E B, e quindi è eguale all'angolo B F E, che è inscritto nella medesima semicirconferenza e ha per misura la metà dello stesso arco. Ora dunque, essendo l' angolo D F B = D C B, D C B = E A B, E A B = B F E, ne segue che l'angolo D F B = B F E, epperciò che l'altezza B F è bisettrice dell'angolo D F E del triangolo D E F.

Con ragionamento del tutto analogo si riesce pure a provare che l'altezza A E è bisettrice dell' angolo F E D, e che l'altezza C D è bisettrice dell'angolo F D E.

In seguito a questo teorema, si può far luogo senz' altro alla risoluzione del problema seguente:

Costrurre un triangolo conoscendone i piedi delle sue altezze.

Essendo A, B, C (Fig. 28) i tre punti dati per piedi delle altezze del triangolo da costruirsi, si uniscano tra loro con rette, e quindi si tirino le bisettrici degli angoli del triangolo risultante A B C, le quali s' incontreranno in un sol punto O. Innalzando ora su queste bisettrici delle perpendicolari rispettivamente dai punti A, B, C, le ultime incontrandosi daranno luogo al triangolo D E F, che sarà il

domandato, poichè avente i lati perpendicolari alle bisettrici degli angoli del triangolo, i cui vertici sono i piedi dati delle altezze dello stesso triangolo domandato.

Relazione tra un poligono ed un circolo. — Allorquando un poligono ha tutti indistintamente i suoi vertici collocati sulla circonferenza di un circolo, dicesi che esso poligono è *inscritto* nel circolo, ed il circolo *circoscritto* al poligono.

Allorquando poi, un poligono ha tutti i suoi lati tangenti ad un circolo, si dice che esso è circoscritto al circolo, ed il circolo inscritto nel poligono.

Dietro la definizione dell'angolo inscritto, e dell'angolo circoscritto, è anche dato di definire il poligono inscritto in un circolo, quello che ha tutti gli angoli al perimetro inscritti in uno stesso circolo, ed il poligono circoscritto ad un circolo, quello che ha tutti gli angoli al perimetro circoscritti ad un medesimo circolo.

Il poligono A E C D P (Fig. 29) è inscritto nel circolo di centro O, ed il poligono F G H Q R è circoscritto nel medesimo circolo.

Se ora si osserva come, tirando dal centro di un circolo delle rette ai vertici di un poligono inscritto, queste risultano tutte eguali tra loro come raggi dello stesso circolo, ne nasce tosto la conseguenza, che *condizione necessaria acciò un poligono possa essere inscritto in un circolo, è che in esso possa esistere un punto, che disti egualmente da tutti i suoi vertici, il qual punto sarà il centro del circolo in cui sarà dato inscrivere lo stesso poligono.*

Parimenti, ove si consideri che ogni retta tirata dal centro di un circolo al vertice di un poligono al medesimo circoscritto, divide per metà l'angolo al perimetro, come d'altronde è facile a vedersi nella stessa figura 29, in cui tirata per esempio la retta O F, risultano due triangoli P O F, F O A rettangoli, essendo O A, O P due raggi condotti dal centro O al punto di contatto dei lati R F, F G, ed eguali avendo il cateto O P = O A e l' ipotenusa O F comune, per cui l'angolo O F A = O F P; ne deriva tosto la conseguenza, che *condizione necessaria perchè un poligono possa essere circoscritto ad un circolo, ossia perchè un poligono si possa dire circoscrivibile ad un circolo, è quella che le bisettrici dei suoi angoli al perimetro si incontrino tutte in uno stesso punto.*

Sapendo ora che i poligoni regolari hanno un centro, cioè un punto egualmente distante da tutti i loro vertici, e che sui mede-

simi poligoni, l'incontro delle bisettrici degli angoli al perimetro avviene in un sol punto, è dato stabilire, che *ad ogni poligono regolare è sempre possibile inscrivere e circoscrivere un circolo.*

Ponendo poi mente a quanto è stato dimostrato nei teoremi 1.° e 2.° alle pagine 4 e 45, può ora eziandio concludersi: primieramente, che *il punto d'incontro delle perpendicolari innalzate sulle metà dei lati d'un triangolo qualunque, trovandosi ad egual distanza dai vertici del triangolo, è il centro del circolo a questo circoscritto;* in secondo luogo, che *il punto d'incontro delle bisettrici degli angoli d'un triangolo qualunque, trovandosi egualmente distante dai lati del triangolo, è il centro del circolo in quest' ultimo inscritto.*

In seguito a ciò, volendo circoscrivere un circolo ad un dato triangolo qualunque A B C (Fig. 30), basterà per due dei punti di mezzo D, E, F dei suoi lati, innalzare a questi delle perpendicolari, che s' incontreranno in un punto O tale, che fatto in esso centro e con raggio O A descritta una circonferenza, questa passerà per i vertici B e C, e così risulterà circoscritta al triangolo dato.

La risoluzione di questo problema lascia scorgere il mezzo di determinare il centro di una circonferenza e quindi il suo raggio, essendone dati tre punti, ossia il mezzo di far passare una circonferenza per tre punti dati qualunque, purchè non in linea retta; poichè basta unire i tre punti dati con rette, e ripetere su di queste, la costruzione sovra indicata per circoscrivere una circonferenza ad un triangolo.

E volendo poi inscrivere un circolo in un triangolo A B C (Fig. 31), sarà sufficiente di dividere due dei suoi angoli A, B, C per metà, e far centro nel punto O d'intersezione delle bisettrici, e con raggio eguale alla perpendicolare abassata da detto punto O ad uno qualunque dei lati del triangolo, descrivere una circonferenza, che risulterà inscritta nel medesimo triangolo dato.

È quindi dato di conchiudere, che *si può sempre inscrivere e circoscrivere ad un circolo, un triangolo qualunque, del pari che un poligono regolare.*

La verità di questa proposizione non ha più luogo sempre per un quadrilatero qualunque. Si vedrà qui appresso, in quali soli casi un quadrilatero sia inscrivibile o circoscrivibile ad un circolo.

Ove si immagini inscritto in un circolo di centro O (Fig. 32) un quadrilatero A B C D, e poscia tirata la diagonale A C e la dia-

gonale B D, apparirà tosto che l'angolo $CAB = CDB$, $CAD = CBD$, $ACB = ADB$, $ACD = ABD$, essendo questi angoli inscritti in un medesimo circolo, e due a due misurati dal medesimo arco. Sommando ora, termine a termine le quattro precedenti eguaglianze, si otterrà

$$CAB + CAD + ACB + ACD = CDB + CBD + ADB + ABD,$$

e riducendo, risulterà

$$A + C = B + D.$$

Dunque, *un quadrilatero è inscrivibile in un circolo, quando la somma di due de' suoi angoli opposti, è eguale alla somma degli altri due.*

E poichè la somma degli angoli al perimetro di un quadrilatero è eguale a quattro retti, si può altresì dire, che *perchè un quadrilatero sia inscrivibile in un circolo, occorre che i suoi angoli opposti sieno supplementari l'uno dell'altro.*

Ove poi si abbia un quadrilatero A B C D (Fig. 33), circoscritto ad un circolo di centro O, e si sieno in esso tirate le rette O A, O B, O C, O D dal centro ai vertici, e le perpendicolari O E, O F, O G, O H dallo stesso centro sui lati, si scorge a prima giunta, che i triangoli rettangoli H A O, A E O, E B O, B F O, F C O, C G O, G D O, D H O, nei quali resta scomposto il quadrilatero, sono eguali ogni due corrispondenti ad un angolo di quest' ultimo, perocchè hanno un cateto eguale e l'ipotenusa comune; quindi $HA = AE$, $EB = BF$, $CF = CG$, $GD = DH$.

Ora sommando termine a termine queste eguaglianze, si ricava

$$AE + EB + GD + GC = AH + HD + BF + FC,$$

la quale ridotta, diviene

$$AB + CD = AD + BC.$$

Dunque, *un quadrilatero è circoscrivibile ad un circolo, se la somma di due de' suoi lati opposti, è eguale alla somma degli altri due.*

Se in un esagono regolare A B C D E F (Fig. 34) si dividono per metà due angoli al perimetro A e B, e nel punto d' intersezione O delle bisettrici si fa centro, e con raggio O A si descriva una circonferenza, questa viene a passare per tutti i vertici del poligono, poichè, come è noto, i diversi raggi O C, O D, O E, O F condotti dal punto O a quei vertici, dividono tutti gli angoli al perimetro per metà. Avendosi inoltre dalla formola $\frac{2\,r\,(n-2)}{n}$, che gli angoli al perimetro dell'esagono regolare sono di 120°, le metà di questi angoli rimangono di 60°, epperciò i triangoli A O B, B O C, C O D sono triangoli equilateri.

Infine, siccome questi triangoli sono tutti eguali tra loro, le altezze O H, O G, O I ecc. in essi condotte, sono pure eguali tra loro, e così il circolo descritto con centro in O e con raggio eguale ad una qualunque di dette altezze, che sono apoteme del poligono regolare, risulterà inscritto in questo poligono.

Conseguentemente puossi conchiudere, che *dato un esagono regolare, si ha il raggio del circolo ad esso circoscritto nel lato, ed il raggio del circolo in esso inscritto nell'altezza di un triangolo equilatero di lato eguale al lato del poligono.*

Sempre quando sia dato un poligono regolare inscritto in un circolo, torna facile di tracciarne un altro al medesimo circoscritto, e di un medesimo numero di lati. Basta perciò, o condurre delle tangenti al circolo in cui è inscritto il poligono, parallele ai lati di questo, oppure innalzare delle perpendicolari nei singoli vertici del poligono inscritto, ai raggi del circolo condotti a questi vertici. Così, essendo dato ad esempio un ottagono regolare A B C D E F G H (Fig. 35), inscritto in un circolo di centro O, se si conducono delle tangenti a questo circolo, parallele ai lati dell' ottagono, si ottiene l'altro ottagono regolare A' B' C' D' E' F' G' H'; e tirando dai vertici del primo poligono, delle perpendicolari ai raggi condotti dal centro O a quei vertici, si ha un altro ottagono regolare 1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8' che è eguale al precedente, e del pari circoscritto al circolo, ed ha inoltre i lati paralleli ad un altro ottagono regolare 1 2 3 4 5 6 7 8 inscritto nel circolo, per modo da essere i suoi vertici collocati sulle metà degli archi, ossia nei punti di contatto del circolo coi lati dell'ottagono A' B' C' D' E' F' G' H'.

L'inscrivere in un dato circolo, un poligono di un dato numero

di lati, riducesi a trovare una lunghezza tale, che portata come corda sulla circonferenza del circolo, sia su questa contenuta un numero di volte, pari al numero di lati che deve avere il poligono.

Si è visto alla fine della teoria del primo libro, essere possibile geometricamente la costruzione di quei poligoni regolari, il cui numero di lati è una potenza perfetta del due (2^n), ovvero, una simile potenza moltiplicata per tre (3×2^n). È però nel libro seguente, che si potrà rilevare il modo d'inscrivere in un circolo altri poligoni regolari, e così completare la teoria su questo soggetto.

Ellisse. — Ellisse, chiamasi quella curva tale, che per ogni suo punto, la somma delle distanze da esso a due punti fissi è sempre costante. La curva rappresentata alla Fig. 36 della Tavola XIV è una ellisse, poichè è tale che congiungendo con rette due qualunque dei suoi punti M ed N con due speciali punti fissi F, F' esistenti nel suo interno, si ha $MF + MF' = NF + NF'$.

I due punti fissi F, F' son detti i *fuochi* dell'ellisse, e le rette FM, F'M, FN, F'N, ecc. condotte da quei punti ad un punto qualunque M, N... della curva *raggi vettori*. (Si vedrà in seguito la ragione di tali denominazioni). Si chiama inoltre *asse maggiore* la retta AB che passa per i fuochi ed è limitata dalla curva, ed *asse minore* la perpendicolare CD innalzata sulla metà di AB, e limitata pure dalla curva. Per ultimo distinguonsi nell'ellisse anche due *vertici* A e B negli estremi del suo asse maggiore, ed una *eccentricità* FO o F'O nella distanza da uno dei fuochi al suo centro.

Dalla definizione data della ellisse, avendosi che debb'essere $AF + AF' = BF' + BF$, se si toglie a ciascun membro di questa uguaglianza la medesima quantità FF', risulta $AF + AF = BF' + BF'$, ossia $2\,AF = 2\,BF'$, ossia ancora $AF = BF'$. Quindi il punto O che si trova per costruzione sulla metà dell'asse maggiore AB, si vede che si trova pure sulla metà della distanza focale FF'. Si può dunque dire essere l'asse minore CD la linea di simmetria dei punti A, F, B, F'. Per altra parte, se si osserva che la retta CD è perpendicolare alla AB e che $DF + DF' = CF + CF'$, è dato di ricavare che $FD = F'D$, $CF = CF'$ e di più $OD = OC$. Donde l'asse maggiore AB può ritenersi come linea di simmetria dei punti C e D. Dunque *i due assi della ellisse*

sono a considerarsi come le sue linee di simmetria: essi dividono l'ellisse in quattro parti uguali.

Dietro ciò è facile a concepirsi, come preso un punto qualunque M dell'ellisse, ad esempio sul quarto A D, si possa sempre trovare un suo corrispondente su ciascuno degli altri tre quarti D B, B C, C A, cioè un punto tale, che le distanze dai fuochi F, F' risultino rispettivamente eguali ad M F ed M F'.

Posto che M F + M F' = A F + A F' e che A F = B F', A F + A F' = A F + A F + F F' = A F + B F' + F F' = A B, può tosto dedursi che M F + M F' = A B. Così, *l'ellisse è una curva chiusa tale, che la somma dei raggi vettori condotti dai due fuochi ad un medesimo punto qualunque di essa, è costantemente uguale all'asse maggiore.*

Rappresentazione fisica dell'ellisse. — L'ellisse, come qualunque altra curva, può rappresentarsi materialmente, sia determinando varii punti di essa tra loro assai vicini perchè il tratto continuo con cui possono essere uniti si scosti con errore il meno sensibile dalla curva stessa, sia tracciandola a mezzo d'un calcatoio qualunque, con movimento non mai interrotto e secondo determinata legge. Nel primo caso si ha ricorso ad un metodo grafico, nel secondo ad un metodo meccanico.

Giova premettere anzitutto, che alla determinazione dell'ellisse possono concorrere vari elementi; ma qui per ora non può essere il caso, che di far calcolo di quelli di cui son già note le principali proprietà, e dei quali torna qui opportuno avvertire, si vale più comunemente la pratica.

Dalla definizione data dell'ellisse, è facile vedere come a determinare questa curva, servano l'asse maggiore ed i fuochi, oppure anche i due assi, chè in questo caso, i fuochi si trovano nei punti in cui l'asse maggiore è incontrato da un arco di circolo descritto, con centro in uno degli estremi dell'asse minore e con raggio uguale alla metà dell'asse maggiore. Perciò si andrà risolvendo la sola questione:

Costrurre un' ellisse essendone dati gli assi.

Siano A B, C D (Fig. 37) i due assi dati dell'ellisse da tracciarsi, già disposti l'uno perpendicolare all'altro, in modo da tagliarsi reciprocamente per metà. Il loro punto d'incontro O sarà quindi il centro della curva, e descrivendo poi con centro in D e con raggio

eguale ad A O un arco di circolo, i punti F, F' in cui quest'arco incontrerà l'asse maggiore A B, saranno i fuochi dell'ellisse, poichè F D = F' D ed F D + F' D = A B.

Per determinare ora varii punti della curva, si scelga un punto qulunque L sull'asse maggiore tra F ed O, quindi col compasso si prenda la distanza L A, e con questa come raggio, e facendo centro prima in F e poi in F', si descrivano due archi al disopra e due al disotto di A B; in seguito prendendo L B per raggio, e facendo centro di nuovo in F ed F', si descrivano altri quattro archi, che taglieranno i primi nei punti 1, 2, 3, 4, i quali saranno dell'ellisse richiesta, poichè la somma delle distanze da ciascuno di essi ai fuochi F, F' è per costruzione eguale ad L A + L B = A B.

Scegliendo altri punti tra F ed O, si potranno determinare analogamente nuovi punti della curva in quel numero che si vorrà; sicchè basterà infine unire tutti questi punti con una linea continua, per avere in questa rappresentata la voluta ellisse.

Questa costruzione, spiega in modo chiaro la posizione simmetrica che hanno tutti i punti d'una ellisse, per rispetto agli assi.

Perchè sia dato d'effettuare la costruzione precedente, fa d'uopo evidentemente che la distanza dai centri F, F', sia minore della somma dei raggi vettori o di A B, e nel medesimo tempo maggiore della loro differenza. Quest'ultima condizione esige che il punto L, sia tra O ed F. Infatti, prendasi per esempio un punto L', che sia situato tra A ed F; si avrebbe B L' > B F ed L' A < F A, dalle quali ineguaglianze si dedurrebbe B L' — L' A > B F — F A > B F — F' B > F F'; per cui la distanza F F', sarebbe minore della differenza dei raggi L' B, L' A.

Per determinare inoltre l'ellisse meccanicamente, si puntino due aghi nei fuochi F, F' e si fermino a questi aghi i capi di un filo di lunghezza eguale all'asse maggiore A B; si faccia in seguito scorrere una vite o calcatoio contro il filo tenendolo sempre teso, e la curva che risulterà tracciata quando detto calcatoio abbia fatto due semirivoluzioni, l'una al disopra e l'altra al disotto di F F', sarà l'ellisse richiesta. Tal metodo è impiegato ordinariamente trattandosi di tracciare un'ellisse sul terreno; ed in questo caso si sostituisca al filo sottile una corda più resistente, ed agli aghi e al calcatoio tre picchetti.

Centro, corde e diametri. — Come nel circolo, così anche nell'ellisse havvi un centro, delle corde e dei diametri: così dicesi *centro* il punto di mezzo O (Fig. 36) dell' asse maggiore, ossia il punto d' incontro dei due assi; *corda* ogni retta, come E G, L H, limitata dalla curva e che non passi pel suo centro; *diametro* ogni retta, come P Q, X Y, pure limitata dalla curva, ma che passi pel suo centro.

Le corde che uniscono gli estremi degli assi dell' ellisse sono eguali tra loro, poichè non sono altro che i lati di un rombo, avente per diagonali gli assi medesimi.

Tutti i diametri condotti sull' ellisse, restano divisi per metà nel centro O della curva. Difatto, tirando per O un diametro qualunque X Y, è chiaro per la simmetria della curva rispetto agli assi, che le distanze dei punti X, Y a questi medesimi assi, debbano essere due a due eguali, cioè debba aversi $X a = Y b$, $X c = Y d$; cosicchè il triangolo $X a O = Y b O$ ed il triangolo $X c O = Y d O$, epperciò $O X = O Y$.

Se si tirano nell'ellisse due corde qualunque E G, L H che sieno parallele tra loro, e quindi sui loro rispettivi punti di mezzo R, S si fa passare una retta P Q che termini alla curva, questa retta sarà un diametro dell'ellisse, come lo è pure nel circolo una retta che unisce la metà di due corde parallele, colla differenza però, che mentre nel circolo un tal diametro è sempre perpendicolare a quelle corde, nell'ellisse si verifica questo caso solo, quando esso si confonda con uno degli assi.

Per ciò dimostrare, suppongasi di aver condotto P Q pei due punti R ed O, ed E G per un punto S della P Q distante da O di $O S = O R$; allora per la solita ragione della simmetria della curva, le corde L H, E G saranno uguali, ed i punti G, L, H, E si troveranno due a due ad ugual distanza dagli assi dell'ellisse. Risulterà quindi evidente, che le due rette E H, G L passeranno pel centro O, e che il triangolo O R H sarà eguale ad O S E, il triangolo O R L eguale ad O S G, ed $R H = S E$, $R L = S G$, e siccome $R H = S L$ per costruzione, S E sarà eguale ad S G, e così la corda E G sarà divisa per metà in S; di più, i punti L, H, G, E saranno tutti ad egual distanza da P Q, e dal diametro X Y condotto parallelo ad L H ed E G, e le rette G H, E L parallele a P Q, ed eguali ad S R. Tirando ora due altre corde parallele alle precedenti, e per

due nuovi punti della P Q, ad ugual distanza dal centro O, si avrà pure che esse saranno uguali, ed i loro estremi due a due ad eguale distanza dagli assi dell'ellisse, e simmetricamente disposti rispetto ad X Y, come i punti L, H, G, E; dimodochè le rette che uniscono essi estremi due a due dalla medesima parte di P Q, saranno parallele a G H ed E L, e conseguentemente anche parallele a P Q, epperciò le nuove corde resteranno divise per metà da P Q. Dunque i punti di mezzo di tutte le corde parallele ad L H, si trovano sul medesimo diametro P Q.

Dietro l'esposto si può stabilire, che nell'ellisse: 1.° *ogni sistema di corde parallele ha il suo diametro particolare;* 2.° *l'asse maggiore, è il diametro corrispondente al sistema di corde parallele all'asse minore, e l'asse minore, il diametro corrispondente al sistema di corde parallele all'asse maggiore.*

Quando due rette condotte nell'ellisse sono reciprocamente diametri l'una rispetto all'altra, si dà loro il nome di *diametri coniugati.* Gli assi per esempio, sono diametri coniugati. Le due rette P Q, X Y, sono pure due diametri coniugati.

I diametri coniugati, corrispondenti ai due sistemi di corde parallele alle corde che uniscono gli estremi degli assi, sono uguali tra loro. Ciò si comprende facilmente, per la simmetria della curva rispetto agli assi.

I due assi dell'ellisse, sono i soli diametri coniugati perpendicolori tra loro.

Essendo condotto in una ellisse un diametro E G (Fig. 37), per determinare l'altro diametro coniugato, basta tirare una corda P Q parallela ad E G, e quindi unire con una retta S T, il punto di mezzo R di essa corda col centro O della curva.

Si può ora anche facilmente determinare il centro, gli assi ed i fuochi di una ellisse.

Sia data l'ellisse A D B C (Fig. 38). Si conducano due corde H I, P Q parallele tra loro, e si dividano per metà; si faccia quindi passare pei loro punti di mezzo S ed R il diametro E G, e nella metà di questo in O, si troverà il centro dell'ellisse. Sul diametro E G, si descriva una semicirconferenza che taglierà l'ellisse nel punto M; si tirino le corde supplementari M E, M G, e due diametri A B, C D loro paralleli, e si otterranno in questi i voluti assi dell'ellisse. Infatti, questi due diametri essendo paralleli alle due corde

supplementari M E, M G, risultano perpendicolari tra loro e coniugati, e quindi non possono essere che gli assi dell'ellisse. Determinati per tal modo gli assi, basterà infine far centro in D, e con raggio O B descrivere un arco di circolo, per avere nei suoi punti d'incontro F, F' coll'asse maggiore A B, i fuochi della curva.

Tangente all'ellisse. — Chiamasi tangente all'ellisse, ogni retta che ha con questa curva un sol punto a comune.

Il problema di condurre una tangente all'ellisse, ammette due soluzioni distinte, secondo che è noto il punto di contatto sulla curva, oppure un punto fuori di questa, per cui deve passare la tangente.

Essendo dato il punto di contatto M (Fig. 39) della tangente da condursi all'ellisse A D B C, sarà sufficiente di tirare il diametro M G, e quindi il suo coniugato N L, ed infine a questo una parallela M Q pel punto M, la quale sarà la tangente voluta. Infatti, ove M Q non fosse tangente all'ellisse, ma la incontrasse anche in altro punto Q, per la nota proprietà dei diametri coniugati, si avrebbe che il diametro M G dovrebbe tagliare M Q a metà; ma ciò è assurdo, non potendo due rette incontrarsi che in un sol punto.

Dovendo poi tirare la tangente da un punto P esterno all'ellisse, si comincierà dal descrivere dei semicircoli sull'asse maggiore A B, e sulle rette P F, P F' congiungenti il punto P coi fuochi F F'; poscia, si congiungeranno con rette i punti d'incontro S ed R dei semicircoli tra loro col punto P, e si otterranno per tal modo, le due tangenti all'ellisse P S, P R. I punti di contatto di queste tangenti colla curva, si troveranno in T e T', in cui quest'ultima è incontrata da due rette congiungenti i fuochi F', F coi punti Y, X, presi sul prolungamento delle rette F R, F' S a distanze R Y = R F ed S X = S F'. Infatti, osservando per esempio, che nel triangolo F Y F' la retta R O congiunge la metà dei lati F Y, F F', e che la stessa retta è per costruzione eguale ad A O, ne segue che F' Y è uguale ad A B; ma T Y = T F perchè il triangolo F T Y è isoscele; dunque F T + T F' = F' Y = A B, e così il punto T è un punto dell'ellisse. In modo analogo si dimostrerebbe che il punto T' è pure un punto dell'ellisse. Che poi qualunque delle rette P R, P S, non ha che solo tal punto T o T' comune colla curva, è facile a dimostrarsi, supponendo per un momento, che per esempio P R, possa incontrare la curva anche in un altro punto H; allora si vedrà che F' H + H Y > F' Y, e, siccome H Y = H F, pure

F′ H + H F > F′ Y > F′ T + T F; da cui deducesi che il punto H è fuori dell' ellisse.

Dalla fatta costruzione risulta che a condurre una tangente all'ellisse, essendo noto il punto di contatto, per esempio in T, si perviene eziandio tirando F′ T, e prolungandola di T Y = T F, quindi tirando F Y e dividendola per metà, ed infine facendo passare pel punto di mezzo R, e pel punto T, una retta, che sarà la tangente richiesta.

Con altra costruzione, si giunge parimente a tirare le tangenti all' ellisse, da un punto esterno. Così, essendo P (Fig. 40) questo punto ed A C B D l'ellisse, si faccia centro in P e con raggio P F si descriva un arco di circolo; indi si faccia pure centro in F′ e con raggio uguale all'asse maggiore A B, si descriva un altro arco di circolo che taglierà il primo in due punti G ed R; si tirino infine le rette G F, R F, ed i punti d'incontro T ed S di queste rette coll'ellisse, saranno i punti di contatto delle tangenti P T, P S. Infatti, condotte F′ G ed F′ T, si vede che F′ T = T G, e quindi che il triangolo F′ T G è isoscele; e poichè il triangolo F R G è pure isoscele, la retta P T risulta perpendicolare ad F′ G; onde la costruzione rientra nella precedente.

Una perpendicolare T V (Fig. 39) condotta alla tangente R P dal punto di contatto T, divide evidentemente l'angolo F T F′ per metà. Dunque ogni raggio F T, che partendo da F vada ad incontrare l'ellisse, si riflette secondo T F′, cioè facendo un angolo di riflessione uguale a quello d'incidenza. Ciò vuol dire, che ponendo in uno dei fuochi d'una ellisse una sorgente di calorico o di luce, o producendovi un qualche suono, od anche lanciando dal medesimo una palla elastica verso la curva, ammesso che la curva sia tale da poter riflettere e luce e calorico, e suono, ed eziandio far rimbalzare la palla, tutti i raggi luminosi, calorifici ed acustici avrebbero a concentrarsi nell'altro fuoco, e la palla, dopo d'aver incontrato la curva, a passare sul medesimo. Di qui la denominazione di raggi vettori alle rette F T, F′ T, e di fuochi ai punti F, F′.

Considerazioni sull'ellisse. — Da quanto si è detto intorno all'ellisse, è facile arguire, come allorquando gli assi di questa curva divengano tra loro eguali, essa si trasformi in un circolo, ed i due fuochi si riuniscano nel centro di questo, ed allorquando l'asse minore divenga nullo, la curva stessa si riduca ad una linea retta,

che è l'asse maggiore, e agli estremi di questo si trovino i due fuochi.

L'ellisse, si presenta quindi di forma più o meno allungata, secondochè i suoi assi, differiscono più o meno tra loro in lunghezza.

Nell'ellisse, solo gli assi sono diametri coniugati tra loro perpendicolari, mentre nel circolo tutti indistintamente i diametri coniugati, godono di quella proprietà. Ed infatti nell'ellisse, tutti i diametri coniugati diversi dagli assi, possono considerarsi come diagonali di altrettanti parallelogrammi romboidi formati da rette congiungenti i loro estremi, e nel circolo invece sempre come diagonali di quadrati in esso inscritti.

Già dal poco esposto può scorgersi come l'ellisse abbia per le ue proprietà molta analogia col circolo. È però al termine del libro seguente, in cui verranno svolte molte altre proprietà geometriche importanti di questa curva, che siffatta analogia si farà ancor più evidente.

Curve aperte.

Tra le curve aperte, le sole che possono formare oggetto di studio, sono quelle il cui andamento è in rapporto costante e con dati punti e con date rette, e fra queste, quelle che possono far parte degli elementi di Geometria, sono l'Iperbole e la Parabola.

Dell'Iperbole. — Iperbole, chiamasi quella curva tale che per ogni suo punto la differenza delle distanze da esso a due punti fissi è sempre costante. La curva rappresentata alla Fig. 41 della Tavola XIV è una Iperbole, poichè è tale che congiungendo con rette due qualunque dei suoi punti P e Q con due speciali punti fissi F, F' si ha $PF' - PF = QF' - QF$.

I due punti fissi F, F' sono detti i *fuochi* dell'iperbole, e le rette come F P, F' P, F Q, F' Q.... condotte da questi ad un punto qualunque P, Q.... della curva i *raggi vettori*, per la ragione stessa che nella ellisse.

Essendo F ed F' i fuochi di una iperbola, e P e Q due punti di essa, se tirasi una retta la quale unisca i due fuochi, risultano immediatamente coi raggi vettori, due triangoli F' F P, F' Q F, i quali oltre dal fare vedere come la distanza focale sia sempre minore della somma dei raggi vettori, dimostrano che per essere il lato F' F

maggiore della differenza degli altri due, la possibilità dell' esistenza sulla retta F F' di un punto A, tale da essere A F' — A F = P F' — P F; questo punto A, non potendo essere collocato sulla metà di F' F cioè in O perchè altrimenti la differenza tra O F' ed O F sarebbe zero, e non eguale perciò alla differenza di due raggi vettori condotti ad un medesimo punto della curva, essendo la sola perpendicolare innalzata sulla metà di una retta che gode della proprietà che di ogni suo punto la differenza delle rette condotte ai suoi estremi sia zero, ne risulta, che questo punto A può trovarsi tanto a destra, quanto a sinistra del punto O, e potendo trovarsi in due posizioni, vuol dire, che due sono sulla retta F F' i punti, che godono della proprietà di essere nella differenza delle distanze di ciascuno di essi co' punti F, F', eguale a P F' — P F. Essendo A il punto di destra, B quello di sinistra, ed essendo A F' — A F = B F — B F', risulta che levando da ciascun membro di questa eguaglianza la medesima quantità A B, si ha B F' — A F = A F — B F' ossia 2 B F' = 2 A F, ossia ancora B F' = A F, cioè che i punti A e B distanno egualmente dai due fuochi F ed F', e perciò ancora dal punto O.

Ma essendo P F' — P F = A F' — A F ed A F = B F', si ha A F' — A F = A F' — F' B ossia A F' — A F = A B, vale a dire, che tutti i punti dell'iperbole sono tali che, la differenza dei raggi vettori condotti da ciascuno di essi ai fuochi, è costantemente eguale alla retta A B, od in altre parole, è l'iperbole il luogo geometrico dei punti la cui differenza di distanza da due punti fissi, è costantemente eguale ad una retta data. I punti A e B, essendo amendue tali che la differenza delle distanze da ciascuno di essi ai due fuochi è eguale, essi appartengono alla curva; resta però a vedere se questi punti si raccordano tra loro e si raccordano coi punti P e Q.

Se nel punto O si innalza una perpendicolare alla retta F' F, come si è di già detto, nessun punto di questa perpendicolare appartenendo alla iperbole, si ricava tosto che, l'iperbole che passerà pel punto B non potrà passare pel punto A, in altre parole, che i punti A e B non possono venire uniti per tratto di curva, e risulteranno perciò, due le curve, l'una che passerà per B, l'altra che passerà per A, godendo amendue della medesima proprietà, facendo corpo l'una coll'altra, epperciò ricevendo il nome di iperbole, e ciascuna chiamandosi un ramo d'iperbole, oppure un'iperbola.

Passando i due rami dell'iperbole, l'uno per il punto A, l'altro per il punto B, resta a vedere l'andamento che essi tengono, se vanno cioè accostandosi alla retta C D, oppure se vanno allontanandosi. Innalzisi perciò nel punto A, ad esempio, una perpendicolare ad F′ F, ed osservisi se vi può essere un punto R di questa perpendicolare che appartenga all'iperbole. Ove R appartenga alla iperbole, per quanto si è già detto, occorrerebbe che F′ R — R F fosse eguale ad A B; ma facendo A G = A F, siccome R F = R G, ed A B = F′ G, è visibile bentosto, come nel triangolo F′ R G non possa essere F′ R — R G = F′ G, epperciò il punto R non possa appartenere alla curva.

Essendo F′ R — R F < A B, ed ogni punto R′ considerato verso C D siccome darebbe R′ G < R′ F ed R′ F′ < R F′; sarebbe a forziori F′ R′ — R′ F < A B; così si può conchiudere che, tutti i punti della iperbole, si andranno come è visibile alla Fig. 42, partendo sia da A come da B, allontanandosi costantemente dalla perpendicolare innalzata da questi punti sulla retta che congiunge i fuochi, ed allontanandosi perciò ancora dalla retta C D, innalzata perpendicolarmente sulla metà della distanza focale.

Oltracciò se si osserva come unendo un punto qualunque P (Fig. 42) di un ramo dell'iperbole coi due fuochi risulta un triangolo F P F′, sul cui lato F F′ è sempre possibile la costruzione di tre triangoli eguali F′ F P′, F′ F Q, F′ F Q′, i vertici dei quali essendo egualmente distanti dai fuochi, che quello del triangolo F′ P F, appartengono all'iperbole, è visibile tosto, come P′ sia il simmetrico di P, e Q′ il simmetrico di Q, rispetto alla retta F F′; e parimenti essendo C D linea di simmetria dei quattro punti P, P′, Q, Q′, sia pure questa una linea di simmetria dell' iperbole.

La retta che passando per i fuochi è limitata dall'iperbole, come A B, si chiama l'*asse trasverso* dell'iperbole, e gli estremi di questo asse i *vertici* dell'iperbole. La normale all'asse trasverso nel suo mezzo, si chiama l'*asse non trasverso*. Il primo asse, chiamasi altresì l'*asse determinato*, il secondo, *asse indeterminato*, ed il punto d'incontro dei due assi, il *centro* dell'iperbole.

Per le cose dette resta stabilito: 1.° *che l'asse trasverso è sempre minore della distanza focale, e minore ancora della somma dei raggi vettori;* 2.° *che la differenza fra i raggi vettori condotti ad un medesimo punto, è costantemente eguale all'asse trasverso;* 3.° *che i due*

assi dell'iperbole, sono a considerarsi come le sue linee di simmetria: essi dividono l'iperbole in quattro parti eguali.

Rappresentazione fisica dell' iperbole. — L'iperbole, alla pari della ellisse e di altre curve, può venire rappresentata materialmente, sia colla determinazione di punti sufficientemente vicini perchè il tratto con cui si deve raccordare si scosti con errore insensibile dalla curva stessa, sia col mezzo di calcatojo a movimento continuo.

Non si dirà del metodo meccanico, perchè oltre ad essere il medesimo poco impiegato è altresì poco comodo, si dirà quindi solo del metodo grafico.

L' iperbole, venendo divisa in quattro parti eguali dai suoi assi, è evidente, come la sua costruzione sia ridotta alla costruzione di un quarto, potendosi colla massima facilità, ed a termini della simmetria cogli assi, tracciarsene gli altri tre quarti.

Essendo A B (Fig. 42) l'asse trasverso dell' iperbole a tracciarsi, ed F, F' i suoi fuochi, si scelga sul prolungamento dell' asse trasverso, ed al di là dei fuochi, un punto qualunque L, indi con raggio L B e facendo centro in F', si descriva un arco di circonferenza che poi si tagli con un secondo arco di circonferenza descritto con centro in F e con raggio L A; il punto P d'intersezione apparterrà all'iperbole, poichè essendo P F' = L B, P F = L A è P F' — P F = L B — L A = A B. Cosicchè saranno determinabili tanti punti dell'iperbole quanti si vogliano, coll'intersezione di archi descritti con centro nei fuochi, e cou raggi eguali alle distanze, che corrono dai vertici a qualsiasi punto preso sul prolungamento dell'asse trasverso, al di là dei fuochi.

La determinazione di tutti i punti dell' iperbole, facendosi colla costruzione di triangoli aventi una base costante F F', ed in cui la differenza degli altri due lati è eguale ad A B, per la simmetria spiegata, risulterà come preso un punto qualsiasi L, e così le due lunghezze L A, L B, tali che la loro differenza sia eguale ad A B, non si abbia che fare centro in ciascuno dei fuochi, e con ciascuno dei raggi L A, L B, descrivere così quattro circonferenze, e ottenere nella intersecazione di queste, quattro punti dell' iperbole, vale a dire, la contemporanea costruzione dei quattro quarti dell' iperbole. Ogni variazione di L, dando per l' indicata costruzione quattro punti, è possibile la determinazione di una infinità di punti, e quindi un tracciamento d' esattezza desiderata della curva.

Il punto L, come si disse, deve essere preso al di là dei fuochi: e ciò perchè ogni qualunque punto G preso sulla distanza dai fuochi al vertice, essendo tale che $G B + G A < F F'$ perchè $B F' > A G$; le due distanze G B, G A, quantunque tali che la loro differenza sia eguale ad A B, tuttavia non possono essere lati di un triangolo avente per base F F', non potendo un lato di un triangolo essere, nè eguale, nè maggiore della somma degli altri due.

Corde e Diametri. — Dicesi *corda*, ogni retta come E H, N R, R E... ecc. limitata dalla curva, e che non passi pel centro. Dicesi *diametro*, ogni qualsiasi retta come X V, Q P', Y W... ecc., che passi pel centro. Un diametro però che sia limitato dalla curva, dicesi *diametro trasverso*, mentre quello non limitato, *diametro non trasverso.* Applicasi pure ai diametri, la denominazione di *diametro determinato* se è trasverso, di *diametro indeterminato* se non è trasverso.

Tutti i punti dell'iperbole essendo simmetrici rispetto ai due assi, ne risulta, che tirando dal punto P una parallela all'asse trasverso, questa incontrerà la curva in un punto Q, e resterà divisa per metà nel punto *p* dall'asse C D. Parimenti, pel punto P tirando una parallela all'asse non trasverso, questa incontrerà la curva nel punto P', e resterà divisa per metà dall'asse trasverso. Infine tirando la retta Q P', questa verrà divisa per metà nel punto O, e dall' asse trasverso e da quello non trasverso, epperciò divisa per metà dal centro della iperbola. Si può quindi conchiudere, che *tutti i diametri trasversi condotti nell' iperbole, restano divisi per metà dal centro di essa, e tutte le corde condotte parallelamente ad un asse, restano divise per metà dall' altro asse.*

Pel punto P tirando il diametro trasverso P Q', questo, oltre al restare diviso per metà nel centro O, risultando eguale al diametro Q P', perchè P è il simmetrico di Q e di P', e perchè nei triangoli rettangoli Q P' P, Q P Q' è $Q P' = P Q'$, è così dato potersi conchiudere, come *in una iperbole, è possibile sempre di tracciare due diametri eguali.*

Questa proprietà, porge immediatamente il mezzo di tracciare l'asse trasverso in un' iperbole, colla conoscenza del centro. Infatti, facendo centro nel centro dell'iperbole, e con raggio qualsiasi descrivendo un arco che tagli l'iperbole, ad esempio nei punti Q, Q', condotta la retta che unisce il centro col punto di mezzo della

corda Q Q′, la porzione di questa retta compresa tra i rami dell' iperbole, sarà il domandato asse trasverso, inquantochè essendo per costruzione O Q = O Q′, cioè P′ Q, P Q′ due diametri eguali, i punti Q e Q′ risultano simmetrici rispetto alla tracciata retta, in forza della perpendicolarità di Q Q′ con I O, e dell'eguaglianza di I Q con I Q′.

Ma non solo, nell' iperbole è sempre possibile di tracciare due diametri eguali, ma è ancora sempre possibile di tracciare due corde eguali. Infatti condotta una corda qualsiasi E H, se questa la si divide per metà nel punto X e per questo si fa passare un diametro, pel quale poi da un punto V collocato ad una distanza O V = O X si conduce una parallela, si avrà in questa parallela limitata dalla curva, una corda N R che sarà eguale alla corda E H. Suppongasi che la parallela tracciata pel punto V, venisse limitata in N′ ed in R′ dalle rette tirate dai punti E ed H passanti pel punto O, ne risulterebbe per l' eguaglianza dei triangoli E X O, O V N′, e per l' eguaglianza altresì dei triangoli H X O, R′ V O, originate queste eguaglianze dall' eguaglianza di un lato O X = O V, e dall' eguaglianza di due angoli, l'uno opposto al vertice, l' altro alterno interno; che V N′ = X E, V R′ = X H, e per essere X E = X H anche V N′ = V R′. Ora i punti N′ ed R′, essendo collocati sopra rette che passando pel centro dell' iperbole vanno ad un punto di essa, non che ad eguale distanza dal centro che i punti E ed H, non possono a meno di appartenere alla curva, ed essere così E N ed H R, due diametri dell' iperbole, ed R N una corda eguale all'altra corda E H.

Essendo eguali e parallele due corde E H, R N, pure eguali e parallele saranno le altre due corde E R, N H, poichè la figura E H N R, essendo parallelogramma siccome avente due lati E H, R N, opposti, eguali e paralleli, è E R = N H. Inoltre, le diagonali di questo parallelogramma essendo due diametri dell' iperbole, la loro intersezione è contemporaneamente centro di figura del parallelogramma e centro dell' iperbole; cosicchè tirato per esso una retta, cioè un diametro parallelo ed E H, questo divide le due corde parallele E R ed H N per metà, nello stesso modo che lo sono divise dal diametro X V, le corde E H, R N. Analizzando fra loro i quattro punti E, H, R, N, è assai facile lo scorgervi, come sieno ad eguale distanza dagli assi i punti R ed N, e parimenti ad eguale distanza dagli assi i punti E ed N; come sieno ad eguale distanza poi tutti i quattro punti dal

diametro X V, e parimenti ad eguale distanza sieno tutti e quattro i punti dal diametro T U, o per dir meglio, i due diametri X V, T U sieno le linee di simmetria dei quattro punti E, H, R, N. Si potrà quindi conchiudere, che *due corde parallele nell'iperbole sono eguali, se ad eguale distanza dal centro, od ancora, se i loro estremi si trovano in simmetria con due diametri condotti, l'uno parallelamente alle corde, l'altro che ne unisca i punti di mezzo.*

Ciò posto, se si conducono due corde parallele alle corde E H, R N, come *e h, r n,* che sieno tali che $o\,x = o\,v$, esse saranno eguali tra loro due, ed i punti *e, h, r, n* equidisteranno dalla medesima retta T U tirata pel centro parallelamente sia ad E H che ad *e h*, ed equidisteranno dalla retta che congiungerà i punti di mezzo delle due corde *e h, r n.* Ma i punti *e, h, r, n,* oltre ad equidistare dalla medesima retta da cui equidistano i quattro punti E, H, R, N, sono tali che equidistano nello stesso senso, per rispetto agli assi, da cui equidistano i punti E, H, R, N, onde le corde *e r, h n*, parallele alle corde E R, H N; epperciò X V parallela ad *e r*, e le distanze *e x, r v, x h, v n* eguali tra loro, e quindi la stessa retta X V che divideva per metà le due corde parallele E H, R N, dividere pure per metà le altre due corde parallele *e h, r n*, e quindi qualsivoglia altra corda parallela. Il diametro X V, essendo tale che divide per metà le corde condotte parallelamente ad E H, si dirà essere il luogo geometrico dei punti di mezzo delle corde condotte parallelamente ad E H. Epperciò, condotte in una iperbole due corde parallele, e queste divise per metà, la retta che congiungerà questi punti di mezzo, sarà un diametro che dividerà per metà tutte le altre corde che parallelamente alle prime si possono condurre. Data quindi una iperbola, se ne troverà il centro, dividendo per metà il diametro ottenibile sempre colla congiunzione dei punti di mezzo di due corde parallele. Può quindi stabilirsi che nell'iperbole 1.° *ogni sistema di corde parallele ha il suo diametro particolare;* 2.° *l'asse trasverso è il diametro corrispondente al sistema di corde parallele all'asse non trasverso, e l'asse non trasverso il diametro corrispondente al sistema di corde parallele all'asse trasverso.*

Alloraquando due diametri sono tali che le corde condotte parallelamente ad uno, restano divise per metà dall'altro, essi si chiamano, siccome nella ellisse, *diametri coniugati.* Così, i due diametri X V, T U sono due diametri coniugati, essendochè quello X V divide

per metà due corde qualsiansi come E H, *r n*, condotte parallelamente al diametro T U, e quello T U divide per metà due corde qualunque come E R, *h n*, condotte parallelamente al diametro X V. Dalla definizione dei diametri coniugati scorgesi bentosto, come essendo dato in una iperbola un diametro, per tracciarne il coniugato, basterà condurre due corde qualunque parallele al diametro dato, che la retta che congiungerà il punto di mezzo di queste, sarà il diametro domandato.

I due assi dell' iperbole essendo le sue linee di simmetria, sono come nella ellisse due diametri coniugati perpendicolari tra loro.

Ritornando sull' iperbole al libro terzo, si vedrà come due diametri coniugati sono sempre l'uno trasverso, l' altro non trasverso, ad eccezione di un solo caso in cui sono entrambi non trasversi, ed in cui ricevono il nome speciale di *assintoti*, parola che significa non coincidenti, perchè appunto essi vanno sempre avvicinandosi alla curva senza però giungere a coincidervi, vale a dire due diametri indeterminati.

Tangente all'iperbole. — La tangente all'iperbole, come la tangente ad ogni curva, è una retta la quale ha un sol punto comune colla curva e si mantiene sempre da una medesima parte, inquantochè diversamente, malgrado avesse un sol punto comune, essa taglierebbe la curva, sarebbe cioè una secante.

Allorquando un luogo geometrico di punti è tale che ha tangente, esso è una curva. Si verrà quindi dimostrando come l' iperbole sia effettivamente una curva, cioè a dire, come sia una curva, il luogo geometrico dei punti la cui differenza di distanza a due punti fissi è costantemente eguale ad una lunghezza data. Se da un punto M qualsiasi dell' iperbole, con raggio M F, cioè con raggio eguale alla distanza da esso al fuoco F, si descrive una circonferenza, e dopo condotto il raggio vettore F' M, si congiunge il punto R d'intersecazione di questo raggio vettore colla circonferenza, col fuoco F; la retta che passando pel punto M, passerà pel punto Q di mezzo di F R, è una tangente all'iperbole. A dimostrare che la retta Q M è tangente all'iperbole, vale a dire che essa ha un sol punto comune coll'iperbole, suppongasi che la retta Q M non sia una tangente, che essa incontri cioè la curva in un punto, ad esempio Z. Questo punto dovendo appartenere alla curva ed alla perpendicolare Q M stata innalzata sulla metà di F R, dovrebbe essere tale che fosse Z F' — Z F =

A B, Z F = Z R ossia A B = Z F′ — Z R; ma se osservasi che M F = M R e che M F′ — M F = A B = F′ R, è visibile bentosto come colla considerazione del triangolo F′ R Z, non possa essere la differenza dei due lati Z F′ e Z R, eguale al terzo lato F′ R, e quindi il punto Z appartenere alla curva, laonde la retta Q M non ha altro punto che il punto M di comune colla curva.

Se si considera poi un punto qualsiasi, collocato dall'altra parte della retta da cui trovasi la curva, come ad esempio il punto V, è dato altresì di rilevare, che ove questo punto avesse ad appartenere alla curva, dovrebbe essere tale che F′ R + V F fosse eguale a F′ V cioè V F < V R, perchè altrimenti, il lato F′ V del triangolo F′ R V non potrebbe eguagliare la somma degli altri due lati F′ R, R V; ma se osservasi che dal triangolo F R V si ha avvece V F > V R a motivo che V F è opposto ad un angolo maggiore, dal momento che la perpendicolare abbassata dal vertice V cade fra Q ed R, è d'uopo conchiudere che il punto V nè qualsiasi altro punto preso da quella parte della Q M, può appartenere alla curva, e quindi la curva mantenendosi sempre da una medesima parte, sia la retta Q M una vera tangente.

Considerando ora che F′ M ed F M sono i raggi vettori del punto M, e che per essere M F = M R siccome raggi dello stesso circolo, la retta che unisce la metà della base del triangolo F M R col vertice M, è bisettrice dell'angolo al vertice, si dirà che *la tangente all'iperbole in un punto dato è la bisettrice dell'angolo formato dai raggi vettori in quel punto.*

Considerazioni sull'iperbole. — Dalle semplici cose dette intorno all'iperbole, è facile lo arguire, che allorquando si faccia l'asse trasverso eguale a zero, si riduca l'iperbole ad essere una retta perpendicolare sulla metà della retta che ne congiunge i fuochi; che alloraquando si facciano coincidere i fuochi cogli estremi dell'asse trasverso, si riduca l'iperbole a due rette indeterminate, l'una sul prolungamento dell'altra, ed il cui capo di una, dista da un capo dell' altra, di una quantità eguale alla distanza focale. L' iperbole quindi prende forma più o meno aperta, secondochè più o meno grande, ne è la distanza che corre da ciascun fuoco al rispettivo vertice.

Gli elementi che costituiscono l' iperbole, alla pari delle proprietà che caratterizzano questa curva, hanno una grande analogia cogli

elementi e proprietà dell'ellisse, epperciò ancora col circolo. Questa analogia fa appunto tenere posto al libro seguente, come è già stato detto, dello studio delle proprietà geometriche, od in termine più pratico, delle proprietà quadrate delle qui citate curve.

Della parabola. — Parabola, chiamasi quella curva tale, che ogni suo punto è equidistante da una retta fissa, e da un punto parimenti fisso. La curva rappresentata alla Figura 44, è una parabola, essendochè qualunque punto P o Q di essa è equidistante dalla retta fissa A B e dal punto fisso F, cioè è P D = P F, Q E = Q F.

La retta fissa A B chiamasi la *direttrice della parabola,* il punto fisso F il *fuoco della parabola,* ed ogni qualsiasi retta condotta dal fuoco alla curva un *raggio vettore.*

Essendo A B la direttrice ed F il fuoco, si esaminerà quale sia l'andamento del luogo geometrico dei punti equidistanti da A B e da F, cioè si esaminerà l'andamento della parabola. Egli è chiaro che se abbassasi dal fuoco F una perpendicolare sulla direttrice A B, e se dividesi questa per metà nel punto V, questo punto apparterrà alla parabola, per essere equidistante da F e da A B. Resta quindi a vedere, l'andamento che avrà la curva che passando pel punto V si mantiene equidistante da F e da A B, se cioè, essa andrà o non, accostandosi alla direttrice. Per ciò si immagini condotta pel punto V una parallela ad A B, perpendicolare cioè a C F, e suppongasi che la curva passasse per un punto G preso su di quella parallela; se ciò fosse dovrebbe essere G H = G F, ma poichè G H = V C = V F, nasce immediatamente che G F non può essere eguale a V F, dal momento che il triangolo G V F è un triangolo rettangolo, epperciò l'ipotenusa sempre maggiore di ciascuno dei cateti. Il punto G quindi non può appartenere alla curva, e per medesima ragione e dimostrazione non può appartenere alla curva qualsiasi altro punto G', preso nell'altro senso della parallela stata tirata dal punto V. La curva perciò che passerà pel punto A non si terrà parallela alla direttrice, resta solo di vedere se si avvicinerà oppure se si scosterà.

Supponendo il caso che la parabola si avvicinasse alla direttrice, venisse cioè a passare per un punto L ad esempio, egli è evidente che dovrebbe in tal caso essere L F = L R; ma siccome dal punto L abbassando una perpendicolare su C F questa viene a cadere nello spazio V C in un punto N ed essere N C = L R, e quindi

$NC < VC$, oppure $NC < VF$ ed a forziori $NC < FN$, l'ipotenusa LF del triangolo rettangolo LNF essendo maggiore di ciascun dei cateti, maggiore perciò di FN, il quale a sua volta era di già maggiore di NC ossia di LR, ne risulta essere a più forte ragione $LF > LR$, ossia non potere qualsivoglia punto L preso verso la direttrice appartenere alla curva. La parabola quindi che passerà pel punto V andrà costantemente scostandosi tanto al dissopra quanto al dissotto della direttrice AB; ed il punto V sarà della parabola il più vicino alla direttrice.

Osservisi ancora se l'andamento della curva sia simmetrico rispetto alla retta CF. Per ciò, supponendo che S sia un punto della parabola, cioè un punto tale che $ST = SF$, se per questo punto si conduce una parallela ad AB, perpendicolare perciò a CF, e si fa $S's = Ss$; egli risulterà che tirando per questo punto S' una parallela $S'T'$ a CF, ed una retta al fuoco, sarà $S'T' = S'F = ST = SF$ perchè ST ed $S'T'$ essendo parallele comprese fra parallele sono eguali tra loro, ed $S'F$, SF essendo ipotenuse di due triangoli rettangoli SsF $S's F$ eguali, sono pure eguali, ed infine essendo per supposizione, $ST = SF$, sono eguali altresì $S'T$ e $S'F$, ed il punto S' appartiene perciò alla parabola. Qualsivoglia punto della parabola ha quindi il suo simmetrico, ad eguale distanza della perpendicolare abbassata sulla retta, che passando pel fuoco è perpendicolare alla direttrice. Questa retta che passando pel fuoco è perpendicolare alla direttrice, divide perciò in due parti eguali la parabola, e chiamasi l'*asse della parabola*, ed il punto d'incontro dell'asse colla parabola, il *vertice della parabola*.

Rappresentazione fisica della parabola. — L'asse nella parabola essendo la sua linea di simmetria, ne risulta che determinati i punti collocati da una parte di esso, si otterranno gli altri, mediante perpendicolari abbassate sull'asse dai punti conosciuti, e prolungate di una quantità eguale.

Per determinare i punti di parabola collocati da una parte dell'asse, non si avranno che scegliere diversi punti sull'asse, più o meno vicini, più o meno numerosi, a seconda dell'esattezza desiderata, indi per ciascuno di essi condurre delle parallele alla direttrice, e tagliarle medianti archi descritti con centro nel fuoco e con raggi rispettivamente eguali alle distanze che corrono dal

piede di ognuna di esse, al punto d'incontro dell'asse colla direttrice. Così essendo A B (Fig. 45) la direttrice ed F il fuoco di una parabola a tracciarsi, si scelgano diversi punti sull'asse C D come D, E, G, ecc., e per ognuno di essi si conducano delle parallele alla direttrice, che poi si taglino mediante degli archi descritti con centro in F, con raggio D C quella condotta pel punto D, nei due punti H ed H', con raggio E C quella condotta pel punto E, nei punti I ed I', con raggio G C quella condotta pel punto G, nei punti K ed K', e così successivamente. I punti H, H', I, I', K, K' sono altrettanti punti della parabola, essendochè H F = H N = H' F = H' N' per costruzione, e parimenti per costruzione I F = I M = I' M' = I' F, K F = K L = K' F = K' L'.

Corde e Diametri. — Ogni retta tracciata in una parabola non parallelamente all'asse, è una *corda;* ed ogni retta tracciata parallelamente all'asse, è un *diametro.* Tutti i diametri quindi tracciabili in una parabola sono paralleli tra loro.

Se da un punto qualsiasi P di una parabola (Fig. 45) si conduce un diametro P Q, cioè una parallela all'asse C G, poichè unendo un punto qualsiasi di essa come R col fuoco F, ed il punto P parimenti col fuoco, si ha sempre che P F = P S, ne deriva immediatamente come non possa essere R S = R F, imperocchè dovrebbe essere il lato P R del triangolo P R F di cui non cesserà mai l'esistenza nemmeno all'infinito, eguale alla differenza degli altri due lati R F e F P, e quindi come non possa il punto R appartenere alla parabola, e medesimamente non possa appartenere alla parabola altro punto diverso dal punto P. È dato perciò di conchiudere che *i diametri della parabola non hanno che un sol punto d'incontro.*

Ora bene, ogni diametro nella parabola condotto da un punto di essa, non incontrando in nessun altro punto la curva, è dato altresì di stabilire, non esistervi nella parabola, due punti che uniti diano una retta parallela all'asse, oppure due punti che collocati in una medesima metà della parabola diano una retta che possa incontrare l'asse non già nel suo prolungamento fuori della curva, ma bensì nel suo interno. La parabola è quindi una curva che mentre va allontanandosi costantemente dalla sua direttrice, va pure costantemente allontanandosi dal suo asse. Ma se osservasi che tutti i punti di una parabola dovendo essere equidistanti e dal

fuoco e dalla direttrice, possono considerarsi siccome i vertici di triangoli isosceli aventi per base una retta variabile, che partendo costantemente dal fuoco va alla direttrice, egli è facile di rilevare, che queste basi andando gradatamente formando colle direttrice un angolo continuamente più piccolo sino all' infinito, esse tendono a divenire parallele alla direttrice, quantunque mai vi giungano, e conseguentemente a questa tendenza di parallelismo delle basi alla direttrice, tendano i vertici dei triangoli isosceli ad acquistare una posizione parallela all'asse altresì, senza però mai poterla raggiungere. Puossi quindi definire *la parabola, essere quella curva che partendo dal suo vertice va continuamente allontanandosi dalla direttrice e dall' asse, e tende costantemente di divenire parallela all' asse, senza però mai giungervi, nemmeno all' infinito.* Possono quindi esistere sempre sulla parabola due punti, che la retta che li unisce od il suo prolungamento, formi coll' asse un angolo minore di ogni quantità data. Ogni retta perciò che non sia parallela all' asse, vale a dire *ogni corda, incontrerà sempre la parabola in due punti.*

Ogni punto della parabola avendo il suo simmetrico all' estremo di una perpendicolare abbassata sull' asse, ne risulta che tutte le corde condotte perpendicolarmente all' asse, o per meglio dire, tutte le corde condotte parallelamente alla direttrice, restano divise per metà dall' asse.

Sia I I′ (Fig. 45) una di queste corde perpendicolari all' asse, cioè divisa per metà nel punto E. Egli sarà facile il vedere, che se pel punto E conducesi qualsiasi corda nella parabola, come ad esempio H K′, K H′, queste corde non restino punto divise per metà nel punto E; basterà diffatti immaginare condotte le corde H I′, I K, H′ I′, I′ K′, per vedere che tanto i due triangoli E I H, E I′ K′ come i due triangoli E I K, E I′ H′ malgrado che abbiano il lato $EI = EI'$, gli angoli $HEI = K'EI'$, $IEK = I'EH'$ perchè opposti al vertice, non sieno punto eguali, non essendo parallele le corde I H, I′ K′ e I K, I′ H′ che per quanto fu detto, incontrano l'asse fuori della parabola formando naturalmente due angoli acuti col medesimo; quindi come non possa essere $EH = EK'$, $EK = EH'$ opponentisi uno ad un angolo acuto, l'altro ad un angolo ottuso, ma avvece $EH < EK'$, $EK > EH'$, vale a dire più lunga la porzione di corda il cui estremo è più lontano dalla direttrice. Tracciata perciò in una parabola una

corda qualsiasi, il punto di mezzo di questa sarà collocato in quella metà della parabola, che ha degli estremi della corda, il più distante dalla direttrice.

Ciò posto, sieno T H ed H' K due corde parallele tracciate nella parabola rappresentata alla Fig. 45; egli è ovvio il vedere come gli estremi di ciascuna di dette corde, che più sono lontani dalla direttrice, sieno collocati da una medesima parte della parabola, e quindi come da una medesima parte della parabola, si trovino pure i punti di mezzo di esse corde. Essendo Z ed Y questi punti di mezzo, si uniscano, e si veda la direzione che avrà una tale retta. Questa retta dovendo essere tale, che essa od il suo prolungamento deve dividere per metà tutte le corde che parallelamente a quelle considerate si possano condurre, a motivo della simmetria della parabola relativamente al suo asse, ne segue, che ove suppongasi che la retta Z Y non fosse parallela all'asse, ne avverrebbe che il suo prolungamento incontrerebbe, o l'asse oppure la curva. Nel caso che incontrasse l'asse, questo punto d'incontro dovrebbe dividere per metà una terza corda parallela da questo tirata, ma ciò non può essere per quanto fu dimostrato, e perchè deve il punto di mezzo di corde parallele, trovarsi collocato dalla medesima parte di una parabola. Nel caso in cui incontrasse la curva, la parallela tirata da questo punto non può avere il suo punto di mezzo nell'estremo. Cosicchè, la retta che unisce i punti di mezzo di due o più corde parallele tirate in una parabola, è parallela all'asse, cioè è un diametro.

Puossi quindi stabilire che nella parabola: 1.° *ogni sistema di corde parallele ha il suo diametro particolare;* 2.° *l'asse è il diametro corrispondente al sistema di corde parallele alla direttrice;* 3.° *le differenze fra due corde parallele qualsiansi sono costanti.*

Essendo data una parabola, non si avranno dietro i principii stabiliti, che a condurre due corde parallele qualunque, come H T, K H', per avere nella linea che unisce i punti di mezzo Z, Y di queste, un diametro; ed in seguito che a tirare una corda perpendicolare a questo diametro, come ad esempio I I', per avere nella parallela condotta pel punto di mezzo E di questa, l' asse C E della parabola.

Parimente essendo data una parabola ed un diametro P' Q non si avranno dietro i principii stabiliti che a tracciare da un punto

qualsiasi K una retta qualsiasi, e dal punto O d'intersezione di questa col diametro dato portare una distanza O X = O K, indi dal punto X menare una parallela al diametro che taglierà la parabola nel punto U, per avere nella corda K U una corda che sarà divisa per metà dal diametro dato, cioè una corda relativa al diametro dato, perchè infatti nel triangolo U X K essendo O K = O X e O D' parallelo ad U X è D' K = D' U.

Tangente della parabola. — È tangente alla parabola la retta che avendo un solo punto di comune, è tale che la curva trovasi collocata intieramente dalla medesima parte.

Essendo M un punto qualsiasi della parabola (Fig. 46), se tirasi il raggio vettore M F e quindi una parallela M D all'asse, ed uniscasi in seguito il punto M col punto I di mezzo della retta F D, questa retta M I sarà una tangente alla parabola, cioè una retta che non avrà che il punto M di comune colla curva, ed avrà la curva intieramente collocata da una parte di essa. Infatti, la retta I M ove avesse un altro punto di comune colla curva diverso dal punto M, per esempio M', questo punto dovrebbesi trovare contemporaneamente sulla retta I M e sulla curva, in guisa che oltre l'essere M' D = M' F fosse pure M' E = M' F. Ma se osservasi che M' E è perpendicolare ad A B ed il triangolo perciò D E M' un triangolo rettangolo, è visibile ben tosto che il cateto M' E è minore dell'ipotenusa M' D, e non essendo perciò eguali queste due rette, il punto M' non può appartenere alla curva, come non vi può appartenere qualsiasi altro punto considerato sulla I M, tanto da una parte quanto dall' altra del punto M.

Ma la retta I M oltre all'avere il solo punto M di comune colla curva essa le è tangente, imperocchè se la tagliasse in quel punto, in allora la curva dovrebbe venire a passare per un punto G dall'altra parte della retta, e si dovrebbe così avere G H = G F.

Or bene, tirando la retta G D, dal triangolo rettangolo G H D vedesi come G D sia più grande di G H, e dal triangolo G D F come G F più grande ancora di G D, per cui a forziori G F > G H, il punto G quindi non può appartenere alla curva, come non vi può appartenere qualsiasi altro punto preso da quella parte della I M, è perciò questa retta una vera ed effettiva tangente.

Ora osservando che I M, è la retta che congiunge il vertice M colla metà della base F D, del triangolo isoscele D M F, è dato con-

chiudere, come *una tangente alla parabola in un punto dato è la bisettrice dell'angolo formato dal raggio vettore condotto a quel punto con una parallela all' asse, tirata pure pel punto dato.*

Prolungando la tangente M I sino all' incontro dell'asse nel punto O, ed abbassando dal punto M una perpendicolare M X sull' asse, se si osserva che l' angolo M O F è eguale all' angolo D M O, siccome alterno interno a motivo delle parallele O F ed M D, che l' angolo O M F = O M D, essendo O M la bisettrice dell' angolo D M F, che perciò il triangolo O M F è un triangolo isoscele, ed O F = F M egli è facile di vedere, che essendo M D = M F, M D = C X epperciò O F = C X, come togliendo da questa eguaglianza la medesima quantità V F = V C, risulti O F — V F = C X — V C, ossia V X = V O; potersi cioè conchiudere, che *il vertice di una parabola è equidistante, dal punto in cui una tangente incontra l' asse, e dal piede della perpendicolare abbassata sull'asse dal punto di contatto.*

Ciò posto, essendosi detto che ogni diametro ha un sistema di corde parallele che divide per metà, cioè che prendendo sulla tangente O M un punto P, e per questo tirando una parallela all'asse che incontrerà la parabola nel punto U, sia U L un diametro attraverso al quale è possibile di condurre delle corde che vengano da questo divise per metà nel punto d' intersezione, suppongasi fra queste, tirata la corda M T dal punto M di contatto della tangente O M. Se osservasi che ogni qualsiasi corda parallela ad M T deve venire dal diametro U L divisa per metà, sarà facile il vedere come pel punto U tirando una parallela, poichè a zero riducesi la corda, sia questa parallela una tangente alla parabola nel punto di contatto U, e quindi in generale come, *ogni corda parallela ad una tangente è divisa per metà dal diametro passante pel punto di contatto.*

Ogni tangente, essendo la bisettrice di un angolo fatto nel punto di contatto con un raggio vettore ed una parallela all'asse, ne segue che allorquando la tangente formerà coll'asse un angolo semiretto, sarà il punto di contatto collocato su di una perpendicolare all'asse nel fuoco. Ora bene, in tale caso formasi evidente, come sapendo che ogni corda parallela ad una tangente viene divisa per metà dal diametro passante per il punto di contatto, ove sia data una parabola e proposta la determinazione del fuoco, non si abbia che a tracciare una corda che formi coll'asse un angolo semiretto,

pella metà di questa fare passare un diametro e pel punto d'incontro di questo colla curva, abbassare una perpendicolare sull'asse, il piede della quale sarà il domandato fuoco.

Tracciata una tangente O M, sarà sempre possibile a causa della simmetria della parabola relativamente al suo asse, di tracciare un altra tangente O Y, il cui punto di contatto si trovi sul prolungamento della M X.

In generale, essendo proposto di tirare ad una parabola delle tangenti da un punto dato o scelto sul prolungamento dell'asse, si porti una distanza V X = V O, e pel punto X si tiri una perpendicolare all'asse, che incontrerà la parabola in due punti che saranno i punti di contatto delle domandate tangenti, e ciò in virtù della dimostrata proprietà d'equidistanza del vertice, dall'intersezione dell'asse colla tangente, e dall'intersezione dell'asse con una normale ad esso abbassata dal punto di contatto.

Allorquando si hanno due tangenti ad una parabola come P T, P M, tali cioè che la loro intersezione avvenga in un punto non collocato sull'asse della parabola, i punti di contatto, la retta che li unisce e le porzioni del diametro tirato dal punto d'intersezione delle tangenti, hanno una relazione identica col caso delle due tangenti il cui punto d'intersezione è collocato sull'asse, vale a dire *1.° la retta che unisce i punti di contatto di due tangenti tirate ad una parabola, è divisa per metà dal diametro passante pel punto di intersezione, 2.° il diametro passante pel punto d'intersezione, forma due distanze eguali nelle distanze che corrono dal punto d'intersezione colla curva, al punto d'intersezione delle tangenti ed al punto di mezzo della retta che congiunge i punti di contatto.*

Cosicchè data una parabola, dovendo da un punto parimenti dato fuori di essa P, tracciare delle tangenti, si comincierà dal segnarne l'asse al che se ne è visto il modo, indi si traccierà dal punto dato per cui si debbono tirare le tangenti, un diametro P L, ed in seguito una corda relativa, cioè che da esso sia divisa per metà, Q K. Portata una distanza U R = P U, e pel punto R tirata una parallela M T alla corda Q K, gli estremi M e T, saranno i punti di contatto delle domandate tangenti. Infatti essendo U P = U R, la corda M T parallela alla Q K, divisa perciò essa pure per metà in R dal diametro passante per P, sono le due rette P T, P M due tangenti alla parabola.

Considerazioni sulla parabola. — Dalle poche tracciate nozioni sulla parabola è dato di rilevare, come la sua più o meno grande apertura dipenda dall'essere il fuoco più o meno distante dalla direttrice, che quindi nel caso in cui il fuoco sia collocato sulla direttrice, il luogo geometrico parabola si riduca alla direttrice stessa, e quando il fuoco si immagini all'infinito, il luogo geometrico parabola si riduca all'asse.

Merita questa curva di essere studiata pel frequente suo impiego nelle arti.

Chiamasi la parabola per sopranome la *curva del cane*, essendochè, è un arco di parabola la curva descritta dalla corsa di un cane, che partendo dal punto M insegua una lepre che parte dal punto P nella direzione P T raggiungendola in T.

TRISEZIONE DELL' ANGOLO.

Allo scopo di fare apprezzare il valore delle curve considerate come determinati luoghi geometrici, si espone la risoluzione dell' importante quesito della trisezione dell' angolo, fatta per mezzo della *concoide di Nicomede,* ossia del luogo geometrico dei punti, che sorpassano di una quantità costante, delle rette tirate da un punto fisso ad una retta fissa. Allorquando è dato un angolo a triseccare, a dividere cioè in tre parti eguali, ad eccezione che egli sia retto, nel qual caso il problema 5.° annesso al libro primo ne traccia la risoluzione, del resto la sua soluzione è assai complicata, ed oltre a questa complicatezza, non effettuabile col solo compasso, senza il concorso cioè di linee curve, il cui tracciamento non essendo che approssimativo, non altrimenti che approssimativo è il risultato del loro impiego.

Essendo intanto B A C l'angolo a triseccare, si immaginino condotte le trisettrici A E, A D, poscia con centro nel vertice dell'angolo, descritto un arco, tirate in seguito le corde B D, D E, E C che evidentemente riuscirebbero eguali tra loro, e per ultimo condotte le corde B E, D C che riescirebbero pure eguali tra loro, e tali che quella A D perpendicolare a B E, quella D C perpendicolare ad A E; per modo che, la corda B C è parallela alla D E, le rette D H, E F darebbero le figure B D E F, D E H C, cioè due rombi, come aventi le diagonali che si taglierebbero ad angolo retto, e due lati opposti, paralleli a due lati adiacenti eguali.

Immaginando quindi tirata la retta che congiunge i punti di mezzo di A B e di A C cioè la L K, sarà assai facile di vedere come sia $AM = MF$, e quindi $MI = \frac{AB}{2} = AK$. Il punto I quindi della trisettrice A D trovasi in una situazione tale, da formare un angolo retto coi punti A e B, e da sorpassare di una quantità A K la retta, tirata dal vertice A alla retta L K.

Questa posizione del punto I, è quella che fornisce immediatamente la risoluzione del problema. Infatti, dato un angolo come quello B A C, non si avrà che fare centro in un punto qualunque come K di un lato, e con raggio K A descrivere una semicirconferenza, indi fatto $AL = AK$, e tirata la retta L K, tirare dal punto A tante rette che taglino la L K, e dai punti d'intersezione con questa, portare costantemente la medesima quantità A K, sopra tutte le rette tirate dal punto A, che si otterranno così tanti punti, che raccordati daranno una curva, che sarà il luogo geometrico dei punti che sorpassano di una quantità eguale ad A K, le rette tirate dal punto A verso la L K, il qual luogo geometrico taglierà la semicirconferenza descritta sopra A B nel punto I, che unito col punto A fornirà un angolo B A I, che sarà il terzo dell'angolo dato. Fatto un angolo in seguito $CAE = BAI$, sarà perfettamente triseccato l'angolo dato.

Il punto I essendo collocato su di una semicirconferenza, l'angolo A I B è un angolo retto; ed il punto I essendo collocato sul luogo geometro tracciato è $IM = AK$, onde A I una effettiva trisettrice, e naturalmente anche A E, se risultante da analoga costruzione, oppure dall'avere fatto l'angolo $CAE = BAI$.

PROBLEMI.

1.° — *Per un punto dato fuori della circonferenza di un circolo condurre una tangente alla circonferenza medesima.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 1).

Risoluzione 1.ª — Sia P il punto dato, dal quale si debba condurre una tangente alla circonferenza di centro O.

Si unisca il punto dato P col centro O per mezzo di una retta. Si faccia centro nella metà della retta P O e si descriva una circonferenza che passi pel punto P e pel centro O, e si verrà a tagliare colla medesima la circonferenza data nei due punti T e T'. Si tirino le rette P T, P T', che saranno tangenti alla circonferenza data.

Dimostrazione. — Se si tirano le rette O T, O T', si vedrà tosto che gli angoli P T O, P T' O, essendo inscritti in un semicircolo, sono retti. Ora, siccome la tangente ad un circolo è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto, egli è evidente che P T, P T' sono le tangenti cercate.

(Vedi Tavola XV, Fig. 2).

Risoluzione 2.ª — Sia P il punto da cui si debba tirare la tangente al circolo di centro O.

Si faccia centro in O e con raggio eguale al diametro del circolo dato si descriva un grand'arco; si faccia poi centro in P e con raggio P O si descriva un secondo grand'arco, che taglierà il primo nei due punti A e B. Si conducano le rette O A, O B ed i punti T e T' d'intersezione colla circonferenza data, saranno i punti di contatto delle tangenti richieste. Onde queste saranno P T e P T'.

Dimostrazione. Essendo per costruzione O A = 2 O T e P A = P O, il triangolo A P O è isoscele, e quindi la retta P T che unisce il vertice colla metà della base A O, è perpendicolare ad essa base ed in conseguenza tangente al circolo. Con identico ragionamento si dimostra che P T' è perpendicolare ad O T', e che perciò P T' è pure tangente al circolo dato.

2.° — *Da un punto fuori d'una circonferenza data, condurre a questa una secante tale che la corda intercetta risulti di una lunghezza data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 3).

Risoluzione. — Sia P il punto dato, dal quale si debba condurre una secante al circolo di centro O, per modo che la corda intercetta abbia ad essere della lunghezza della retta *c*.

Si prenda un punto qualunque A sulla circonferenza data e si porti la distanza *c* da A sino a B. Si tiri la retta A B e si abbassi su questa una perpendicolare O C dal centro O, si descriva, facendo centro in O, una circonferenza concentrica con raggio eguale ad O C. Dal punto dato P si conducano, con uno dei due metodi sovra indicati, le due tangenti P Q, P Q' al circolo descritto, che saranno le secanti del circolo dato domandate.

Dimostrazione. — Sapendo dalla teoria che le corde, che si possono condurre in due circoli concentrici tangenti alla minore circonferenza, sono tutte eguali tra loro, si avrà che Q R = A B = *c*, Q' R' = A B = *c*. Dunque le due secanti P Q, P Q' risolvono il problema.

Discussione. — Se la retta data è di lunghezza uguale al diametro della circonferenza, non vi ha che una sola secante, che soddisfa al problema; se poi la retta stessa è maggiore di lunghezza di esso diametro, il problema non è possibile.

3.° — *Tirare una tangente a due date circonferenze.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 4).

Risoluzione. — Siano le circonferenze di centro O e C quelle date, ed a cui si debbano tirare delle rette tangenti.

Si tiri la retta O C ed a partire dal punto D d'incontro colla circonferenza di centro O, si porti a destra ed a sinistra una distanza D E = D Q eguale al raggio del circolo C. Facendo centro in O si descrivano due circonferenze, l'una con raggio O E, l'altra con raggio O Q; ed a queste circonferenze si conducano, coi metodi indicati nel problema 1.° le quattro tangenti C L, C K, C P, C R. Conducendo i raggi O G, C I, O F, C H, O P, C Y, O R, C Z perpendicolari rispettivamente a queste tangenti, ed unendo con rette i punti d'incontro dei raggi paralleli colle circonferenze date, si avranno le tangenti richieste A B, A' B', S T, S' T'.

Dimostrazione. — La retta C L essendo tangente al circolo di raggio O L, e le rette L G, C I, perpendicolari a questa tangente, essendo uguali per aver descritto la circonferenza K E L con raggio O L = O D — C I, la retta A B sarà parallela a C L e tangente alle due circonferenze date. Con analogo ragionamento si dimostra pure che A' B', S T, S' T' sono tangenti alle circonferenze date, poichè K F = C H, P X = C Y, R W = C Z.

4.° — *Condurre una secante comune a due circoli dati e tale che le corde in essi comprese abbiano ciascuna una lunghezza data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 5).

Risoluzione. — Siano le circonferenze date quelle di centro C ed O, alle quali si debba tirare una secante tale, che le corde intercette abbiano ad essere eguali alle rette date *c* e *c'*.

Da un punto qualunque A della circonferenza di centro O si conduca una corda A B eguale alla retta *c*, e facendo centro in O e con raggio O D perpendicolare ad A B, si descriva una circonferenza tangente a questa corda. Analoga operazione si eseguisca per la circonferenza di centro C, cioè si tiri nella medesima una corda F E = *c'*, e si descriva una circonferenza di raggio C G concentrica e tangente alla corda. Si conducano infine, col metodo adottato nel problema antecedente, quattro tangenti alle due circonferenze di raggio O D e C G, le quali tangenti saranno le secanti domandate.

Dimostrazione. — Le corde tirate in due circoli concentrici e tangenti alla minore circonferenza essendo tutte uguali, si ha L R =

A B = c, H I = F E = c', Q T = A B = c, S P = F E = c', epperciò in R H e T S due secanti che risolvono il problema. Per identiche ragioni anche le altre due tangenti alle circonferenze di raggio O D e C G, sono due secanti che risolvono il problema.

Discussione. — Se una delle rette date uguaglia in lunghezza il diametro di una delle circonferenze date, si avranno solo due secanti soddisfacenti al quesito proposto; se poi anche l'altra retta è uguale al diametro dell'altra circonferenza, una sola sarà la secante che risponderà al problema; e se infine una retta o entrambe le rette sono più lunghe dei diametri delle circonferenze, non vi sarà soluzione possibile del problema.

5.° — *In un dato circolo tirare una corda di lunghezza data e parallela ad una retta data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 6).

Risoluzione. — Sia nel circolo di centro O che si debba tirare una corda della lunghezza della retta *c* e parallela alla retta data M N.

Si porti da un punto qualunque della circonferenza data la corda A B = *c*. Facendo centro in O, si descriva una circonferenza tangente alla retta A B, e dal medesimo centro si abbassi una perpendicolare sulla retta data M N, che taglierà la circonferenza descritta nei punti D e P. Pei punti D e P si tirino delle rette parallele alla retta M N, e con queste si avranno le corde E F, G H domandate.

Dimostrazione. — Per la solita proprietà dell'uguaglianza delle corde tirate in due circoli concentrici e tangenti alla circonferenza minore, si ha che E F = G H = A B = *c*, cioè che le due corde E F e G H sono uguali alla corda data. Ora essendo state tirate queste corde parallelamente alla retta data M N, esse risolvono il problema.

Discussione. — Se la retta data fosse uguale al diametro della circonferenza data, non si avrebbe che una sola corda; se poi la retta stessa fosse maggiore di esso diametro, il problema non sarebbe solubile.

6.° — Condurre in un circolo dato una corda di lunghezza data che abbia il suo punto di mezzo sopra una retta pure data.

(Vedi Tavola XV, Fig. 7).

Risoluzione. — Sia nel circolo di centro O che si debba tirare una corda della lunghezza della retta *c*, e tale che il suo punto di mezzo abbia a trovarsi sulla retta data M N.

In un punto qualunque A si tiri una corda A B = *c*, e si descriva una circonferenza facendo centro in O e con raggio eguale ad O C. Si uniscano i punti in cui la circonferenza descritta taglia la retta data M N col centro O, e per ultimo dai punti F ed E si innalzino delle perpendicolari ai raggi F O, E O. Queste perpendicolari daranno le corde H I, G D, che saranno le domandate.

Dimostrazione. — Le due corde H I e G D essendo tangenti alla circonferenza minore di raggio O C, sono uguali tra loro ed uguali alla corda data A B. Di più, siccome la perpendicolare abbassata dal centro di un circolo su di una corda divide questa corda in due parti uguali, sarà E I = E H, F D = F G. Quindi i punti F ed E trovandosi sulla retta M N, le due corde H I e G D risolvono il problema.

Discussione. — Anche la soluzione di questo problema non sarà possibile che entro certi limiti. Infatti, se la corda data è di lunghezza tale che il raggio condotto ad essa perpendicolare dà una circonferenza che non interseca la retta data, il problema non può risolversi; mentre, se quel raggio è uguale di lunghezza alla perpendicolare condotta dal centro della circonferenza data alla retta data, è segno che la corda data è uguale alla parte della retta data intercetta dalla circonferenza, ed in questo caso la corda è una sola e si confonde colla retta data stessa; e parimente se la corda data uguaglia il diametro della circonferenza, vi hanno una infinità di corde che soddisfano al problema, purche però la retta data passi pel centro della circonferenza; e per ultimo, se essa corda è maggiore di detto diametro, il problema, al solito, non è più possibile.

7.° — *Per due punti far passare una circonferenza di circolo di raggio dato.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 8).

Risoluzione. — Siano A e B i due punti dati, ed r il raggio del circolo da descriversi.

Si faccia centro prima in A e poscia in B, e con raggio uguale al raggio dato r si descrivano degli archi, che si intersecheranno nei punti C e C'. Facciasi quindi centro prima in C e poi in C', e descrivansi col raggio dato due circonferenze, che saranno le domandate.

Dimostrazione. — Essendo $AC = CB = r$ per costruzione, come pure $AC' = C'B = r$ pure per costruzione, le due circonferenze descritte risolvono il problema.

Discussione. — Se il raggio r fosse uguale alla metà della distanza A B, si avrebbe una sola circonferenza; se poi esso raggio fosse minore di detta metà, il problema non ammetterebbe soluzione.

8.° — *Per un punto comune a due circonferenze di circolo condurre una secante tale, che la somma delle parti comprese nei due circoli sia eguale ad una lunghezza data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 9).

Risoluzione. — Sia dal punto P comune alle due circonferenze di centro O ed O', che si debba condurre una secante tale che la somma delle parti comprese nei due circoli sia eguale alla retta s.

Si tiri la retta O O' e su questa si descriva una semicirconferenza; si tagli questa semicirconferenza in E con un arco descritto con centro in O' e con raggio eguale alla metà della retta s; si conduca infine la retta O' E e si tiri dal punto P una retta A B alla medesima parallela, e si avrà la secante domandata.

Un' altra secante si otterrà tirando dal punto P' la corda $P'A' = PA$, oppure $P'B' = PB$.

Dimostrazione. — L'angolo O' E O essendo retto perchè inscritto nel semicircolo di diametro O O', O E è perpendicolare ad O' E.

Ora la perpendicolare abbassata dal centro di un circolo su di una corda dividendo questa corda per metà, se si tirano i raggi O D, O' C perpendicolari ad A B, si avrà D P = D B, C A = C P, e quindi $P\,D + P\,C = \frac{A\,B}{2}$. Ma essendo per costruzione O' E eguale alla metà di s, la secante A B sarà eguale ad s.

Discussione. — Perchè il problema sia solubile dovrà trovarsi la retta data s tra due limiti, di cui il minore sarà la corda compresa nella circonferenza di raggio minore, e condotta dal punto P o P' tangente alla circonferenza di raggio maggiore, ed il maggiore sarà una lunghezza tale, che la sua metà eguagli la distanza dei centri O, O'. Nel primo caso la parte della secante compresa nella circonferenza di raggio maggiore si ridurrà a zero, nel secondo caso la secante stessa passerà pei centri O, O'.

9.° — *Per un punto comune a due circonferenze di circolo condurre una secante tale, che la differenza delle parti comprese nei due circoli sia eguale ad una lunghezza data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 10).

Risoluzione. — Sia dal punto P, comune alle due circonferenze di centro O ed O', che si debba condurre una secante tale che la differenza delle parti comprese ne' due circoli sia eguale alla retta d.

Si conducano le rette O O', O' P, e si prolunghi quest'ultima di una quantità P O'' = P O'. Condotta la retta O'' O, si descriva su di essa una semicirconferenza, e facendo centro in O, si tagli questa semicirconferenza con un raggio eguale alla metà della differenza data d nel punto C. Per il punto P si tiri una parallela alla retta C O, che sarà la secante domandata.

Un'altra secante che riunisse le condizioni della secante A B, si potrebbe condurre dal punto P', prendendo P' A' = P A, e tirando la retta A' B'.

Dimostrazione. — Se si immagina descritta in O'' una circonferenza con raggio O'' P, questa sarà eguale alla circonferenza data di eguale raggio O' P. Ora, siccome conducendo per il punto di contatto di due circonferenze delle secanti, queste restano intercette dalle circonferenze stesse in parti eguali, si avrà che A P =

P E. Se dai centri O ed O'' si abbassano delle perpendicolari alla secante A B, e se si considera che quella di queste perpendicolari che viene abbassata dal punto O'' passa pel punto C, stante che l'angolo O C O'' è retto siccome inscritto in un semicircolo, si vedrà tosto che D B = D P, F P = F E, e quindi che D P — F P = D F = O C, metà della differenza data. Ma se la differenza delle metà delle corde intercette dalle circonferenze date è la metà della differenza data, egli è ovvio il comprendere che la differenza delle corde intiere è la differenza data.

Discussione. — Dalla eseguita costruzione risulterà chiaro che, ove la differenza data fosse eguale al diametro del circolo massimo, l'arco descritto con raggio metà della differenza data e con centro in O, passerebbe pel punto P, e allora la secante domandata sarebbe il diametro tirato da P, ovvero da P'; poichè si avrebbe che essendo O' P perpendicolare a P O, le secanti tirate risulterebbero tangenti al circolo minore, e la corda in questo sarebbe zero, epperciò la differenza i diametri del circolo massimo.

Supponendo che la differenza data fosse maggiore del diametro del circolo massimo, allora il problema non sarebbe più solubile, inquantochè il diametro in un circolo è la maggiore corda.

Adunque, perchè il problema sia possibile, è necessario che la differenza data non sia maggiore del diametro del circolo massimo. E saranno sempre due le secanti che si potranno condurre, eccettuato il caso in cui la differenza data sia eguale al diametro del circolo minore, poichè in allora, oltre alle due secanti di cui col metodo indicato, se ne otterrebbero altre due tirando i diametri nel circolo minore dai punti P e P', per essere la corda nel circolo massimo ridotta a zero, e quindi le secanti stesse tangenti a quel circolo.

10.° — *Descrivere una circonferenza di circolo tangente in un punto dato ad una retta data, e che abbia il suo centro sopra un'altra retta data.*

(Vedi Tavola XV, Fig. 11).

Risoluzione. — Si debba descrivere una circonferenza di circolo tangente nel punto P alla retta data A B, e che abbia il suo centro sulla retta data M N.

Pel punto P si innalzi una perpendicolare alla retta A B, che taglierà la retta M N nel punto C. Facendo centro in C e con raggio C P si descriva una circonferenza, e questa sarà la domandata.

Dimostrazione. — La retta A B essendo per costruzione perpendicolare al raggio P C, essa è evidentemente tangente nel punto P alla circonferenza descritta; ma questa avendo a sua volta il proprio centro sulla retta M N, è evidente che è quella circonferenza che risolve il problema.

11.° — *Trovare sopra una retta data il centro di un circolo di raggio dato e tangente ad una retta data.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 12).

Risoluzione. — Sia sopra la retta M N che si debba trovare il centro di un circolo, che descritto con un raggio eguale ad r, risulti tangente alla retta data A B.

Si innalzi una perpendicolare alla retta A B in un punto qualunque P di essa, e si porti sulla perpendicolare medesima una lunghezza $P Q = P R = r$. Per i punti R e Q in tal modo ottenuti, si conducano delle parallele alla retta A B, le quali intersecheranno la retta M N nei punti C e C', che saranno i centri dei circoli domandati.

Dimostrazione. — Siccome i centri C, C' si trovano su due parallele alla retta A B entrambe distanti da questa retta di r, abbassando da essi centri C e C' le perpendicolari C T, C' S alla stessa retta A B, queste perpendicolari saranno eguali tra loro ed eguali alle perpendicolari P Q, P R, fatte per costruzione eguali al raggio dato r.

Egli è dunque chiaro che facendo centro in C e C', e descrivendo con raggio dato due circonferenze, queste soddisferanno al problema, cioè avranno il loro centro sulla retta data M N, e saranno tangenti all'altra retta data A B.

Discussione. — Il problema è sempre possibile, ove le rette date s'incontrino. Se queste rette fossero parallele, converrebbe che la distanza tra loro eguagliasse il raggio dato; in questo caso si avrebbe un numero infinito di circonferenze, che soddisfarebbero al problema.

12.° — *Descrivere una circonferenza tangente ad una retta data in un dato punto, e che passi per un altro punto dato fuori della retta.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 13).

Risoluzione. — Sia nel punto R della retta A B, che la circonferenza da descriversi debba essere tangente alla stessa retta, e sia P il punto fuori di quest'ultima per cui debba passare la circonferenza medesima.

Si tiri la retta P R, e pel punto di mezzo Q di questa retta, si innalzi a questa una perpendicolare sin che venga ad incontrare nel punto C, una perpendicolare innalzata nel punto R alla retta A B.

Facendo centro in C e con raggio C P descrivendo una circonferenza, questa risulterà tangente alla retta A B nel punto R.

Dimostrazione. — Basta osservare che il triangolo P C R avendo il vertice C nella perpendicolare innalzata sulla metà della base P R è isoscele, e che il lato C R, che risulta perciò eguale a C P, è perpendicolare alla retta A B, per rendersi conto che la circonferenza descritta con raggio C P, risulta tangente alla data retta A B.

13.° — *Trovare sopra una data retta il centro di un circolo tangente a due rette pure date.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 14).

Risoluzione. — Sia proposto di descrivere una circonferenza tangente a due rette date A B, C D, facendo centro sulla linea retta data M N.

Si conduca la bisettrice dell'angolo formato dalle due rette A B e C D, col mezzo di una delle soluzioni indicate nel problema 42.° del primo libro, e sia E F questa bisettrice. Dal punto d'incontro O della bisettrice E F colla retta M N, si abbassino delle perpendicolari alle rette A B e C D, le quali saranno due raggi del circolo da descriversi facendo centro in O.

Dimostrazione. — Il punto O essendo un punto della bisettrice dell'angolo formato dalle due rette A B, C D, dista egualmente dai due lati dell'angolo formato delle rette A B, C D. Or dunque le

perpendicolari O G, O H che misurano la distanza dal punto O alle rette A B, C D, sono eguali, e per conseguenza sono anche i raggi del circolo di centro O, e tangente alle rette date A B, C D.

Discussione. — Se le rette date fossero parallele tra loro, basterebbe condurre una parallela loro intermedia e ad eguale distanza da entrambe, ed il punto d'incontro di questa parallela colla terza retta data, sarebbe il centro del circolo richiesto.

14.° — *Descrivere una circonferenza di circolo tangente a due rette date, essendo anche dato il punto di contatto con una di esse.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 15).

Risoluzione. — Siano A B, C D le rette date, cui deve essere tangente il circolo da descriversi, conoscendo il punto di contatto P sulla retta A B.

Si tiri la bisettrice dell'angolo formato dalle due rette A B, C D, e nel punto P si innalzi una perpendicolare sino all'incontro della bisettrice E F in O: questo punto sarà il centro del circolo da descriversi ed O P sarà il raggio.

Dimostrazione. — Se dal punto O della bisettrice E F si abbassa una perpendicolare O G alla retta C D, è evidente che questa perpendicolare risulta uguale ad O P; per cui il circolo descritto con centro in O e con raggio O P = O G, è tangente alle rette date A B, C D.

15.° — *Descrivere una circonferenza di raggio dato tangente a due rette date.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 16).

Risoluzione 1.ª — Sia r il raggio del circolo da descriversi tangente alle rette date A B, B C.

Si faccia centro nel punto B e con raggio eguale al raggio dato r si descriva un arco. Parallelamente alle rette A B, B C si conducano delle tangenti all'arco descritto, che si incontreranno nel punto O. Si faccia ora centro nel punto O, e con raggio eguale ad r si descriva una circonferenza, che riescirà tangente alle due rette date A B, B C.

Dimostrazione. — Si abbassino dal punto O ottenuto, le perpendicolari O H, O I alle rette A B, B C, e dal punto B le perpendicolari B C, B L alle parallele a queste rette O P, O F. Siccome la figura B P O F risulta per costruzione un rombo, le perpendicolari condotte dai suoi vertici opposti O e B ai quattro lati della medesima, sono tra di loro uguali. Ma avendosi pure per costruzione che B G, B L sono uguali al raggio *r*, anche O I ed O H saranno uguali ad *r*, e conseguentemente la circonferenza descritta con centro in O e con raggio *r*, sarà tangente alle rette date A B, B C.

(Vedi Tavola XVI, Fig. 17).

Risoluzione 2.ª — Sia con raggio *r* che si debba descrivere una circonferenza tangente alle due rette date A B, C D.

Si prendano sulle rette date A B, C D due punti qualunque F ed N, e da questi s'innalzino alle rette stesse rispettivamente due perpendicolari; si porti in seguito su quest'ultime una distanza F G = N I = *r*, e pei punti I, G così ottenuti, si conducano delle parallele alle rette A B, C D, che si taglieranno nel punto O.

Si faccia centro nel punto O, e con raggio uguale ad *r* si descriva una circonferenza, e questa riescirà tangente alle rette date A B, C D.

Dimostrazione. — Dal punto O si abbassino le perpendicolari O P, O Q, alle rette date. Essendo I O parallela a C D, ed O G parallela ad A B, si ha che O Q = I N ed O P = G F; ma siccome I N = G F = *r* per costruzione, così anche O P = O Q = *r*. Dunque la circonferenza descritta con centro in O e con raggio O P od O Q, non solo sarà tangente alle rette date A B, C D, ma avrà anche per raggio il raggio dato *r*.

Discussione. — Se le rette date fossero parallele tra loro, il problema non sarebbe possibile che nel caso in cui il raggio dato del circolo da descriversi, fosse la metà della distanza tra esse rette.

L'arco ausiliare di costruzione descritto nella prima figura si cangierebbe allora nella perpendicolare comune alle rette.

16.° — *Descrivere una circonferenza di circolo tangente in un punto dato ad una circonferenza data, ed avente il suo centro sopra una retta data.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 18).

Risoluzione. — Sia M N la retta data, su cui facendo centro si debba descrivere una circonferenza tangente nel punto P, al circolo di centro O dato.

Si unisca con una retta il centro O col punto P dato, e si prolunghi la medesima fino all'incontro della retta M N nel punto C. Si faccia centro in questo punto C, e con raggio C P si descriva una circonferenza, che sarà la richiesta.

Dimostrazione. — La circonferenza C soddisfa al problema, inquantochè ha il suo centro sulla retta data M N, ed è tangente alla circonferenza di centro O nel punto dato P, pella ragione che questo punto di contatto si trova sulla retta, che unisce il suo centro con quello della circonferenza data.

Discussione. — Dall'esposto, chiaro risulta che le due circonferenze per essere tangenti, dovendo avere il punto di contatto colla linea che ne unisce i centri, se la retta M N data fosse parallela alla retta che unisce il centro della circonferenza data col punto di contatto dato, la soluzione del problema non sarebbe più possibile.

17.° — *Trovare sopra una data retta il centro di un circolo di raggio dato, e tangente ad una circonferenza data.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 19).

Risoluzione. — Sia sulla retta M N che si debba trovare il centro di un circolo, che descritto con raggio eguale ad *r*, abbia a risultare tangente alla circonferenza di centro O.

Si faccia centro in O e con raggio eguale alla somma del raggio del circolo O e del circolo dato, si descriva un arco che taglierà la retta M N nei due punti P e Q. Si faccia poscia centro in P e Q, e con raggio eguale ad *r* si descrivano due circonferenze, che risponderanno entrambe al problema.

Dimostrazione. — Le circonferenze descritte hanno anzitutto i loro centri P, Q sulla retta data M N. Siccome per costruzione

$OP = OQ = OD + r = OC + r$, è chiaro che $PD = QC = r$. Ora dunque, le due circonferenze descritte con centro P e Q e con raggio r, saranno passate pei punti D, C, e poichè questi si trovano sulle rette che uniscono i loro centri col centro della circonferenza data, sono i loro punti di contatto colla circonferenza data; le stesse circonferenze descritte, risultano altresì tangenti al circolo dato.

18.° — *Dato un circolo ed una retta, descrivere una circonferenza tangente ad entrambi e di raggio dato.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 20).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O il circolo dato, e sia A B la retta data, alla quale, come al primo, si tratta di descrivere tangente una circonferenza di raggio r.

In un punto qualunque F della retta A B, si innalzi ad essa una perpendicolare $FG = r$, e per il punto G si meni una parallela alla retta A B; si faccia in seguito centro in O, e con raggio uguale alla somma del raggio del circolo O col raggio dato r, si descriva un arco che taglierà la condotta parallela nei due punti C e C'. Descrivendo ora con raggio eguale ad r, e facendo centro prima in C e poscia in C', due circonferenze, queste risulteranno tangenti alla retta data A B ed al circolo dato O.

Dimostrazione. — Dai punti C e C' abbassando delle perpendicolari alla retta A B; queste saranno eguali alla perpendicolare F G, cioè si avrà che $CD = C'E = GF = r$. Tirando poi le rette O C e O C', che sono i raggi di un circolo descritto colla somma del raggio del circolo O e del raggio r, si avrà che $OC = OC' = OT + TC = OL + LC'$, cioè $TC = LC' = r$. Essendo dunque C D, C' E uguali al raggio r e perpendicolari alla retta A B, ed essendo C T, C' L uguali pure al raggio r, e sulle rette che uniscono i centri C, C' con O, è evidente che entrambi i circoli descritti con centro in C, C' e con raggio r, sono ad un tempo tangenti alla retta data A B, ed al circolo dato di centro O.

19.° — *Descrivere un arco di circolo tangente ad un dato circolo passante per un punto dato, sopra una retta su cui si deve trovare il suo centro.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 21).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O il circolo dato, cui de-v'esser tangente l'arco di circolo da descriversi, P il punto dato per cui deve passare questo arco, e P M la retta tracciata pel punto P e su cui deve trovarsi il centro del medesimo arco.

Si porti una distanza P Q = O T raggio del circolo dato; si unisca poi il punto O col punto Q, e sulla metà della retta Q O si innalzi a questa una perpendicolare, che verrà ad incontrare la retta P M in un punto C; si descriva infine, facendo centro in C e con raggio C P, un arco di circolo, e questo risulterà tangente al circolo dato.

Dimostrazione. — Tirando la retta C O, risulta che il triangolo Q O C è isoscele, poichè la retta che unisce il vertice C colla metà della base Q O è perpendicolare a questa base; si ha perciò C Q = C O; e siccome per costruzione si è fatto P Q = O T, ne segue che C Q + Q P = C O + O T, ossia che C P = C T, e quindi che l'arco descritto facendo centro in C sulla retta P M, e con raggio C P, risulta tangente al circolo dato.

20.° — *Dato un circolo ed una retta descrivere una circonferenza tangente ad entrambi, ma alla retta in un determinato punto.*

(Vedi Tavola XVI, Fig. 22).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O il circolo dato, A B la retta data, P il punto di contatto su questa della circonferenza da descriversi tangente all' una e all' altro.

Nel punto P s' innalzi una perpendicolare alla retta A B e si prenda P E = P D = O I raggio del circolo dato; indi si tirino le rette O E, O D e su ciascuna di queste rette ad al loro punto di mezzo, s' innalzi una perpendicolare sino all' incontro nei punti C, C' della perpendicolare innalzata nel punto P alla retta A B. Ove ora si faccia centro prima in C e poscia in C', e con raggi rispet-

tivamente uguali a C P e C′ P si descrivano due circonferenze, si troverà che ciascuna di queste soddisfa al problema.

Dimostrazione. — Essendo la retta C F perpendicolare ad O D nel suo punto di mezzo E, risulta che il triangolo O C D è un triangolo isoscele, ed in conseguenza che il lato C O = C D. Se dunque da ciascuno di questi due lati si toglie il raggio del circolo dato, si ha C O — O I = C D — D P, ossia C I = C P; e così il circolo descritto con centro C e con raggio C P è tangente in P alla retta A B, cui C P è perpendicolare, ed è tangente al circolo dato nel punto I, che si trova sulla retta che unisce il proprio centro con quello dello stesso circolo dato.

Medesimamente G C′ essendo perpendicolare ad O E nel suo punto di mezzo G, il triangolo O E C′ è isoscele, e perciò C′ O = C′ E. Se quindi si aggiunge a ciascuna di queste lunghezze C′ O, C′ E il raggio del circolo dato, si ha C′ O + O T = C′ E + E P, ossia C′ T = C′ P; per cui anche il circolo descritto con centro C′ e con raggio C′ P, è tangente in P alla retta A B, cui è perpendicolare C′ P, ed è tangente al circolo dato nel punto T, che si trova sul prolungamento della retta che unisce i centri C′ ed O.

21.° — *Dato un circolo ed una retta, descrivere una circonferenza tangente ad entrambi, conoscendo il punto di contatto sul circolo.*

(Vedi Tav. XVI, Fig. 23).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O quello dato, A B la retta data, e P il punto di contatto sul circolo dato, in cui dev'essere tangente la circonferenza da descriversi pure tangente alla retta data.

Si tiri la retta O P, e pel punto P si innalzi una perpendicolare alla O P, che incontrerà A B in D; si conducano poscia le bisettrici degli angoli B D P e P D A sino ad incontrare in C e C′ la retta O P prolungata; per ultimo si faccia centro prima in C e poi in C′, e con raggi rispettivamente eguali a C P e C′ P si descrivano due circonferenze, e queste risponderanno al problema.

Dimostrazione. — Dal punto C si abbassi una perpendicolare C E sulla retta A B, e si avrà che questa perpendicolare sarà eguale a C P, poichè il punto C si trova sulla bisettrice dell' angolo P D B.

Di più il punto C si trova per costruzione sul prolungamento di O P. Dunque, resta dimostrato che la circonferenza di centro C è tangente alla retta data ed al circolo dato O, ed a questo nel punto dato P.

Dal punto C' si abbassi pure una perpendicolare C' F ad A B, e si avrà che C' F = C' P per la ragione che il punto C' si trova sulla bisettrice dell'angolo F D P; per cui il circolo descritto con centro C', che è sul prolungamento della retta P O, e con raggio C' F, che è perpendicolare alla retta A B, è evidentemente tangente a questa retta ed al circolo dato O nel punto dato P sulla sua circonferenza.

22.° — *Descrivere tutte le circonferenze di noto raggio tangenti a due circoli dati.*

A seconda della posizione relativa dei due circoli, ed a seconda della lunghezza del raggio della circonferenza da descriversi loro tangente, possono darsi diversi distinti casi, da ognuno de' quali dipende il numero delle circonferenze che risolvono il problema. I circoli infatti, dipendentemente dalla posizione loro e dalla lunghezza dei rispettivi raggi, possono essere concentrici o eccentrici, o tangenti interiormente od esternamente; e possono anche tagliarsi o trovarsi ad una certa distanza l'uno dall'altro senza intersecarsi. Farà quindi mestieri trovare la soluzione del problema proposto, distintamente per ciascuno di questi casi.

Risoluzione 1.ª — Essendo i due circoli dati concentrici, è evidente che se il raggio dato delle circonferenze da descriversi loro tangenti, è eguale alla metà della differenza dei raggi dei due circoli, il numero delle stesse circonferenze da descriversi a queste tangenti è infinito, come pure è infinito allorquando il raggio dato dell'ultima, è eguale alla metà della somma dei raggi dei due circoli dati. Se poi il raggio è di lunghezza diversa dalle due indicate, il numero delle circonferenze si riduce a zero.

(Vedi Tav. XVII, Fig. 24).

Risoluzione 2.ª — Siano i due circoli dati eccentrici, e siano questi i circoli di centro O ed O'; sia inoltre r il raggio dato delle circonferenze da descriversi loro tangenti.

Per trovare il numero delle circonferenze che si possono descrivere tangenti ai due circoli dati, si faccia centro in O e si descriva una circonferenza con raggio eguale alla differenza fra il raggio del circolo O ed il raggio dato r; poscia si faccia centro in O' e si descriva una seconda circonferenza con raggio eguale alla differenza fra il raggio del circolo O' ed il raggio r, la quale taglierà la prima nei punti S ed R. Se ora si descrivono con centro in ciascuno di questi punti d'intersezione e con raggio eguale ad r due circonferenze, si avrà che queste saranno le richieste.

Dimostrazione. — Sapendo che due circonferenze che siano tangenti hanno i loro centri in linea retta col punto di contatto, se si tirano le rette R O ed R O', si vedrà tosto che $RT = O'T + O'R$ ed $RT' = OT' - RO$, e che essendo per costruzione $O'R = r - O'T$ ed $OR = OT' - r$, e quindi facendo le debite sostituzioni $RT = O'T + r - O'T$, ossia $RT = r$, ed $RT' = OT' - (OT' - r)$, ossia $RT' = OT' - OT' + r$, ossia ancora $RT' = r$; per cui si deduce che il circolo di raggio r descitto con centro in R risulta tangente ai due circoli dati.

Ragionamento analogo porta a dimostrare che $ST'' = ST''' = r$, e che perciò anche la seconda circonferenza descritta con centro in S è tangente ai circoli dati.

Discussione. — Col dato raggio r si sono viste risultare pei due dati circoli due soluzioni. Se il raggio dato fosse stato eguale alla metà di Q N, o di M P, o di P N, o di M Q, si sarebbe ottenuta una sola soluzione, poichè allora due delle circonferenze descritte con raggi eguali alle differenze o alle somme dei raggi dei circoli dati colla metà di Q N, M P, P N, M Q, a vece d'intersecarsi si sarebbero toccate in un sol punto, o alla metà di Q N, o di M P, o P N, o M Q, od anco confuse in una sola, passando per le metà di queste distanze. Se il raggio dato fosse stato minore della metà di Q N, non si sarebbe ottenuta alcuna soluzione, poichè le circonferenze descritte non si sarebbero nè intersecate, nè toccate. Se poi il raggio fosse stato maggiore della metà di P N o minore della metà di M Q, si sarebbero ottenute due soluzioni, come è avvenuto appunto nel caso risolto colla Fig. 24.

Quando dunque i circoli dati sono eccentrici, ma disposti l'uno internamente all'altro, può avvenire, a seconda della lunghezza del raggio dato delle circonferenze da descriversi loro tangenti, o che

non vi sia soluzione possibile, o tutt'al più che abbiano luogo due soluzioni del problema in questione.

(Vedi Tav. XVII, Fig. 25).

Risoluzione 3.ª — Siano i due circoli dati tangenti interiormente, e siano questi i circoli di centro O ed O', e sia poi r il raggio dato delle circonferenze da descriversi tangenti ai circoli.

Si faccia centro prima in O, e con raggio eguale alla differenza del raggio del circolo dato O e del raggio dato r si descriva una circonferenza; si faccia di poi centro in O', e con raggio eguale alla somma del raggio del circolo O' col raggio dato r si descriva un'altra circonferenza, che taglierà la prima nei punti C e C'. Ora, con centro in questi punti e con raggio eguale ad r descrivendo due circonferenze, queste risulteranno tangenti ai circoli dati.

Parimente facendo centro in C'', che è il punto d'incontro della prima circonferenza descritta colla retta M N, e collo stesso raggio r descrivendo una circonferenza, anche questa risulterà tangente ai due circoli dati.

Dimostrazione. — Tirando le rette C O' e C O, C' O e C' O', si avrà tosto che essendo per costruzione $O'C' = O'T' + r$ ed $OC' = OT - r$, il raggio $C'T' = O'C' - O'T' = O'T' + r - O'T' = r$ ed il raggio $C'T = OT - OC' = OT - OT + r = r$, e siccome poi gli estremi di questi raggi C' T', C' T si trovano sulle rette che uniscono i centri O', O col centro C', la circonferenza descritta con questo centro e con raggio r, risulta tangente ai due circoli dati. Altrettanto con analogo ragionamento si dimostra che la circonferenza descritta collo stesso raggio r e con centro in C, risulta pure tangente ai due circoli dati.

Per quella infine descritta con centro in C'' basta osservare che essendo $OC'' = ON - r$, il raggio C'' N che si può considerare eguale ad $ON - OC''$, risulta anch'esso eguale ad r, e quindi la detta circonferenza tangente ai circoli dati nel loro punto di contatto N.

Discussione. — Nel caso di due circoli tangenti interiormente, sarà sempre possibile una soluzione del problema qualunque sia la lunghezza del raggio dato r, ed accadrà solo che abbiano luogo tre o quattro soluzioni quando questo raggio sia eguale o minore della

metà di M P, mentre quando esso sia maggiore di questa metà, avrà luogo sempre due soluzioni, ed in questo caso un solo sarà il punto di contatto delle circonferenze, cioè nel punto stesso di contatto dei due circoli dati.

Risoluzione 4.ª — I due circoli dati essendo tangenti esternamente, sarà facile di rendersi conto, che avranno luogo quattro soluzioni del problema, allorquando il raggio dato per le circonferenze da descriversi sia minore della somma dei raggi dei circoli dati; cinque soluzioni quando il raggio dato sia eguale alla somma dei raggi dei circoli dati, infine sei soluzioni quando il raggio dato sia maggiore della somma dei raggi dei circoli dati.

(Vedi Tav. XVII, Fig. 26).

Risoluzione 5.ª — Abbiansi due circoli di centro O e O', che si taglino, e sia r il raggio dato delle circonferenze da descriversi loro tangenti.

Facendo centro in O si descrivano due circonferenze con raggi rispettivamente eguali alla somma e differenza del raggio del circolo O col raggio r, e facendo centro in O' si descrivano altre due circonferenze con raggi rispettivamente eguali alla somma e differenza dei raggi del circolo di centro O' e dello stesso raggio r. In tutti i punti d'intersezione C, C' C''.... delle quattro circonferenze descritte, si faccia centro, e con raggio eguale ad r si descrivano delle circonferenze, che risulteranno tutte tangenti ai due circoli dati. Queste circonferenze saranno otto, poichè otto sono i punti d'intersezione delle altre quattro circonferenze descritte.

Dimostrazione. — Ripetendo le stesse considerazioni fatte per dimostrare il problema nella 2.ª e 3.ª risoluzione, dopo uniti i diversi centri ottenuti coi centri O ed O', si perverrà facilmente in modo analogo a dimostrare, che anche nel caso in questione le circonferenze descritte con raggio r e con centro nei varii punti d'intersezione delle circonferenze di raggio eguale alla somma e alla differenza dei raggi dei circoli dati col raggio r, sono tangenti ai circoli dati.

Discussione. — Col raggio dato r e con i circoli descritti come alla Fig. 26, si è veduto esser possibili otto soluzioni del problema. Questa possibilità dimostra che il raggio r è minore di $\frac{1}{2}$ P Q. Se

questo raggio fòsse stato eguale ad $\frac{1}{2}$ P Q, si sarebbero ottenute sette soluzioni; se fosse stato maggiore di $\frac{1}{2}$ P Q e minore di $\frac{1}{2}$ P N, sei soluzioni; se eguale ad $\frac{1}{2}$ P N, cinque soluzioni; se minore di $\frac{1}{2}$ M Q e maggiore di $\frac{1}{2}$ P N, quattro soluzioni; se eguale alla metà di M Q, tre soluzioni; se minore della metà di M N e maggiore della metà di M Q due soluzioni; se eguale ad $\frac{1}{2}$ M N, tre soluzioni; se infine maggiore della metà di M N, quattro soluzioni. Tutto ciò è ovvio a dimostrarsi col vedere, quanti punti d'intersezione e di contatto delle circonferenze descritte colle somme e differenze dei raggi dei circoli dati col raggio dato, si possono ottenere a seconda delle lunghezze di quest'ultimo raggio in rapporto colla lunghezza eguale alla parte dei diametri dei circoli da questi intercetta, o eguale all'uno o all'altro diametro dei circoli, o eguale infine alla differenza tra la somma dei diametri e la detta parte intercetta.

(Vedi Tav. XVII, Fig. 27).

Risoluzione 6.ª — Siano i due circoli dati quelli di centro O ed O′, e si tratti col raggio *r* dato di descrivere tutte le circonferenze possibili loro tangenti.

Si faccia centro in O e si descrivano due circonferenze con raggi rispettivamente eguali alla somma e differenza del raggio del circolo di centro O col raggio dato *r*; si faccia medesimamente centro in O′ e si descrivano altre due circonferenze con raggi pure rispettivamente eguali alla somma e differenza del raggio del circolo di centro O col raggio dato *r*; i punti C^1, C^2, C^3, C^4, C^5, C^6, C^7, C^8, risultanti dalla intersezione delle quattro circonferenze descritte, saranno i centri delle circonferenze, che descritte con raggio *r* riesciranno tangenti ai circoli dati.

Dimostrazione. — Anche qui basta ripetere le medesime considerazioni fatte nella 2.ª e 3.ª risoluzione del problema, dopo uniti i diversi centri ottenuti per le varie circonferenze da descriversi tangenti i circoli dati pei centri di quest'ultimi, per giungere

a dimostrare che effettivamente le circonferenze descritte coi centri ottenuti e col raggio dato sono tangenti ai circoli dati.

Discussione. — Se il raggio dato fosse stato minore della metà di P Q, non ne sarebbe risultata alcuna soluzione; se quel raggio fosse stato eguale alla metà di P Q, si sarebbe ottenuta una soluzione; se fosse stato minore della metà di P N e maggiore della metà di P Q, due soluzioni; se eguale alla metà di P N, tre soluzioni; se minore della metà di M Q e maggiore della metà di P N, quattro soluzioni; se eguale alla metà di M Q, cinque soluzioni; se minore di M N e maggiore di M Q, sei soluzioni; se eguale alla metà di M N, sette soluzioni; e finalmente se maggiore della metà di M N, otto soluzioni, come si è visto nel caso svolto. Anche tutto questo risulterà evidente facendo le stesse osservazioni esposte nella precedente discussione.

23.° — *Descrivere una circonferenza tangente a due circoli dati, essendo noto il punto di contatto con uno di questi circoli.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 28).

Risoluzione. — Abbiansi i circoli di centro O ed O', cui dev'essere tangente una circonferenza per modo da avere con uno di essi, per esempio con quello di centro O', un determinato punto di contatto P.

Si tiri il raggio O P e lo si prolunghi d'alquanto; indi si prendano sul medesimo le distanze P A = P B = O' F raggio del circolo di centro O'. Si tirino le rette O' A, O' B, e sul loro punto di mezzo si innalzino ad esse stesse delle perpendicolari, che verranno ad incontrare la retta O P nei punti C e C'. Facendo centro in C, con raggio C P si descriva una circonferenza, che riescirà tangente ai due circoli dati.

Medesimamente facendo centro in C' con raggio C' P, si descriva una seconda circonferenza, che riescirà pure tangente ai due dati circoli.

Dimostrazione. — Il triangolo O' C A essendo isoscele per costruzione, avendo condotto D C perpendicolare ad O' A nel suo punto di mezzo D, si ha che C A = C O'; se quindi si toglie a ciascun membro di quest' eguaglianza la stessa lunghezza P A o

O′ F, si ricava C A — P A = C O′ — O′ F, ossia C P = C F, lo che indica che una circonferenza descritta con centro C e con raggio C P o C F risulta tangente ai due circoli nei punti P ed F, che si trovano sulle rette che uniscono il centro C coi centri O, O′.

Egualmente si dimostra che essendo C′ B = C′ O′, perchè il triangolo O′ C′ B è isoscele, e P B = O′ G per costruzione, risulta C′ B + B P = C′ O′ + O′ G, ossia C′ P = C′ G, e quindi che la circonferenza descritta facendo centro in C′ e con raggio C′ P o C′ G è pure tangente ai due circoli dati.

Discussione. — È facile vedere che ove la retta che unisce il centro del circolo O′ col punto B preso sulla retta O P prolungata ad una distanza B P = O′ F, risulti perpendicolare alla stessa retta O P, non ha luogo che una sola soluzione.

24.° — *Dati due punti, una retta ed un circolo, descrivere una circonferenza di circolo che passi per i due punti dati e tagli il circolo dato in modo che la corda di intersezione sia parallela alla retta data.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 29).

Risoluzione. — Sieno P e Q i due punti dati, A B la retta data, ed il circolo di centro O il circolo dato, e si tratti di descrivere una circonferenza che passi per i due punti dati, e tagli il circolo dato per modo che la corda di intersezione sia parallela alla retta data.

Si unisca il punto P col punto Q col mezzo di una retta, e nel punto di mezzo D di questa si innalzi alla medesima una perpendicolare sino all'incontro C della perpendicolare abbassata dal centro O alla retta A B. Con raggio C P e facendo centro in C si descriva una circonferenza, che passerà per i punti P e Q e taglierà il circolo O secondo la corda E F parallela alla A B.

Dimostrazione. — Essendo C D perpendicolare a P Q sulla sua metà; il triangolo P C Q è isoscele, e quindi C P = C Q; e la retta O C essendo perpendicolare ad A B, e la corda E F perpendicolare ad O C, ne segue che la corda E F è parallela alla retta data A B.

25.° — *Descrivere una circonferenza di circolo tangente ad una retta data in un punto dato, e tale che tagliando la circonferenza di un altro circolo in due punti, la corda che unisce questi punti sia parallela ad una retta data.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 30).

Risoluzione. — Sia dato da descrivere una circonferenza tangente alla retta A B nel punto P, e tale che tagli il circolo dato di centro O in due punti posti parallelamente alla retta data M N.

Nel punto P si innalzi una perpendicolare alla retta A B, e dal centro O si abbassi una perpendicolare sulla retta M N, prolungandola fino in C all'incontro della perpendicolare innalzata in P alla retta A B. Descrivendo ora con centro C e con raggio C P una circonferenza, essa sarà la domandata.

Dimostrazione. — Essendo per costruzione C P perpendicolare ad A B, la circonferenza descritta risulta tangente in P alla retta A B; ed essendo inoltre O C perpendicolare ad M N, e la corda E F perpendicolare ad O C che unisce i centri O e C, la stessa circonferenza descritta incontra il circolo dato in due punti che sono ad ugual distanza dalla M N. Dunque la circonferenza di centro C e di raggio C P risolve pienamente il problema.

26.° — *Descrivere una circonferenza di circolo che passi per due punti dati, e tagli la circonferenza di un altro circolo dato in modo che la corda che unisce i due punti di intersezione, sia perpendicolare a quella che unisce i punti dati.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 31).

Risoluzione. — Sieno P e Q i due punti dati per cui si deve fare passare una circonferenza, che tagli il circolo dato O in due punti per modo che la corda che li unisce risulti perpendicolare alla retta P Q.

S'innalzi sulla retta P Q e nel suo punto di mezzo D una perpendicolare D C, e dal centro O si abbassi a questa una perpendicolare O C; si faccia in seguito centro nel punto d'incontro C di

queste perpendicolari, e si descriva con raggio C P o C Q una circonferenza, e si verrà con questa a tagliare il circolo dato in due punti E, F, che determineranno una corda E F perpendicolare a P Q.

Dimostrazione. — Essendo C D perpendicolare a P Q sul suo punto di mezzo, il triangolo C P Q è isoscele, epperciò C P = C Q, e la circonferenza descritta con centro C e con uno dei raggi C P o P Q deve passare pei due punti P e Q, avendosi ancora che O C è parallelo a P Q per costruzione, e che la corda E F risulta perpendicolare alla retta che unisce i centri O e C, la stessa corda E F sarà anche perpendicolare alla parallela di O C, cioè a P Q. In conseguenza la circonferenza descritta sarà quella richiesta.

27.° — *Date due rette ed un punto, descrivere da questo come centro una circonferenza, che tagli le due rette date in due punti tali da determinare una corda parallela ad una terza retta data.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 32).

Risoluzione. — Siano A B e C D le rette date e P il punto dato, da cui come centro si deve descrivere una circonferenza che tagli le due rette date in due punti tali, che la corda che li unisce riesca parallela ad un'altra retta data M N. Dal punto P si abbassi una perpendicolare alla retta M N, e nel punto d'incontro Q di questa perpendicolare colla retta A B si formi un angolo P Q S = R Q P. Descrivendo ora con centro in P e con raggio P S una circonferenza, questa sarà la domandata, cioè incontrerà l'altra retta A B, in un punto R, che unitamente al punto S determinerà una corda R S parallela ad M N.

Dimostrazione. — Avendosi per costruzione che l'angolo P Q S = R Q P, la retta Q P è la bisettrice dell'angolo R Q S, e conseguentemente le perpendicolari P T, P V abbassate sui lati Q S, Q R sono eguali. Ora i triangoli rettangoli P T S, P V R risultanti, sono eguali, poichè hanno oltre i cateti P T, P V eguali, anche le ipotenuse P S, P R pure eguali come raggi del medesimo circolo; onde l'angolo P S T = P R V. Aggiungendo quindi ad ognuno di questi angoli uno degli angoli eguali P S R, P S R del triangolo isoscele R P S, si ricava che l'angolo R S Q = S R Q, e perciò che il triangolo R Q S è isoscele. Ma se questo triangolo è isoscele, la biset-

trice Q P dell' angolo opposto alla base R S è perpendicolare a questa base. Ma P Q è stata condotta perpendicolare ad M N. Dunque R S risulta parallela ad M N, e la circonferenza descritta con centro in P e con raggio P S è la richiesta.

28.° — *Inscrivere una circonferenza in un settore circolare.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 33).

Risoluzione. — Sia A B C il settore dato, in cui debbasi inscrivere un circolo.

Si divida l' angolo B A C per metà, e al punto D d' incontro della bisettrice coll' arco B C, s' innalzi una perpendicolare alla bisettrice stessa sino all' incontro del prolungamento dei raggi del settore in F ed E. Si divida l' angolo E F A per metà, e quindi nel punto O d' intersezione delle due bisettrici, si faccia centro e con raggio O D si descriva un circolo, che riescirà inscritto nel dato settore.

Dimostrazione. — Se si abbassano dal centro O le perpendicolari O G, O H ai raggi del settore, esse saranno eguali tra di loro per la ragione che il punto O è sulla bisettrice dell' angolo B A C. Ora il punto O trovandosi altresì sulla bisettrice dell' angolo E F A, sarà pure la perpendicolare O G = O D. Dunque la circonferenza descritta con centro in O e col raggio O D sarà tangente ai due raggi del settore ed anche all' arco B C, trovandosi il punto di contatto D sulla retta che congiunge il centro O col centro o vertice A; e così essa circonferenza sarà la domandata.

29.° — *Circoscrivere un circolo ad un dato triangolo.*

(Vedi Tavola XVII, Fig. 34).

Risoluzione. — Sia al triangolo A B C che si debba circoscrivere un circolo.

Si dividano i lati del triangolo dato per metà nei punti D, E, F. Da questi diversi punti si innalzino delle perpendicolari ai rispettivi lati, le quali verranno ad incontrarsi in un punto O. Si faccia centro in O, e con uno dei raggi O A, O B, O C, si descriva una circonferenza, che passerà pei vertici del triangolo, e così sarà la domandata.

Dimostrazione. — Avendo innalzato D O perpendicolare ad A B sul suo punto di mezzo, il triangolo A O B risulta isoscele, e quindi O A = O B. Per identica ragione il triangolo B O C risulta pure isoscele, onde si ha anche O B = O C. Dunque la circonferenza descritta con centro in O e con uno dei raggi O A, O B, O C, passa necessariamente pei tre vertici del dato triangolo A B C, ossia è al medesimo circoscritta.

30.° — *Descrivere tutte le circonferenze contemporaneamente tangenti ai tre lati di un triangolo dato.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 35).

Risoluzione 1.ª — Sia ai tre lati del triangolo A B C che si vogliano descrivere tutte le circonferenze tangenti.

Si dividano gli angoli A, B, C per metà; quindi dal punto d'incontro O delle tre bisettrici si abbassino delle perpendicolari O H, O S, O T sui tre lati del triangolo; si faccia poi centro in O, e con raggio uguale ad una di queste perpendicolari si descriva una circonferenza, e questa risulterà inscritta nel triangolo dato.

Dimostrazione. — Come è noto dalla teoria, le tre bisettrici di un triangolo s'incontrano in un sol punto, e questo punto è egualmente distante dai tre lati del triangolo. Così le tre perpendicolari O H, O S, O T abbassate dal punto d'incontro O delle tre bisettrici condotte nel triangolo A B C rispettivamente sui lati di questo triangolo, sono eguali.

Dunque la circonferenza descritta con centro O e con raggio eguale ad una delle dette perpendicolari è inscritta nel triangolo dato.

Discussione. — Prolungando i lati del dato triangolo è facile vedere che si possono descrivere altre circonferenze tangenti ai tre lati dello stesso triangolo. Queste circonferenze, che si chiamano *ex-inscritte*, sono in numero di tre, tre essendo gli spazj esterni al triangolo compresi da tre lati.

Risoluzione 2.ª — Nei punti A, B e C si innalzino delle perpendicolari alle bisettrici state condotte per trovare il centro O del circolo inscritto. Queste perpendicolari verranno ad incontrarsi nei punti O', O'', O'''. Da ciascuno di questi singoli punti si abbassino delle perpendicolari O'P, O'Q, O'R, O''I, O''G, O''L, O'''D, O'''E, O'''F

sui lati del triangolo, e quelli saranno i centri e questi i raggi di tre circonferenze, che descritte risulteranno tangenti ai tre lati del dato triangolo.

Dimostrazione. — Nelle perpendicolari innalzate nei vertici A, B, C sulle bisettrici condotte nel triangolo A B C, si hanno altrettante bisettrici degli angoli L A B, A B I, P B C, B C R, F C A, C A D esterni allo stesso triangolo, per cui ogni loro punto d'incontro è ugualmente distante dai tre lati del triangolo, cioè O'' L = O'' G = O'' I, O' P = O' Q = O' R, O''' F = O''' E = O''' D. Conseguentemente le tre circonferenze descritte con centro nei singoli punti d'incontro di quelle bisettrici, e con raggio uguale rispettivamente alle perpendicolari abbassate sui lati del triangolo da quei medesimi punti d'incontro, risulteranno tangenti ai tre lati del triangolo dato.

Corollario. — I centri delle tre circonferenze ex-inscritte al triangolo A B C sono i vertici di un triangolo circoscritto allo stesso triangolo A B C; poichè le perpendicolari innalzate nei vertici A, B, C sulle bisettrici condotte nel triangolo A B C, sono due a due le bisettrici di due angoli opposti al vertice, cioè si trovano due a due sulla stessa retta che passa pel rispettivo vertice del triangolo A B C.

31.° — *Descrivere tre circoli tangenti fra loro ed i cui centri sieno nei vertici di un dato triangolo.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 36).

Risoluzione 1.ª — Sia A B C il triangolo dato, nei vertici del quale si debba far centro per descrivere tre circonferenze che abbiano a riescire tangenti tra di loro.

Si dividano gli angoli A, B, C del triangolo dato per metà, e dal punto O d'intersezione delle bisettrici si abbassino rispettivamente sui lati del triangolo stesso delle perpendicolari O F, O D, O E. Si faccia centro in A, B, C, e con raggi A F, B F, C D, si descrivano tre circonferenze, che risulteranno tangenti fra di loro.

Dimostrazione. — Considerando i due triangoli A O F, A O E, si vede che sono rettangoli, perchè O F è perpendicolare ad A B ed O E perpendicolare ad A C, e di più sono eguali, perchè hanno l'angolo F A O = E A O per costruzione ed il lato A O comune;

onde il lato $AF = AE$; e medesimamente considerando i due triangoli ECO, OCD, si vede che sono rettangoli ed uguali, e quindi che $CE = CD$. Pure infine considerando gli altri due triangoli FOB, OBD, si vede che anch'essi sono uguali, e perciò che $BF = BD$. Ne segue dunque che i circoli descritti con centro nei tre vertici del triangolo ABC e con raggi rispettivamente uguali alle distanze di questi vertici ai piedi delle perpendicolari OF, OD, OE, si toccano due a due in un punto che si trova sulla retta che unisce i loro centri, che è quanto dire sono tangenti tra loro, ossia sono i circoli richiesti.

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 37).

Risoluzione 2.ª — Sia ABC il triangolo dato, ne' cui vertici facendo centro vogliansi descrivere tre circonferenze che abbiano a riescire tangenti fra di loro.

Si porti sul lato AB una distanza BF eguale alla differenza fra il lato CB e la metà della somma dei tre lati del triangolo. Si faccia centro in B ed in A, e con raggi rispettivamente eguali a BF ed AF si descrivano due circonferenze, che saranno tangenti tra di loro. Si faccia in ultimo centro in C, e con raggio eguale a CE si descriva una terza circonferenza, che sarà tangente alle due prime descritte.

Dimostrazione. — Affinchè i tre circoli descritti abbiano a riescire tangenti tra di loro, bisogna che abbiano luogo le seguenti eguaglianze:

$$AF + FB = AB$$
$$CD - AD = AC$$
$$CE - BE = CB,$$

che sommate danno l'altra eguaglianza $AF + CD + CE + FB - AD - BE = AB + AC + CB$, la quale, siccome $AD = AF$, $BE = BF$, $CD = CE$, facendo le debite sostituzioni si trasforma nell'altra $AF + CD + CD + BF - AF - BF = AB + AC + CB$, che si riduce a $2CD = AB + BC + AC$, ossia a $CD = CE = \frac{AB + BC + AC}{2}$. Quest'ultima uguaglianza dimostra che il raggio della terza circonferenza descritta è effettivamente uguale

alla semisomma dei tre lati del triangolo dato, e reciprocamente, togliendo C B o C A ad ambi i suoi membri, che i raggi delle prime due circonferenze descritte sono eguali rispettivamente alle differenze tra la detta semisomma ed i lati C B e C A; che perciò le tre circonferenze come sopra descritte soddisfanno al problema.

32.° — *Sopra una retta di lunghezza data, descrivere un segmento di circolo capace di un angolo dato.*

(Vedi Tav. XVIII, Fig 38).

Risoluzione. — Sia *l* la retta data ed H l'angolo dato, del quale si tratta di descrivere capace un segmento di circolo sulla retta *l*.

Si tiri una retta A B eguale alla lunghezza data *l*, e si formi nel punto A un angolo B A C eguale all'angolo dato H, indi s' innalzi nel punto A una perpendicolare al lato A C dell'angolo fino all' incontro O di un' altra perpendicolare innalzata sulla metà della retta A B. Facendo centro in O si descriva con raggio O A il segmento di circolo A G F E B, che sarà il domandato.

Dimostrazione. — Da qualunque punto G preso sull' arco del descritto segmento, si conducano delle rette agli estremi A e B, sarà sempre l'angolo A G B = H, poichè l'angolo A G B avendo per misura la metà dell'arco A B e l'angolo B A C fatto per costruzione uguale ad H, avendo per misura la metà dello stesso arco, sarà A G B = B A C = H. Il medesimo si può dire degli angoli A F B, A E B, i quali hanno tutti per misura la metà dello stesso arco A B. Essendo dunque uguale all'angolo dato H, ogni angolo inscritto nel segmento descritto sulla retta A B, esso segmento risponde al problema.

33.° — *Costruire un triangolo conoscendone la base, l' altezza e l'angolo opposto alla base.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 39).

Risoluzione. — Sia *b* la base data, *h* l'altezza data ed H l' angolo dato opposto alla base del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita, e su di essa si porti una distanza A B eguale alla base data *b*; e sulla retta A B si descriva un seg-

mento di circolo capace dell' angolo dato H col mezzo indicato nella risoluzione dell' antecedente problema. Per un punto qualunque E della retta A B si innalzi una perpendicolare E G $=$ *h*, e pel punto G si meni una parallela alla retta A B, che taglierà il segmento di circolo nei due punti C e C'. Si tirino le rette A C, C B, A C', C' B, e i due triangoli A B C, A B C' in tal modo ottenuti, risolveranno il problema.

Dimostrazione. — Se dai vertici C e C' si abbassano delle perpendicolari sulla base A B, si avrà che queste saranno eguali ad E G, poichè C C' è stata condotta parallela ad A B. I due triangoli A B C, A B C' avendo la base A B eguale alla base data, l'altezza C I $=$ C' L $=$ E G $=$ *h* altezza data, l'angolo A C B $=$ A C' B $=$ B A D $=$ H, poichè i vertici C e C' si trovano sul segmento di circolo descritto su A B e capace dell'angolo H, riuniscono i requisiti voluti dal problema, epperciò sì l'uno che l'altro è il domandato.

Discussione. — I due triangoli A B C, A B C' non solo risolvono il problema, ma sono eziandio eguali tra loro e disposti simmetricamente per rispetto alla retta E G. Basta infatti volgere uno sguardo alla figura per rendersene tosto conto. Se l' angolo dato H fosse retto, basterebbe descrivere un circolo avente per diametro A B $=$ *b*, ed in ciascuno dei semicircoli ottenuti inscrivere due angoli retti in modo che l'altezza dai loro vertici sul diametro A B risulti uguale ad *l*: quattro in tal caso sarebbero i triangoli soddisfacenti al problema. È facile accorgersi come il problema sarebbe impossibile nel caso che l'angolo dato H essendo acuto od ottuso, l'altezza fosse maggiore della distanza tra la base A B e la tangente al segmento di circolo alla stessa base parallela; ed in quel caso in cui dato l'angolo H retto, l'altezza *h* fosse maggiore della metà della base *b*. Per il che si rende pure manifesto, che ove l'altezza *h* sia eguale alla distanza tra la corda A B $=$ *b* e la tangente al segmento di circolo ad essa parallela, nel caso dell'angolo H acuto od ottuso un solo è il triangolo soddisfacente al problema, e nel caso dell'angolo H retto due sono i triangoli che si possono inscrivere nel circolo di diametro uguale alla base *b*, che riuniscono le condizioni dal problema volute.

34.° — *Costruire un triangolo conoscendone due altezze ed un lato.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 40).

Risoluzione. — Siano *b* il lato dato, *h* ed *h'* le altezze date del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e su di essa si prenda una distanza A B eguale al lato dato *b*; e su questa si descriva una semicirconferenza.

Si faccia centro in A con raggio eguale all'altezza *h*, e si tagli con un arco il semicircolo nel punto E; si faccia poscia centro in B e con raggio eguale all'altezza *h'*, si tagli pure con un arco il semicircolo nel punto F. Si tirino le rette B E ed A F e si prolunghino fino all' incontro in C, ed il triangolo A B C risultante sarà il domandato.

Dimostrazione. — Tirate le rette A E, B F, si vedrà tosto che gli angoli A F B, A E B siccome inscritti nel semicircolo, sono retti, epperciò che la retta A E è perpendicolare al lato B C e la retta B F perpendicolare al lato A C. Ora per costruzione essendo A E $=$ *h*, B F $=$ *h'*, ed il lato A B $=$ *b*, il triangolo A B C è evidentemente quello richiesto.

Discussione. — Se una delle due altezze *h*, *h'* è uguale al lato *b*, il triangolo risulta rettangolo come inscritto nella semicirconferenza di diametro *b*. Se ambedue le altezze *h*, *h'* sono eguali a *b*, come pure se una di queste altezze è maggiore di *b*, il problema è impossibile.

35.° — *Costruire un triangolo equilatero che abbia i vertici su tre parallele.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 41).

Risoluzione. — Siano H I, F G, D E le tre parallele sulle quali debbono trovarsi i vertici di un triangolo equilatero da costruirsi.

Si prenda un punto qualunque P, e sulla retta D E si formi un angolo D P A di 60° ed un secondo E P B pure di 60°, descrivendo un semicircolo con centro nello stesso punto P e portando L V $=$ S T $=$ P L. Si tiri in seguito la retta A B, e su questa si descriva

un segmento di circolo capace di un angolo di 60°, il quale verrà a tagliare la parallela D E nel punto C, e passerà manifestamente pel punto P. Si tirino le rette A C, B C, ed il triangolo risultante A B C sarà equilatero ed il domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo A B C ha i suoi vertici sulle tre parallele date, ed inoltre l'angolo A C B di 60° per costruzione. Ora l'angolo B A C ha per misura la metà dell' arco B C; ma anche l'angolo C P B di 60° per costruzione ha per misura la metà dello stesso arco B C; dunque C A B = C P B = 60°, e di conseguenza pure il terzo angolo A B C = 60°. Cosicchè resta dimostrato che il triangolo A B C costrutto nel modo indicato, ha i suoi vertici sulle tre parallele date ed è equilatero.

36.° — *Costruire un triangolo rettangolo, conoscendone l'ipotenusa e la somma dei due cateti.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 42).

Risoluzione. — Sia p l'ipotenusa data ed s la somma dei cateti del triangolo rettangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita, e sovra di essa si prenda una distanza A B eguale alla ipotenusa data, e sopra questa retta A B si descriva una semicirconferenza. Nel punto di mezzo D della retta A B si innalzi una perpendicolare, che taglierà la semicirconferenza nel punto E. Si faccia centro in questo punto E, e con raggio E A si descriva una circonferenza, la quale si tagli con un arco descritto con centro in B e con raggio eguale alla retta data s nei due punti F e G. Si tirino le rette B G, B F, A C, A C', ed i due triangoli ottenuti A C B, A C' B saranno i domandati.

Dimostrazione. — I due triangoli A C B, A C' B essendo descritti nel semicircolo, sono rettangoli, ed hanno l'ipotenusa A B $= p$ ipotenusa data per costruzione. Inoltre i triangoli A C F, A C' G sono rettangoli ed isosceli, avendo gli angoli A C F, A C' G retti, e gli angoli acuti di 45°, poichè C F A ed A G C' hanno per misura la metà dell' arco che misura l' angolo al centro A E B retto; onde C A = C F, C' A = C' G. Si potrà quindi stabilire che B C + C A = B C + C F, e B C' + C' A = B C' + C' G, ossia, siccome B C + C F = B C' + C' G = B F = B G = s, B C + C A = B C' + C' A = s

somma data dei due cateti. Dunque i due triangoli A C B, A C' B sono rettangoli ed hanno l'ipotenusa uguale all'ipotenusa data *p*, e la somma dei due cateti uguale alla somma data *s*; epperciò risolvono entrambi il problema.

Discussione. — Se la somma data *s* uguaglia il diametro della circonferenza descritta con centro in E e con raggio E A od E B, un solo triangolo risolve il problema, ed è il triangolo rettangolo A E B; se la detta somma è maggiore di esso diametro, non vi ha più soluzione possibile del problema.

37.° — *Costruire un triangolo rettangolo, conoscendone l'ipotenusa e la differenza dei due cateti.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 43).

Risoluzione. — Sia *p* l'ipotenusa e *d* la differenza dei due cateti del triangolo rettangolo da costruirsi.

Si tiri una retta indefinita e si prenda su di essa una distanza A B = *p* ipotenusa data, e su questa distanza si descriva una semicirconferenza. Nel punto di mezzo D della A B si innalzi alla medesima una perpendicolare D E = D B, e facendo centro in E con raggio E A od E B si descriva una circonferenza. Si faccia in seguito centro prima in A e poscia in B, e con raggio eguale alla differenza *d* si descrivano due archi, che taglieranno la circonferenza descritta nei punti H e G. Si tirino le rette B G, A H, prolungandole sino in C, C' all'incontro della semicirconferenza, e si tirino A C, B C', e i due triangoli A C B, A C' B saranno i domandati.

Dimostrazione. — I triangoli A C B, A C' B sono rettangoli come inscritti in un semicircolo, ed hanno l'ipotenusa A B = *p* ipotenusa data. Ora i triangoli A C G, H C' B sono rettangoli ed isosceli, poichè hanno gli angoli in C e C' retti siccome inscritti in un semicircolo, e gli angoli acuti semiretti per la ragione che i supplementi degli angoli A G C, B H C' sono supplementi degli angoli A I B, A L B, i quali sono semiretti, poichè hanno per misura la metà dell'arco A B, ossia dell'angolo al centro A E B, che è retto per costruzione. Essendo quindi i triangoli A C G, H C' B isosceli, ne consegue che A C = C G, H C' = B C'; onde B C — C A = B C — C G = B G = *d* e A C' — C' B = A C' — H C' = *d*. Dunque resta dimostrato che i due triangoli A C B, A C' B sono rettan-

goli, hanno l'ipotenusa $A\,B = p$ e la differenza dei loro cateti eguale d, e quindi che sono i triangoli richiesti.

Discussione. — Se la differenza d dei due cateti è nulla, i punti G e H vengono a cadere rispettivamente nei punti A e B, e le due rette A H, B G si cambiano nelle due tangenti A K, B K al circolo di centro E e di raggio E B, e conseguentemente un solo è il triangolo che risolve il problema, ed è il triangolo rettangolo A K B. È facile vedere come nel caso che si abbiano due triangoli, questi sieno eguali e simmetrici per rispetto alla perpendicolare D K innalzata su A B dal suo punto di mezzo D.

38.° — *Costruire un triangolo, conoscendone la base, l'angolo opposto, e la somma dei due lati.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 44).

Risoluzione. — Sia b la base, H l'angolo opposto ed s la somma dei due lati del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta $A\,B = b$ base data, e sopra questa retta si descrivano due segmenti di circolo, di cui uno capace dell' angolo dato H e l' altro capace della metà dello stesso angolo dato, il quale ultimo si può agevolmente ottenere, dopo descritto il primo, innalzando dal punto D di mezzo di A B una perpendicolare a questa retta, sino all' incontro del primo segmento in F, e facendo centro in questo punto F e con raggio F A descrivendo un circolo. Si faccia in seguito centro in B e con un' apertura di compasso eguale alla retta s somma dei due lati, si descriva un arco che taglierà il secondo segmento descritto nei due punti G ed L. Tirate le rette B G, B L, A C, A C', i due triangoli A B C, A B C' saranno i domandati.

Dimostrazione. — I triangoli A B C, A B C' hanno la base $A\,B = b$ base data, ed il vertice opposto su di un segmento descritto capace dell'angolo dato H. Se si prendono ora a considerare i due triangoli A C L, A C' G, si vede che essi hanno gli angoli in C e C' eguali, poichè non sono altro che i supplementi di due angoli uguali ad H come inscritti nel primo segmento di circolo; inoltre gli angoli in G ed L uguali entrambi alla metà dell'angolo dato H come inscritti nel secondo segmento di circolo, dimodochè hanno anche gli

angoli L A C, G A C' entrambi eguali ad $\frac{1}{2}$ H, potendosi stabilire A C B = H = A L C + L A C, e A C' B = H = A G C' + G A C', nelle quali eguaglianze se A L C, A G C' sono eguali ad $\frac{H}{2}$, anche L A C, G A C' debbono essere eguali ad $\frac{H}{2}$; per conseguenza i due triangoli A C L, A C' G sono isosceli. Da ciò può dedursi che C A = C L e C' A = C' G, e quindi che B C + C A = B C + C L = B L = *s* e B C' + C' A = B C' + C' G = B G = *s*. Dunque i due triangoli A C B, A C' B hanno anche i due lati comprendenti l'angolo dato H che sommano ad *s*; epperciò soddisfanno entrambi al problema.

Discussione. — I due triangoli A C B, A C' B risultano evidentemente eguali e simmetrici per rispetto alla perpendicolare D F innalzata su A B dal suo punto di mezzo D.

Se la somma data *s* dei due lati è uguale al diametro della circonferenza descritta con centro F e con raggio F A, si ha allora un solo triangolo che risolve il problema, ed è il triangolo A F B; se quella somma è maggiore di esso diametro, la risoluzione del problema è impossibile.

39.° — *Costrurre un triangolo conoscendo la base, l'angolo opposto e la differenza degli altri due lati.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 45).

Risoluzione. — Sia *b* la base data, H l'angolo opposto, e *d* la differenza degli altri due lati del triangolo da costruirsi.

Si tiri una retta A B eguale alla base data *b*, e sopra di essa si descriva un segmento di circolo capace dell'angolo dato H, ed un secondo segmento capace di un angolo di 180° + H, la quale ultima costruzione non è molto difficile ad eseguirsi, bastando d'innalzare nel punto di mezzo D della A B a questa retta una perpendicolare fino all'incontro in E colla circonferenza del primo segmento descritto, e far centro in E e con raggio E A descrivere un circolo. Si faccia poi centro in A e B e con raggio eguale alla differenza *d* si descrivano due archi, che taglieranno l'arco del secondo segmento nei due punti P e Q. Tirate le rette B P, A Q, e prolungate le medesime sino all'incontro dell'arco del primo segmento, e ti-

rate B C ed A C', i due triangoli A B C, A B C' risultanti saranno i domandati.

Dimostrazione. — Considerando il triangolo C Q B, si vede che il suo vertice Q si trova sul secondo segmento descritto, e che l'angolo C Q B è eguale alla metà del supplemento dell' angolo dato, poichè egli è supplemento dell'angolo A Q B, il quale è pure supplemento dell'angolo A L B, che è metà dell'angolo A E B, che è supplemento dell'angolo dato H; oltracciò si vede pure che siccome l'angolo C è eguale ad H, l' angolo C B Q dovrà essere di necessità eguale all'angolo C Q B; epperciò eguale alla metà del supplemento dell' angolo dato. Quindi il triangolo C Q B è isoscele ed il lato C Q = C B.

Analogo ragionamento fatto sulla considerazione del triangolo P C' A, porta a stabilire essere questo triangolo pure isoscele, e perciò C' P = C' A. Cosicchè A C — C B = A C — C Q = A Q = d e B C' — C' A = B C' — C' P = P B = d. Or dunque i due triangoli A B C, A B C', oltrechè hanno la base A B eguale alle base data, i vertici C e C', su di un segmento capace dell'angolo dato H, risulta che hanno anche la differenza degli altri due lati eguali a d differenza data, o quanto è dire che sono triangoli che rispondono al problema.

Discussione. — Anche qui è facile vedere che i due triangoli A C B, A C' B sono eguali e simmetrici per rispetto alla retta D K perpendicolare ad A B nel suo punto di mezzo D. Se la differenza d è nulla, i due punti Q e P vengono a confondersi rispettivamente coi punti A e B, e le rette A Q, B P, a cambiarsi sulle due tangenti A K, B K al circolo di centro E, e di raggio E A; dimodochè un solo è il triangolo che risolve il problema, ed è il triangolo A K B.

NB. Questi quattro ultimi problemi sono stati già risolti in seguito alla teoria del primo libro, e molto più facilmente che coi metodi testè indicati. Lo avere però esposto anche questi nuovi modi di risoluzione, ne è parso non inopportuno, porgendo essi mezzo efficacissimo per esercitare la mente alla diversa valutazione di angoli inscritti nei circoli.

40.° — *Determinare il punto attorno cui deve girare un rettangolo, onde uno dei suoi lati maggiori venga a bipartire i due lati maggiori stessi nella prima posizione del rettangolo, e da questi lati maggiori riescano equidistanti i lati minori del rettangolo dopo aver girato.*

(Vedi Tavola XVIII, Fig. 46).

Risoluzione 1.ª — Sia A B C D il rettangolo dato, nel quale occorre determinare il punto attorno cui esso muovendosi, venga a prendere la posizione A′ B′ C′ D′ tale, che il lato maggiore A′ B′, venga a bipartire i due lati A B, C D nella prima posizione, e che questi lati maggiori A B, D C nella prima posizione, riescano equidistanti dai lati minori D′ A′, C′ B′ nella seconda posizione, cioè che sia B′ N = M A′.

Il rettangolo A B C D dovendo girare attorno ad un punto per prendere la posizione A′ B′ C′ D′, è chiaro che il punto A per venire in A′, deve descrivere un arco di circolo il cui centro è nel punto che si cerca, e così di tutti gli altri punti B, C, D per venire in B′, C′, D′. Per conseguenza non si avrà che a tirare le rette A A′, B B′, C C′, D D′, e su di ciascuna di queste rette, oppure soltanto su due ed al loro punto di mezzo, innalzare delle perpendicolari, che si intersecheranno nel punto P che si cerca.

Dimostrazione. — Il punto P dovendo essere il centro di tanti circoli concentrici che debbono passare pei vertici A, B, C, D del rettangolo, è chiaro che deve trovarsi all'incontro comune di tutte le perpendicolari innalzate sulle metà di tutte le corde condotte nei suddetti circoli.

Risoluzione 2.ª — I falegnami, ai quali bene spesso occorre di risolvere questo problema per costrurre le così dette tavole doppie, cioè tavole che ripiegate occupano l'estensione di un rettangolo A B C D, ed aperta quella doppia di un rettangolo D′ D″ C″ C′, si valgono d'altro metodo più pratico, ma che equivale a quello sovra esposto, per determinare il punto d'infissione del perno attorno cui debbano girare per venire dalla prima posizione in cui sono ripiegate, alla seconda in cui possono essere aperte. Essi dividono per metà il lato A B in M, ed in questo punto portano una di-

stanza $M E = M F = \frac{A D}{4}$, cioè eguale alla quarta parte del lato minore, e formano il quadrato F M E P, che determina in P il punto del perno.

Dimostrazione. — La perpendicolare P F abbassata sul lato A B del rettangolo A B C D, prenderà dopo avvenuta la rotazione, la posizione P E, e quella P Q abbassata sul lato A D, la posizione P R. Se ora si immagina prolungato D A sino in S all'incontro del lato minore D' A' del rettangolo nella seconda posizione, il punto P dovrà trovarsi sulla bisettriee S P a 45° per essere $P R = P Q$; e dovendo trovarsi il punto P sulla bisettrice P M pure a 45°, perchè sia $P F = P E$, lo stesso punto P sarà nell'intersezione delle due bisettrici. Immaginando inoltre prolungato S P sino in Z all'incontro del lato maggiore A' B' del rettangolo nella seconda posizione, si avrà $S A' = A' Z = A M = \frac{A B}{2}$, per eui $M Z = \frac{A B}{2} - A' M$, la quale eguaglianza, stante che $A' M = \frac{A B - A D}{2}$, si cambierà nell'altra $M Z = \frac{A B}{2} - \frac{A B - A D}{2}$, ossia $2 M Z = A D$, ossia $M Z = \frac{A D}{2}$. Ma essendo isosceli i triangoli M P T, M P Z, le perpendicolari abbassate sulle loro basi dal vertice opposto P, divideranno quelle basi per metà, e si avrà perciò $F T = F M = M E = E Z$. Dunque $M E = \frac{M Z}{2} = \frac{A D}{4}$, lo che prova l'esattezza della esposta risoluzione del problema.

LIBRO TERZO

DELLA PLANIMETRIA E DELLE FIGURE SIMILI.

Planimetria. — Chiamasi Planimetria la parte della Geometria Piana che si occupa del mezzo di determinare l'area delle superficie piane, intendendosi per area il risultato della misura di una superficie piana. Due superficie di eguale area, si dicono *equivalenti*.

Una misura eseguendosi sempre col confronto di elementi della stessa specie, la misura perciò di una superficie piana si eseguisce confrontandola con altra superficie piana presa per unità di misura, confrontando cioè, come si disse sino nei preliminari, un'area con altra area.

Date due superficie piane, delle quali una per unità di misura, sarà assai facile il determinare l'area dell'altra in funzione della sua unità di misura, alloraquando sia conosciuto il numero di volte che una terza qualunque determinata superficie entra nelle due superficie date. Se infatti supponesi che delle due superficie date, quella data per unità di misura, contenga ad esempio 6 volte una terza conosciuta superficie, e che l'altra contenga ad esempio 12 volte la stessa terza conosciuta superficie, è evidente come le due superficie date sieno nel rapporto 6 : 12 ossia come 1 : 2, cioè essere una superficie doppia dell'altra, o meglio l'area della superficie proposta eguale a due in funzione dell'altra superficie unità di misura eguale sempre ad uno. Per cui puossi in generale conchiudere, che l'area di una superficie qualunque è espressa dal quoziente che si ottiene dividendo il numero di volte che una terza superficie conosciuta entra nella superficie data, per il numero di volte che la stessa terza superficie entra nella superficie unità di misura.

Il quesito quindi della ricerca dell'area di una superficie in funzione di altra qualunque superficie, è ridotto a quello della ricerca dell'area di una superficie in funzione di una superficie fissa.

Le superficie piane che non sono infinite, sono limitate da linee, e si sa essere poligoni o rettilinei o curvilinei o mistilinei.

Il poligono che forma la superficie fissa in funzione della quale si deve derivare l'area di una superficie qualunque, è il quadrato, generalmente. Il quadrato essendo fisso e determinato colla conoscenza di un solo elemento, è la unità di misura pelle superficie più comunemente adottata.

Data una figura qualunque, e dato un quadrato per unità di misura, trovarne la misura od area della figura, è il quesito che compendia la planimetria.

Una figura potendo essere o rettilinea, o curvilinea, o mistilinea, così si considereranno ciascuno di questi diversi casi, partendo da quello di una figura rettilinea o poligono, e si vedrà di stabilirne il rapporto corrente con un quadrato dato.

Ora bene, trattandosi di fare il confronto di un poligono con un quadrato, è evidente che tanto più semplice sarà il poligono, altrettanto più facile deve riescire il confronto. Ed il confronto di due figure coi soli studii fatti, non essendo fattibile diversamente che per sovrapposizione, è altresì evidente che esso sarà tanto più facile quanto più la forma della figura si presterà alla sovrapposizione di un quadrato. Questi due limiti essendo perfettamente raggiunti dal quadrato, così si supporrà da bel principio di avere un quadrato qualunque A B C D (Fig. 1, Tav. XIX) a misurare, tenendo per unità di misura l'altro quadrato *a b c* A. E supponendo da bel principio un quadrato a misurare, si ha il vantaggio del paragone di due figure entrambe determinate da un medesimo elemento; epperciò tali che il rapporto superficiale non potendo a meno di dipendere dagli elementi stessi che le costituiscono e determinano, sarà una funzione di questo.

Misura del quadrato. — Se si porta il lato A *c* del quadrato *a b c* A unità di misura sul lato A B del quadrato A B C D a misurare, se si suppone che questo lato sia contenuto cinque volte esattamente, e dai diversi punti *c*, 2, 3, 4 innalzate delle perpendicolari a A B, vedesi immediatamente come il quadrato a misurare A B C D risulti scomposto in cinque rettangoli perfettamente eguali tra loro, aventi

tutti per base una lunghezza eguale al lato del quadrato unità di misura, e per altezza il lato del quadrato a misurare. Onde conosciuta l'area di ciascuno di detti rettangoli, cinque volte una tale area sarà tutta l'area del quadrato a misurare. Ma per dedurre l'area di ciascuno di detti rettangoli non è più cosa difficile, inquantochè essendo B C = A B come lati dello stesso quadrato, ed il lato del quadrato unità di misura essendo contenuto cinque volte in A B, lo è pure contenuto cinque volte esattamente in B C, sicchè tirando dai diversi punti 1, 2, 3, 4 ottenuti sul lato B C con portare il lato del quadrato unità di misura, delle parallele al lato A B, ognuno dei rettangoli trovasi scomposto in cinque quadrati eguali tra loro ed eguali ciascuno al quadrato unità di misura; e tutto il quadrato trovasi scomposto in venticinque quadrati eguali tra loro, ed eguali ciascuno al quadrato unità di misura; e l'area del quadrato proposto perciò eguale a venticinque.

Supponendo quindi un quadrato a misurare, il cui lato sia un multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura, siccome portato il lato di quest'ultimo sul lato del primo vi è contenuto un numero m esatto di volte, ed è perciò il quadrato a misurare scomponibile in m rettangoli eguali i cui lati sono i lati dei due quadrati, ed ognuno di questi rettangoli scomponibile in m quadrati uguali al quadrato unità di misura; ne consegue che il quadrato a misurare conterrà $m \times m$, ossia m^2 quadrati unità di misura. Ma m essendo la misura del lato del quadrato a misurare, è così dato di stabilire come: ***l'area di un quadrato, il cui lato contenga un numero esatto di volte il lato del quadrato unità di misura, è eguale alla seconda potenza o quadrato del numero che ne esprime la misura del lato.***

Considerando un quadrato come quello A B C D (Fig. 2), in cui il lato A B non contenga un numero esatto di volte il lato A C del quadrato A *c b a* unità di misura, od in altre parole, considerando un quadrato il cui lato non sia un multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura, due e distinti possono essere i casi, vale a dire, può succedere che il lato del quadrato a misurare abbia col lato del quadrato unità di misura una comune misura, e può succedere che questa comune misura non esista, siano cioè i due lati, quello del quadrato a misurare e quello del quadrato unità di misura, due rette incommensurabili.

Nel caso in cui tra il lato del quadrato a misurare ed il lato del quadrato unità di misura esista una comune misura, si immagini un quadrato il cui lato sia l, cioè la comune misura dei lati dei due quadrati, quello a misurare e quello unità di misura, e si immagini paragonato questo quadrato con ciascuno dei due quadrati in questione.

Essendo l comune misura fra il lato del quadrato a misurare ed il lato del quadrato unità di misura, sono tanto il lato del quadrato a misurare, che il lato del quadrato unità di misura, due multipli di l, ed essendo m il coefficiente del primo, n il coefficiente del secondo, in virtù della espressione stabilita circa l'area di un quadrato il cui lato sia un multiplo del lato del quadrato unità di misura, si avrà che l'area del quadrato a misurare, e quella del quadrato unità di misura in funzione di un quadrato di lato l, è la prima eguale ad $m^2 l^2$, la seconda a $n^2 l^2$. Ora bene, due quadrati aventi il primo per area una quantità $m^2 l^2$, il secondo per area una quantità $n^2 l^2$, è l'area del primo, tenendo per unità di misura il secondo, eguale a $\frac{m^2 l^2}{n^2 l^2}$ ossia a $\frac{m^2}{n^2}$. Ma $\frac{m}{n}$ essendo la misura del lato del quadrato a misurare con unità il lato del quadrato unità di misura, risulta stabilito come: *l'area di un quadrato, il cui lato ha col lato del quadrato unità di misura una comune misura, è eguale alla seconda potenza o quadrato della misura del proprio lato.*

Nel caso in cui tra il lato di un quadrato a misurare, e quello del quadrato unità di misura, non esista comune misura, che cioè sieno due rette incommensurabili, suppongasi portata consecutivamente sul lato del quadrato dato, una lunghezza l, la quale sia contenuta un numero esatto m di volte nel lato del quadrato unità di misura; ed avverrà che il lato del quadrato proposto alla misura sarà eguale ad $n\,l + q$, cioè un certo numero n di volte la lunghezza l più una quantità $q < l$; od avverrà che il lato del quadrato in questione sarà eguale ad $n\,l + l - r$, cioè $n + 1$ volte la lunghezza l meno una quantità $r < l$, tale però che $r + q = l$. Il quadrato il cui lato fosse $n\,l$, la sua area sarebbe, per quanto si è già dimostrato, eguale a $n^2 l^2$; ed il quadrato il cui lato fosse $n\,l + l$, la sua area sarebbe $(n\,l + l^2)$. Il quadrato proposto essendo compreso fra i due suindicati quadrati, vale a dire

avendo il lato compreso tra $n\,l$ e $n\,l \times l$, la sua area ne è pure compresa. E quanto maggiormente piccola sarà la lunghezza l, e conseguentemente le lunghezze q ed r, viemaggiormente i due quadrati si accosteranno al quadrato proposto, senza però mai giungere nemmeno all'infinito a farvi coincidenza; cosicchè sarà sempre supponibile un quadrato sia più grande che più piccolo del quadrato dato, di una quantità più piccola di qualsiasi quantità data, e tale che il suo lato abbia col lato del quadrato unità di misura, una comune misura. Se quindi la seconda potenza del numero che esprime la misura del lato del quadrato in questione, esprimesse un'area che fosse più grande o più piccola dell'area di detto quadrato, egli ne avverrebbe, che tanto nell'uno quanto nell'altro caso, questa seconda potenza esprimerebbe sempre un quadrato più grande o più piccolo di altro quadrato, avente col lato del quadrato unità di misura una comune misura, ed un lato più grande o più piccolo del lato del quadrato in questione, e la cui area è per quanto già fu dimostrato, eguale al quadrato della misura del lato; laonde non potendo la seconda potenza di una quantità eguagliare la seconda potenza di una quantità più grande o più piccola, è giocoforza conchiudere che anche nel caso di incommensurabilità dei lati di due quadrati, quello a misurare e quello unità di misura, l'area è sempre la seconda potenza della misura del lato. Puossi quindi conchiudere come in generale: *l'area d'un quadrato qualsiasi è eguale alla seconda potenza o quadrato della misura del proprio lato.* Cosicchè X essendo il lato di un quadrato, X^2 ne è l'espressione dell'area S.

Misura del rettangolo. — Sia A B C D (Fig. 3) un rettangolo a misurarsi col quadrato *a b c d* per unità di misura.

Onde vedere quante volte il quadrato unità di misura sia contenuto nel rettangolo dato, si porti da principio il lato *a b* sul lato A B, che supponesi contenuto tre volte esattamente; per i diversi punti 1, 2 si conducano delle parallele ai lati A D, B C del rettangolo; e ne risulterà che il rettangolo A B C D verrà scomposto in tre rettangoli perfettamente eguali, aventi tutti una medesima altezza, che è quella altresì del rettangolo in questione, ed una medesima base che è il lato del quadrato unità di misura. Conosciuta l'area di ciascuno dei tre rettangoli, il triplo di dett'area sarà l'area del rettangolo proposto. Ciò posto, se portasi il lato del quadrato unità

di misura sul secondo lato B C del rettangolo, e supponesi contenuto ad esempio cinque volte esattamente, sarà facile lo scorgervi come tirando dai diversi punti 1, 2, 3, 4 del lato B C delle parallele al lato A B, risulti il rettangolo A B C D scomposto in tanti quadrati eguali al quadrato unità di misura, e risulti ciascuno dei tre rettangoli in cui era stato primitivamente scomposto, scomposto a sua volta in cinque quadrati eguali al quadrato unità di misura. Onde l' area del rettangolo A B C D eguale a 3×5, ossia 15, vale a dire al prodotto della misura dei due lati A B e B C che lo determinano, come è d' altronde agevole di rilevare coll' ispezione della figura.

Supponendo quindi in generale un rettangolo, su di un lato del quale dopo portato consecutivamente il lato del quadrato unità di misura, sia questo stato contenuto un numero m esatto di volte, e così scomponibile il rettangolo in questione in m rettangoli eguali, aventi ognuno un lato eguale al lato del quadrato unità di misura, e l'altro lato eguale all' altro lato del rettangolo, è evidente come portato il lato del quadrato unità di misura sull'altro lato del rettangolo, ed essendo questo contenuto n volte esattamente, sia ognuno dei rettangoli in cui venne scomposto il rettangolo in considerazione, scomponibile in n quadrati eguali al quadrato unità di misura, epperciò sia l'intiero rettangolo considerato, eguale a $m \times n$ quadrati unità di misura, vale a dire come: *l' area di un rettangolo, i cui lati sono due multipli esatti del lato del quadrato unità di misura, è eguale al prodotto della misura dei suoi lati.*

Nella fatta ricerca dell'area di un rettangolo, si è considerato il caso solo in cui amendue i lati sieno multipli esatti del lato del quadrato unità di misura: restano per conseguenza a considerarsi tutti questi altri casi; quello in cui il rettangolo a misurare ha un lato che è multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura, e l'altro lato che ha col lato del quadrato unità di misura una comune misura; quello in cui il rettangolo a misurare ha un lato che è multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura e l'altro lato incommensurabile col lato del quadrato unità di misura; quello in cui amendue i lati del rettangolo a misurarsi hanno una comune misura col lato del quadrato unità di misura; quello in cui un lato avendo comune misura col lato del quadrato unità di misura, l'altro lato è incommensurabile col lato del quadrato unità di

misura; quello infine in cui i lati del rettangolo a misurarsi sono amendue incommensurabili col lato del quadrato unità di misura.

Sia A B C D (Fig. 4) un rettangolo a misurare, col quadrato *a b c d* per unità di misura, nel quale un lato B C è multiplo del lato del quadrato unità di misura, mentrechè non lo è il lato A B, che però ha con *a b* una comune misura.

Egli è evidente come, l essendo la comune misura contenuta n volte in A B ed m volte in *a b*, sia pure questa contenuta un numero esatto di volte p nel lato B C. L'area del rettangolo A B C D in funzione di un quadrato avente per lato l, essendo pel caso che già venne dimostrato, eguale a $n\,l \times p\,l$, e quella del quadrato unità di misura, eguale a $m\,l \times m\,l$, ne risulta che è l'area del rettangolo A B C D in funzione del quadrato unità di misura, eguale a $\frac{n\,l \times p\,l}{m\,l \times m\,l}$ ossia dietro riduzione a minimi termini ad $\frac{n \times p}{m \times m}$. Ma $\frac{n}{m}$ e $\frac{p}{m}$ essendo le misure dei lati A B, B C del rettangolo A B C D, si dirà ancora come: *l'area di un rettangolo avente un lato multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura, e l'altro lato una comune misura col lato del quadrato unità di misura, è eguale al prodotto della misura dei suoi due lati.*

Considerando il caso in cui, mantenendosi il lato B C multiplo esatto del lato del quadrato unità di misura, siano i lati A B ed *a b* tra loro incommensurabili, immaginisi che una lunghezza l contenuta un numero esatto m di volte in *a b*, epperciò contenuta ancora un numero esatto p di volte in A D, venga portata consecutivamente su di A B, egli avverrà che per l'incommensurabilità di A B con *a b*, A B sarà sempre eguale o ad $n\,l + q$ oppure $n\,l + l - r$, essendo $q + r = l$ e tanto q quanto r entrambi minori di l; ed in virtù delle regole di già stabilite le aree dei rettangoli di lato costante $p\,l$, e di lato variabile $n\,l$, $n\,l + l$ espresse da $p\,l \times n\,l$ e da $p\,l \times (n\,l + l)$, ed il rettangolo proposto alla misura compreso fra i due suindicati rettangoli, e fra questi limiti compresa altresì l'area domandata, e tanto più piccola sarà la lunghezza l e conseguentemente le lunghezze q ed r, tanto più i due rettangoli si accosteranno al rettangolo proposto, senza però mai giungere neppure all'infinito ad avervi coincidenza; per cui sarà sempre supponibile un rettangolo più grande o più piccolo del rettangolo dato, e di una quantità più piccola di qualsiasi quantità

data, e tale che mantenendo costante il lato B C, abbia l'altro lato in comune misura col lato del quadrato unità di misura. Se quindi il prodotto della misura dei lati del rettangolo in questione, esprimesse un'area più grande o più piccola dell'area di detto rettangolo, egli ne avverrebbe, che tanto nell'uno quanto nell'altro caso, questo prodotto esprimerebbe sempre un rettangolo più grande o più piccolo di un altro rettangolo, avente il lato costante B C e l'altro lato in comune misura col lato del quadrato unità di misura, e più grande o più piccolo del lato A B, e la cui area è per quanto già fu dimostrato, eguale al prodotto dei lati; laonde non potendo un prodotto, eguagliare altro prodotto formato da un medesimo fattore, e da altro fattore più grande o più piccolo, è duopo conchiudere che *l'area di un rettangolo, i cui lati sono uno multiplo del lato del quadrato unità di misura, l'altro incommensurabile col lato del quadrato unità di misura, è eguale al prodotto della misura dei due lati.*

Essendo l la comune misura contenuta m volte nel lato del quadrato unità di misura, n volte in un lato del rettangolo, e p volte nell'altro lato, è visibile, essere l'area del rettangolo in funzione di un quadrato di lato l, eguale ad $n\,l \times p\,l$, e quella del quadrato unità di misura, eguale a $m\,l \times m\,l$; epperciò l'area del rettangolo in funzione del quadrato dato per unità di misura, eguale a $\frac{n\,l \times p\,l}{m\,l \times m\,l}$ la quale frazione divisa per l, riducesi a $\frac{n \times p}{m \times m}$ ossia $\frac{n}{m} \times \frac{p}{m}$. Ma i due fattori di questo prodotto che esprime l'area del rettangolo essendo la misura dei lati, è conchiudibile come *l'area di un rettangolo, i cui lati hanno comune misura col lato del quadrato unità di misura, è eguale al prodotto della misura dei suoi lati.*

Essendo l la comune misura, contenuta m volte esattamente nel lato del quadrato unità di misura, e p volte esattamente in un lato di un rettangolo, ove portisi questa comune misura sull'altro lato incommensurabile del rettangolo, ne avverrà che quest'altro lato sarà eguale o ad $n\,l + q$, o ad $n\,l + l - r$, essendo sempre $q + r = l$ e $q < l$, $r < l$, e le aree dei rettangoli di lato costante $p\,l$, e di lati variabili $n\,l$, $n\,l + l$, per quanto fu già dimostrato, eguali a $p\,l \times n\,l$, $p\,l\,(n\,l + l)$. Il rettangolo a misurarsi, essendo compreso fra questi due rettangoli, ed avendo con questi un lato

eguale, pella dimostrazione data al 3.° dei casi considerati, a cui questo fa ritorno, viensi egualmente ad ottenere come *l'area di un rettangolo, i cui lati sono col lato del quadrato unità di misura, l' uno in comune misura, l' altro in incommensurabilità, è eguale al prodotto della misura dei suoi lati.*

Finalmente, i lati di un rettangolo a misurare ed il lato di un quadrato dato per unità di misura, essendo tre rette che non abbiano una comune misura, se ne indurrà l'area nel modo seguente: s' immagini che una lunghezza l contenuta un numero esatto di volte m nel lato del quadrato unità di misura, cioè l una parte aliquota di questo, sia portata consecutivamente su due lati adiacenti del rettangolo; non essendo l comune misura di questi ultimi, ne deriva che uno dei lati rimarrà eguale o a $p\,l + t$ o a $p\,l + l - u$, essendo $t + u = l$, e tanto t che u minori di l; e l'altro dei lati, eguale o a $n\,l + q$, o a $n\,l + l - r$, essendo $q + r = l$, e tanto q che r entrambi minori di l. I rettangoli di lati $n\,l$, $p\,l$ e $n\,l + l$, $p\,l + l$, hanno la loro area misurata dalle espressioni $n\,l \times p\,l$, $(n\,l + l)(p\,l + l)$, e sono l'uno più piccolo, l'altro più grande del rettangolo proposto, e conseguentemente fra l'area di questi rettangoli è compresa l'area che si cerca.

Ora bene, egli è evidente che quanto più sarà piccola la lunghezza l, epperciò altresì le diverse lunghezze t, u, q, r, di altrettanto i due rettangoli saranno vicini al rettangolo in questione, e poichè tanto la lunghezza l, che le lunghezze t, u, q, r, sono suscettibili di essere rese inferiori a qualsiasi quantità data, così ne deriva essere altresì sempre possibile la supposizione di due rettangoli, l'uno più grande, l' altro più piccolo del rettangolo a misurare, di una quantità inferiore a qualsiasi quantità data, e tali che i lati di essi sieno in comune misura col lato del quadrato unità di misura. Ciò posto, se il prodotto della misura dei lati del rettangolo a misurare esprimesse un' area più grande o più piccola della vera area del rettangolo, ne avverrebbe, che tanto nell' uno quanto nell'altro caso, questo prodotto esprimerebbe sempre un rettangolo più grande o più piccolo di altro rettangolo, avente i lati col lato del quadrato unità di misura in comune misura, ed i lati più grandi o più piccoli dei lati del rettangolo in questione, e la cui area è per quanto fu già dimostrato, eguale al prodotto della misura dei lati; laonde non potendo un prodotto eguagliare altro

prodotto formato da fattori amendue più grandi od amendue più piccoli, è duopo conchiudere come ancora *l' area di un rettangolo, i cui lati sono col lato del quadrato unità di misura quantità incommensurabili, è eguale al prodotto della misura dei suoi lati.*

Esaminati così tutti i casi, puossi conchiudere come in generale: *l' area di un rettangolo qualsiasi è eguale al prodotto della misura dei suoi due lati.* Cosicchè, essendo A e B i lati di un rettangolo, sarà A $\times$ B l'espressione dell'area S.

Misura del parallelogramma. — Essendo dato un parallelogramma, come ad esempio quello A B C D (Fig. 5), e dovendone cercare l' area, egli non è difficile di venire alla soluzione del quesito, conoscendo il mezzo di valutazione dell'area del rettangolo, e più non occorre di valersi del mezzo di sovrapposizione sinora stato usato, essendochè ogni figura che si verrà studiando sarà trasformata agevolmente in un rettangolo equivalente. Infatti dai vertici A e B innalzando sul lato A B due perpendicolari sino all' incontro in E ed F col lato parallelo D C, è assai facile di vedere, originarsi in tal modo un rettangolo A B E F equivalente al parallelogramma A B C D.

I due triangoli A E D, B F C, essendo perfettamente eguali tra loro, siccome amendue rettangoli, l'uno in E, l' altro in F, e siccome aventi l' ipotenusa A D = B C, e l'angolo E A D = F D C, ne avviene manifestamente come dalla figura A B C E, togliendo il triangolo A D E, rimanga il parallelogramma A B C D eguale al rettangolo A B F E che si ottiene togliendo dalla stessa figura A B C E il triangolo B C F. Ora bene, l'area del rettangolo A B F E essendo espressa dal prodotto dei due lati A B $\times$ A E, non resta più solo che di vedere cosa siano queste rette nel parallelogramma, per formulare la regola di deduzione della sua area. Sieno A B ed A E due rette perpendicolari tra loro, la prima è un lato del parallelogramma, la seconda è la distanza di esso al suo parallelo, in altre parole la prima è una base del parallelogramma, la seconda è una altezza del parallelogramma. Si potrà quindi conchiudere come *l'area di un parallelogramma è eguale al prodotto della misura di una base per la rispettiva altezza.* Cosicchè A essendo una base ed H l'altezza rispettiva, sarà A $\times$ H l' area S.

Un parallelogramma potendo venire considerato con due diverse basi, ed i prodotti di qualsiasi di queste colla rispettiva altezza do-

vendo eguagliare; consegue immediatamente che chiamando con a e b i lati di un parallelogramma, h l'altezza sulla base a, h' l'altezza sulla base b, abbia luogo l'eguaglianza $a\,h = b\,h'$, la quale fornisce la proporzione $a : b :: h' : h$, da cui chiaro apparisce, essere le basi di un parallelogramma inversamente proporzionali alle altezze.

Misura del triangolo. — Essendo A B C (Fig. 6) un triangolo qualsiasi, poichè se dal vertice C menasi una parallela alla base A B, e dal vertice B una parallela al lato A C, risulta un parallelogramma A B C D avente per base la base A B del triangolo, e per altezza la perpendicolare od altezza C H del triangolo, ed in cui il triangolo A B C non ne è che la metà, essendo il triangolo C D B = A B C, siccome avente il lato C B comune, il lato C D = A B, il lato A D = A C siccome lati opposti di un parallelogramma, ne deriva che l'area di un triangolo sarà sempre la metà di quella di un parallelogramma di medesima base e di medesima altezza. Ma l'area di un parallelogramma essendo eguale al prodotto della base A B, per l'altezza C H, *l'area di un triangolo qualsiasi è eguale alla metà del prodotto della base per la relativa altezza,* vale a dire eguale $\frac{1}{2}$ A B $\times$ C H. Ed essendo A la base, H l'altezza, sarà $\frac{B \times H}{2}$ l'espressione dell'area S. Quantunque dire la base per la metà dell'altezza, oppure l'altezza per la metà della base, come il semiprodotto della base per l'altezza, sia tutt'uno, è tuttavia migliore cosa il ritenere l'ultima dicitura, perchè i computi che generalmente si fanno, essendo su risultati di misure, le quali non sono che approssimate alle vere, si commetterà sempre un errore minore dividendo il prodotto piuttostochè dividendo un fattore, potendo accadere che nella divisione di un fattore occorra trascurare alcune cifre, che pur possono avere effetto sul prodotto.

Ogni lato del triangolo potendo essere preso per base, ne consegue che in un triangolo qualsiasi esistono tre basi e tre altezze. Il prodotto di ogni base per la relativa metà dell'altezza, dando l'area del triangolo, è evidente che debbono essere eguali i tre prodotti che sono ottenibili nel moltiplicare ciascuna base per la rispettiva altezza, vale a dire, essendo a, b, c, le basi o lati di un triangolo, h, h', h'', le rispettive altezze, come dovendo essere $\frac{a\,h}{2} = \frac{b\,h'}{2} = \frac{c\,h''}{2}$, ossia

$a\,h = b\,h' = c\,h''$, detta eguaglianza fornisca la proporzione $a : b : c :: h'' : h' : h$, che dimostra essere le tre altezze di un triangolo inversamente proporzionale alle basi.

Misura del trapezio. — Ogni qualsiasi trapezio, come ad esempio quello A B C D (Fig. 7), venendo da una diagonale qualsiasi A C, scomposto in due triangoli A B C, A D C aventi il lato A C comune, il primo per base A B, il secondo per base C D, e per essere A B parallelo a C D, siccome basi del trapezio, la perpendicolare od altezza C E eguale all' altezza A F, è visibile ben tosto essere ogni qualsiasi trapezio eguale alla somma di due triangoli, aventi una medesima altezza e per basi le basi del trapezio. Laonde essendo l'area di un triangolo eguale al prodotto dell' altezza per la metà della base, sarà l' area del trapezio $A\,B\,C\,D = C\,E \times \frac{A\,B}{2} + A\,F \times \frac{D\,C}{2}$, e per essere $C\,E = A\,F$ e quindi C E fattore comune nei due termini che compongono il secondo membro dell' eguaglianza, si ha l'espressione: area $A\,B\,C\,D = C\,E \left(\frac{A\,B + C\,D}{2}\right)$, ovvero dire *l' area di un trapezio è eguale al semiprodotto della sua altezza per la somma delle basi parallele.*

A questa espressione dell'area del trapezio giungesi parimenti colla seguente altra via: vale a dire immaginando in un trapezio A B C D (Fig. 8), condotto pel punto di mezzo E di uno dei lati B C non paralleli, una parallela all'altro lato A D, poscia considerando i due triangoli H E B, C E G, che per avere un angolo opposto al vertice eguale, il lato $E\,B = E\,C$, e l'angolo $H\,B\,E = E\,C\,G$, sono eguali, epperciò è $C\,G = H\,B$, ed il parallelogramma A H G D equivalente col trapezio A B C D. L' area del parallelogramma A H G D essendo eguale al prodotto della base A H per la rispettiva altezza, che è la medesima di quella del trapezio, ne risulta essere altresì l'area del trapezio, eguale al prodotto della sua altezza per A H, ma questo A H essendo eguale a D G, ed eguale ad $A\,B - H\,B$ e $D\,G = D\,C + C\,G$, ovvero $D\,G = D\,C + H\,B$, è quindi $A\,H + D\,G = A\,B + C\,D$, ossia $2\,A\,H = A\,B + C\,D$, e per ultimo $A\,H = \frac{A\,B + C\,D}{2}$. Per cui è l'area del trapezio, eguale al semiprodotto della sua altezza per la somma delle basi parallele, risultato identico a quello

che già erasi trovato colla precedente via d'induzione. Essendo quindi H l'altezza di un trapezio, B, b le due basi, è l'area $S = \frac{H(B+b)}{2}$. E riteniamo qui pure la dicitura indicata piuttostochè quella del prodotto dell' altezza per la semisomma delle due basi, per la ragione medesima di cui si è fatto cenno per l'espressione dell'area del triangolo.

Misura di un poligono regolare. — Un poligono regolare, essendo, come fu detto sino nel libro primo, scomponibile in tanti triangoli eguali quanti sono i lati, mercè delle rette tirate dal centro del poligono ai singoli vertici, palesasi chiaro come l' area di un poligono regolare sia eguale alla somma delle aree di tutti i triangoli in cui è scomponibile, oppure sia eguale a tante volte l'area di un triangolo avente per base il lato del poligono, e per altezza l'apotema, quanti sono i lati del poligono. Cosicchè essendo A B C D E F G H un poligono regolare, O il suo centro, le diverse rette O A, O B, O C, O D, O E, O F, O G, O H, scomponendolo in otto triangoli eguali, aventi perciò eguale la base, siccome lati di uno stesso poligono regolare, eguale l' altezza, siccome altrettante apoteme di uno stesso poligono regolare, l' area di ciascuno di detti triangoli è eguale al prodotto del lato del poligono per la metà dell'apotema, e l'area del poligono intiero, eguale a tante volte l'area dei succitati triangoli quanti sono i lati del poligono.

Se però osservasi, che l'area S del poligono riducesi alla espressione: $S = AB \times \frac{OL}{2} + BC \times \frac{OM}{2} + CD \times \frac{ON}{2} + DE \times \frac{OP}{2} + EF \times \frac{OQ}{2} + FG \times \frac{OR}{2} + GH \times \frac{OS}{2} + HA \times \frac{OT}{2}$, e che per essere $OL = OM = ON = OP = OQ = OR = OS = OT$ trasformasi nell'altra $S = AB \times \frac{OL}{2} + BC \times \frac{OL}{2} + CD \times \frac{OL}{2} + DE \times \frac{OL}{2} + EF \times \frac{OL}{2} + FG \times \frac{OL}{2} + GH \times \frac{OL}{2} + HA \times \frac{OL}{2}$, che per essere il fattore $\frac{OL}{2}$ comune a tutti i termini, può essere messo fuori parentesi e ridursi all' espressione,

$$S = \frac{OL}{2}(AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA)$$

nella quale la quantità compresa fra la parentesi essendo null'altro che il perimetro del poligono regolare, conchiudesi come: *l'area di un poligono regolare è eguale al semiprodotto del perimetro per l'apotema.* Essendo quindi H l'apotema e P il perimetro di un poligono regolare, è l'area $S = \frac{HP}{2}$. E qui pure $\frac{HP}{2}$ di preferenza a $\frac{H}{2} \times P$ o ad $\frac{1}{2} P \times H$, pella ragione medesima stata indicata per le espressioni del triangolo e del trapezio.

Misura di un poligono qualsiasi. — Nella teoria del libro primo, fu di già osservato come qualsiasi poligono possa venire scomposto in triangoli, mercè delle diagonali tirate opportunamente. Presentasi quindi evidente come dato un poligono, se ne ottenga la misura nella somma delle aree dei triangoli in cui può venire scomposto.

L'area di ogni triangolo trovandosi col semiprodotto di due lunghezze, egli è naturale che siffatte lunghezze non essendo generalmente in pratica possibile di ottenerle che in una via di approssimazione, altrimenti che nella stessa via non può trovarsi il loro prodotto: e quindi tanto più piccolo sarà l'errore che si commetterà nel computo dell'area di un poligono, quanto più piccola sarà la scomposizione in esso operata. Oltre quindi all'avvertenza della minore possibile scomposizione di un poligono, ben'altre avvertenze debbonsi ancora seguire, onde raggiungere nella misura di un poligono la più grande esattezza possibile. Se per vero dire tali avvertenze formano parte della geometria pratica, tuttavia non essendo di nessuna importanza che colui, che pur dovendo calcolare l'area di un poligono sulla carta per studio, debba altresì possedere le osservazioni utili onde meglio raggiungere lo scopo che si prefigge, così di due sole, le più importanti, si dirà. — Al libro primo fu detto come la misura di una retta sia l'espressione della distanza fra i suoi estremi. Perchè quindi questa distanza abbia a riuscire la più vera possibile, è condizione indispensabile la posizione certa, fissa, degli estremi. Alloraquando due rette si incontrano ad angolo retto, il punto d'intersezione di esse è determinato colla massima esattezza possibile, ma se due rette non si tagliano ad angolo retto, il punto d'intersezione presentasi assai più difficile alla sua determinazione, e di tanto più difficile quanto più è ottuso od acuto

l'angolo d'intersezione. Se questa verità pratica potrebbesi dimostrare con tutto il rigore geometrico, ne scindiamo completamente pella ragione di sua naturale evidenza. Si comprenderà perciò di leggieri, come per misurare un poligono dovendo scomporlo, o in triangoli, o in quadrati, o in rettangoli, o in parallelogrammi, o in trapezii, vale a dire, dovendo scomporlo in figure calcolabili, delle quali cioè se ne conosca il mezzo di valutazione dell'area, abbiasi duopo di assumere delle misure in rette a tracciarsi, ed occorra per conseguenza che cosiffatte rette, abbiano una disposizione che più si prestino a presentare pronunciati i loro estremi, e ciò per le rette di scomposizione.

In quanto alle figure calcolabili di scomposizione, occorre che esse sieno le più grandi possibili, che abbraccino quanto più è possibile, l'intiero poligono a misurare, salvo sempre l'aggiungervi od il togliervi aree di figure calcolabili di un ordine inferiore; essendochè in cosiffatta guisa si evitano tutti quegli errori che si commetterebbero col computo ben' anche di ineguale numero di triangoli, ma di un'area più grande, ed evidentemente di un maggiore errore.

Nella valutazione dell' area di un poligono usasi soventissimo un metodo speciale, chiamato il *metodo delle coordinate*, il quale ha il vantaggio sopra gli altri che le misure necessarie al computo sono le medesime che determinano la sua figura. Essendo A B C D E F G H I L Q P un poligono, ecco in qual modo procedesi per la deduzione dell'area col metodo delle coordinate.

Tirata una retta qualunque nel poligono, generalmente la più lunga possibile, e chiamata *linea di base*, ad esempio A F, che unisce due vertici del poligono, dai singoli altri vertici del poligono si abbassino delle perpendicolari su di detta base, il poligono in tal modo viene scomposto in triangoli rettangoli ed in trapezi. Misurate le lunghezze A *a*, A *b*, A *c*, A *d*, A *e*, A *f*, A *g*, A *h*, A *l*, A *n*, A F e le le altre *a* P, *b* B, *c* Q, *d* C, *e* L, *f* D, *g* I, *h* E, *l* H ed *n* G, colle medesime è possibile la valutazione dell'intiero poligono. A dimostrare che sia possibile la valutazione dell' area, basti l' osservare che ogni qualsiasi figura calcolabile, ad esempio il trapezio *f h* E D, la sua area è eguale al semiprodotto di *f h* con la somma D *f* + E *h*, e queste tre lunghezze sono perfettamente fornite dalle assunte misure, in quanto alle due D *f* ed E *h* direttamente, in quanto alla

terza *f h* dalla differenza A *h* — A *f*. Essendo quindi possibile il computo di ogni figura calcolabile in cui venne scomposto il poligono, è possibile il computo dell'intiera area del poligono proposto. A dimostrare in seguito, che colle assunte misure sia possibile la costruzione intiera del poligono, basterà osservare come altro non si abbia a fare, che di tracciare una retta indefinita, e da un punto di essa portare le diverse distanze A *a*, A *b* ... ecc., e per i diversi punti *a*, *b*, *c* ... ecc. innalzare convenientemente delle perpendicolari, sulle quali portate le lunghezze *a* P, *b* D, *c* Q ... ecc., sieno i diversi punti A, B, P, Q ... ecc. altrettanti vertici del poligono, che convenientemente uniti con rette, forniscono l'intiero ed esatto poligono.

Potendo parere come più comodo fosse il misurare le lunghezze parziali, vale a dire A *a*, A *b*, *a c*, *b d*, *c e*, *d f* ... e così di seguito, più non occorrendo fare sottrazioni per avere sia le altezze dei trapezi, che quelle dei triangoli rettangoli; così osservasi che il metodo seguito è più esatto, imperciocchè in tal modo si conservano tutte quelle frazioni che nelle misure parziali come in ogni misura sono trascurabili, e che pur tuttavia col ripetersi acquistano valore significante.

Appellasi metodo delle coordinate il suindicato modo di scomposizione di un poligono in figure calcolabili, essendochè chiamansi *coordinate* due rette generalmente perpendicolari tra loro, che determinano la posizione di un punto; l'una ha il nome speciale di *ordinata*, l'altra quello di *ascissa*, così è B *b* l'ordinata, A *b* l'ascissa, ed entrambe, le coordinate del punto B.

Il metodo delle coordinate per la scomposizione di un poligono a misurare, se presentasi comodissimo per la sua semplicità, pel vantaggio di avere nelle dimensioni delle figure calcolabili, le dimensioni stesse della loro costruzione, ed ancora perchè determinabili con massima esattezza gli estremi delle rette a misurare, essendo questi null'altro che o vertici del poligono, o piedi di perpendicolari; tuttavia è insano per la valutazione dell'area di grandi poligoni, troppo numerose e pressochè eguali facendosi le figure calcolabili, e conseguentemente troppo grandi e numerosi gli errori inevitavili in ciascun computo.

Adunque la scomposizione di un poligono in figure calcolabili, deve essere fatta in modo, che queste sieno nel minor numero possibile, che una di esse abbracci la maggiore area possibile del

poligono, e che le misure necessarie al computo sieno il più possibile consecutive le une alle altre, onde possa in esattezza ottenersi il massimo risultato. Comunque però conchiudesi come: *l'area di un poligono qualunque è eguale alla somma delle aree delle figure calcolabili in cui può venire scomposto.*

Misura del circolo e sue parti. — Se praticamente può il circolo venire considerato siccome un poligono di un numero infinito di lati, ed infinitamente piccoli, ed in cui l'apotema eguagli il raggio tanto del circolo inscritto, quanto del circoscritto, e conseguentemente l'area del circolo eguale al semiprodotto della circonferenza pel raggio, tuttavia, teoricamente non potendo farsi una tale considerazione, non potendo cioè supporsi che la divisione all'infinito della circonferenza del circolo possa condurre ad un quoziente zero, ben diversa è l'induzione che debbe tenersi per trovare l'area del circolo.

Premesso che se in un circolo, come ad esempio quello di centro O (Fig. 11), si tira una corda qualsiasi C D, la superficie del circolo viene scomposta in due parti, ciascuna delle quali addimandasi *un segmento circolare ad una sola base* o *biangola* perchè figura avente solo due angoli, è visibile bentosto come sia l'area di un circolo, eguale alla superficie di un poligono inscritto, più altrettanti segmenti circolari ad una sola base quanti sono i lati del poligono; ed ancora, quanto più piccoli saranno i lati del poligono, altrettanto più piccoli saranno i segmenti circolari in discorso, ben inteso nello stesso circolo. Ciò posto, essendo C D il lato di un poligono inscritto in quel circolo, C G e G D lati di altro poligono inscritto, e di doppio numero di lati, l'area del poligono di lati C G e G D essendo più piccola dell'area del circolo, per la ragione stessa detta pel poligono di lato C D, è però più grande dell'area del poligono di lato C D, essendochè i due segmenti circolari, l'uno di base C G, l'altro di base G D, presi assieme, differiscono di un'area eguale a quella del triangolo C G D dal segmento circolare di base C D. Devesi quindi ritenere come: 1.° *L'area di un circolo è maggiore dell'area di qualsivoglia poligono inscritto nel medesimo;* 2.° *L'area di un poligono inscritto in un circolo è tanto più grande quanto più numerosi sono i suoi lati,* od in altri termini, *la differenza fra l'area di un circolo e quella di un poligono inscritto può essere minore di qualsiasi quantità data.*

Siccome poi ogni corda C D in un circolo è una retta, e quindi più corta di qualunque altra linea che unisca i punti C e D, così è visibile ben tosto come il perimetro di un poligono inscritto in un circolo, sia sempre minore della circonferenza di esso. Parimenti, essendo C D il lato di un poligono inscritto in un circolo, il cui raggio è O C ed in cui l'apotema è la perpendicolare O H, è visibile ben tosto che a causa del triangolo rettangolo C H O è l'ipotenusa O C maggiore del cateto O H, od in altre parole, l'apotema di un poligono inscritto in un circolo è sempre minore del raggio.

Ove osservisi, come C G e G D essendo i lati di un poligono inscritto nel circolo di centro O e di un numero doppio di lati di quello il cui lato sia C D, che è $CG + GD > CD$ essendo la figura C G D un triangolo, scorgesi tosto, che il perimetro del poligono di lati C G e G D pur mantenendosi sempre minore della circonferenza del circolo in cui è inscritto, è però maggiore del perimetro del poligono inscritto di lato C D. E potersi quindi ritenere come: 1.° *La circonferenza di un circolo è maggiore del perimetro di qualsiasi poligono inscritto, e medesimamente il raggio di un circolo è maggiore dell'apotema di qualsiasi poligono inscritto;* 2.° *Il perimetro di un poligono inscritto in un circolo è tanto più grande quanto più numerosi sono i suoi lati*, ed in altri termini, *la differenza tra la circonferenza di un circolo e il perimetro di un poligono inscritto può essere minore di qualsiasi quantità data.*

Ora bene, l'area di un poligono regolare essendo eguale al semiprodotto del perimetro per l'apotema, ne consegue che il semiprodotto di una lunghezza maggiore del perimetro di qualsivoglia poligono regolare inscritto, per una lunghezza maggiore dell'apotema di qualsiasi poligono regolare inscritto, non potrà a meno di fornire un' area maggiore dell' area di qualsivoglia poligono regolare inscritto in un circolo. La circonferenza del circolo essendo per l'appunto una lunghezza maggiore del perimetro di qualsivoglia poligono regolare in esso inscritto, e il raggio del circolo essendo altresì una lunghezza maggiore dell'apotema di qualsivoglia poligono regolare in esso inscritto, si potrà perciò dire che: *Il semiprodotto della circonferenza di un circolo pel suo raggio è un'area maggiore di quella di qualsivoglia poligono in esso inscritto.*

Ciò posto, osservando che se in un poligono circoscritto ad un circolo si conducono diversi raggi ai singoli punti di contatto dei lati del poligono colla circonferenza, scomponesi il circolo in tanti *settori circolari*, in tante porzioni cioè di superficie di circolo comprese da un arco e due raggi; ed il poligono in tanti quadrilateri, come ad esempio quello A O B P, in cui è P A perpendicolare al raggio O A; B P perpendicolare al raggio O B, l'area di ciascuno dei quali quadrilateri essendo eguale all' area di un settore come A M B O, più l'area di un triangolo mistilineo come A M B P, si potrà intendere di leggieri, che l'area di un qualunque poligono circoscritto ad un circolo è eguale all'area del circolo, più altrettanti triangoli mistilinei quanti sono i lati, o più brevemente: *L'area di un circolo è minore di quella di qualsivoglia poligono ad esso circoscritto.*

Se A P, B P rappresentano due mezzi lati di un poligono circoscritto al circolo di centro O, nessun dubbio come, tirando per un punto intermedio, ad esempio M, fra ciascuno dei punti consecutivi di contatto dei lati del poligono colla circonferenza del circolo, delle tangenti alla circonferenza, formisi circoscritto al circolo un altro poligono di un numero doppio di lati del primo, il quale poligono se pure in virtù della legge poc' anzi trovata, di un'area maggiore di quella del circolo, è però di un'area minore a quella del primo poligono. Basterà diffatti per convincersi di tale fatto l' osservare come la tangente tirata nel punto M abbia incontrato le due tangenti A P, B P nei punti R e Q ed originati i due triangoli A R M, M Q B, che presi insieme differiscono dal triangolo mistilineo A P B di una quantità uguale al triangolo rettilineo R P Q. Crescendo quindi ad un circolo il numero dei lati del poligono circoscritto, l'area di quest'ultimo va sempre diminuendo, mantenendosi però sempre maggiore dell'area del circolo. Può perciò stabilirsi l'altra proposizione: *L'area di un poligono circoscritto ad un circolo è tanto più piccola quanto più numerosi sono i suoi lati,* od in altri termini, *la differenza fra l'area di un circolo e quella di un poligono circoscritto, può essere minore di qualsiasi quantità data.*

Osservando come la linea che congiunge due punti sia tanto più lunga quanto più si scosta dalla linea retta, così è dato di poter dire come l'arco A B, ad esempio, sia più corto della avviluppante poligonale A P B, ed in generale come: *la circonfe-*

renza di un circolo è minore del perimetro di qualsiasi poligono circoscritto.

Essendo A R P Q B una porzione di poligono circoscritto all'arco A B, ed A R Q B altra porzione di altro poligono circoscritto allo stesso arco A B, e di un numero doppio di lati, avendosi che per causa del triangolo R P Q, $RQ < RP + PQ$, e quindi $AR + RQ + QB < AP + PB$, cioè il perimetro della porzione di poligono circoscritto ad un arco e di un maggiore numero di lati, più corto del perimetro della porzione di poligono circoscritto allo stesso arco e di minore numero di lati. Onde puossi conchiudere che: *il perimetro di un poligono circoscritto ad un circolo è tanto più piccolo quanto più numerosi sono i suoi lati*, od in altri termini, *la differenza tra la circonferenza di un circolo e il perimetro di un poligono circoscritto può essere minore di qualsiasi quantità data.*

Ora bene, l'area di un poligono regolare essendo eguale al semiprodotto del perimetro per l'apotema, ne consegue, che il semiprodotto di una lunghezza minore del perimetro di qualsivoglia poligono circoscritto per una lunghezza eguale all'apotema di qualsivoglia poligono circoscritto, non potrà a meno di fornire un' area minore dell' area di qualsivoglia poligono regolare circoscritto ad un circolo. La circonferenza del circolo essendo per l'appunto una lunghezza minore del perimetro di qualsivoglia poligono regolare circoscritto ad esso, ed il raggio del circolo essendo una lunghezza eguale all' apotema di qualsivoglia poligono ad esso circoscritto, si potrà perciò dire che: *il semiprodotto della circonferenza di un circolo pel suo raggio è un' area minore di quella di qualsivoglia poligono ad esso circoscritto.*

Ma il semiprodotto della circonferenza di un circolo pel suo raggio non formando un'area nè maggiore, nè minore di quella del circolo, esso sarà l' espressione dell' area del circolo, vale a dire: *l'area di un circolo è eguale al semiprodotto della circonferenza pel raggio.* Onde, rappresentando con C la circonferenza di un circolo e con R il raggio, si ha la superficie $S = \frac{CR}{2}$. Questa formola fa immediatamente vedere col suo paragone alle altre formole ricavate, che l'area di un circolo è equivalente a quella di un triangolo avente per base la circonferenza del circolo, e per altezza il raggio.

Dall'espressione dell'area di un circolo derivasi quella del settore circolare, potendo considerarsi il circolo come un settore circolare in cui i due raggi formando un angolo di 360° si coincidono. Gli angoli essendo proporzionali agli archi descritti con medesimo raggio, ne consegue da ciò essere l'area del settore circolare proporzionale all'area del circolo nel rapporto stesso dalla circonferenza del circolo all' arco compreso fra i raggi, onde: *l'area del settore circolare è eguale alla lunghezza dell'arco compreso fra i suoi lati, moltiplicato per la metà del raggio*. La verità di questa espressione dedurrebbesi altresì considerando l'area del settore di circolo come compresa fra quella di una porzione di poligono regolare inscritto, e una porzione di poligono regolare circoscritto, compreso cioè fra il semiprodotto di una porzione di perimetro di poligono regolare inscritto sempre minore dell' arco, per l'apotema sempre minore del raggio, ed il semiprodotto di una porzione di perimetro di poligono regolare circoscritto sempre maggiore dell'arco, per il raggio; e tale, che mentre il semiprodotto dell'arco pel raggio non può esprimere un'area maggiore di quella del settore, non può neppure esprimere un'area minore, siccome mostrerebbesi evidente da un ragionamento analogo a quello tenuto pel ricavo dell' espressione dell'area del circolo.

Conoscendo il modo di valutare l'area di un settore circolare e quella di un triangolo, si conoscerà pur quello di valutare l' area di un segmento circolare ad una sola base, C H D G, questo non essendo altro che la differenza tra l' area di un settore circolare C O D e l'area di un triangolo C D O.

Misura di una figura curvilinea. — Una figura curvilinea potendo essere o convessa o non convessa, vale a dire avere per perimetro una curva, la quale non presenti nessun punto nè di inflessione nè di regresso, come sarebbe il circolo, una ovale, una ellisse ecc., oppure avere per perimetro una curva, la quale presenti alcuno od entrambi i suaccennati punti, come ad esempio sarebbe la Fig. 12 rappresentata alla Tav. XX, così si analizzeranno ciascuno di questi casi nella ricerca della relativa misura. Allorquando una figura curvilinea è convessa, la sua area è sempre compresa fra l'area di un poligono alla medesima inscritto, e l'area di un poligono alla medesima circoscritto, e ciò per le ragioni stesse che vennero indicate pel circolo. L'area quindi di una figura

curvilinea convessa, non potendosi esattamente determinare per non potersi esattamente sostituire una linea poligonale ad una curva, ne avviene che essa sarà possibile solo di ottenerla approssimatamente, e più o meno approssimatamente secondochè più o meno sono prossimi a coincidere col perimetro della figura curvilinea il perimetro di un poligono inscritto o circoscritto.

Trattandosi di una figura curvilinea non convessa, ben diversa può essere la cosa, imperocchè se l'area di un poligono inscritto in una figura curvilinea convessa è sempre minore dell' area di questa, e l'area di un poligono circoscritto alla stessa sempre maggiore; può succedere che in una figura curvilinea non convessa, l'area di un poligono i cui lati sieno continuamente o tante corde della curva o tante tangenti alla curva, siano perfettamente eguali all'area della figura. Egli è evidente che questa circostanza casuale d'eguaglianza proviene comunque però sempre, dall' essere il perimetro di una figura curvilinea non convessa formata da una curva che ora essendo concava, talora convessa, le singole corde tracciate alla curva formano con essa delle superficie, che se sono in meno per la parte in cui la curva è convessa, rimangono in più in quella parte in cui la curva è concava, e quindi possibile la compensazione.

Essendo quindi data una figura curvilinea non convessa a misurare, il poligono che più prossimo avrà un' area equivalente, sarà quello che più di tutti sarà tracciato in modo che le diverse aree formate sia da corde come da tangenti alla curva, determinano nello spazio tra queste e la curva delle aree che più possibilmente siano equivalenti a quelle che si ottengono in ambi i tratti di curve, concave e convesse. Questa considerazione è quella altresì per cui, dato un poligono anche convesso, nella ricerca della misura, avvece del computo di un poligono inscritto o circoscritto, si stabilisce la preferenza al computo di un poligono i cui lati taglino il perimetro e formino negli spazi compresi tra essi e la curva, delle aree il più equivalenti possibili, tra quelle che fanno e non fanno parte della figura. Nelle norme indicate alla misura di un poligono, essendosi però detto che essa sarà tanto più esatta quanto più il computo sarà stato fatto per figure calcolabili che abbracciassero del poligono la maggiore area possibile, ne segue che a raggiungere la massima esattezza nella ricerca dell' area di una figura

curvilinea, occorre altresì operarne la scomposizione in figure calcolabili che abbraccino la maggiore area possibile, ed oltracciò che i lati stabiliscano una compensazione la più grande possibile tra le aree che appartengono, e quelle che non appartengono alla figura. Questo modo di scomposizione di una figura curvilinea conduce quindi, oltre al computo di un poligono, al computo altresì di superficie comprese da una curva ed una retta.

Ora, osservando che se in una di cosiffatte superficie si abbassano da molti punti della curva, da quelli cioè che due a due la curva passante per essi più si accosta alla linea retta, delle perpendicolari alla retta, viene a restare il succitato spazio scomposto in tanti trapezi pel computo dell' area, dei quali occorre la sola conoscenza delle ordinate della curva, e della distanza fra loro di queste ordinate, misure tutte di agevole assunzione; devesi ritenere che un tal mezzo di scomposizione abbia ad essere il più acconcio per l' area dello spazio compreso fra una curva ed una retta, che però il risultato sarà inferiore al vero se la curva volge la concavità alla retta, e maggiore del vero se la curva è convessa, ed in ambi i casi tanto più approssimato quanto più piccole saranno le altezze dei trapezi di scomposizione.

A maggiore chiarezza delle cose anzidette sia A B Q E C P N D F R una figura curvilinea proposta alla misura. Tracciato dapprima il quadrilatero A B C D, la cui area sarà la somma delle aree dei due triangoli D A B, D B C, cioè eguale al semiprodotto della diagonale D B per la somma delle altezze A G + C H, si traccino in seguito sui lati A D, B C i due triangoli A F D, B E C, l'area dei quali sarà eguale ad $\frac{AD \times FL}{2} + \frac{BC \times IE}{2}$. Conosciuta così l'area del poligono A B E C D F, non resterà a questo che di aggiungervi l' area delle biangole di lati N P, C E, D F, Q E, F R, A B, e toglierví quella delle biangole di lati A R, B Q, P C, D N, per avere la perfetta area della figura curvilinea data. Scomposta ciascuna delle indicate biangole in trapezi e triangoli, siccome chiaro apparisce dalla figura, si avrà nel parziale computo di ciascuno di essi il verso di comporre l'area delle medesime, e quindi la totale area della figura curvilinea proposta.

Cosicchè riassumendo si conchiuderà: *l' area di una figura curvilinea è eguale all' area di un poligono, più o meno le aree approssimate formate dal perimetro coi lati del poligono.*

Misura di una figura mistilinea. — Il mezzo stato indicato al conseguimento dell'area di una figura curvilinea è identico con quello da impiegarsi pel conseguimento dell'area di una figura mistilinea, col vantaggio però in quest'ultima di avere nei lati rettilinei alcuni lati del poligono a cui si riferisce una figura curvilinea per derivarne la sua area. Perciò: *l'area di una figura mistilinea è eguale all'area di un poligono a cui appartengono i lati rettilinei della figura, più o meno le aree approssimate formate dai lati curvilinei della figura coi lati del poligono.*

La misura di una figura qualsiasi purchè tracciata sulla carta, può ancora aversi mediante i così detti *Planimetri polari* od *ortogonali*, bastando con essi percorrerne il perimetro per averne il risultato. La descrizione e l'uso di siffatti strumenti appartiene alla Geodesia, ed è perciò che a solo titolo di eccitare curiosità qui se ne indica l'esistenza, nel chiudere questa parte della Planimetria che si è occupata della misura delle figure.

Relazione delle aree di due quadrati coi lati. — L'area di un quadrato essendo espressa dal quadrato del suo lato, è evidente come le aree di due quadrati sieno nel rapporto stesso dei quadrati dei loro lati. E qui sia permesso di far badare, che se due quadrati stanno tra loro come i quadrati dei loro lati, essi non stanno punto tra loro come i lati, perchè essendo X ed Y i lati di due quadrati, ove si ponesse la proporzione $X^2 : Y^2 :: X : \frac{X\ Y^2}{X^2}$, l'ultimo termine non potrebbe anche ridotto dare la quantità Y, perchè occorrerebbe che fosse $X = Y$ affinchè $\frac{Y^2}{X}$ potesse divenire eguale ad Y, ed avere luogo la proporzione fra i lati e le aree di due quadrati.

Dati i lati di due quadrati derivare l'area dell'uno in funzione dell'area dell'altro, è ciò che costituisce la relazione d'area di due quadrati di cui si entrerà all'investigazione.

Dati i lati di due quadrati, se questi non sono eguali, diseguali ne sono i lati, l'uno cioè più lungo dell'altro, due quindi le indagini, vale a dire, vedere cosa sia l'area di un quadrato in funzione di altro quadrato di lato più piccolo, vedere cosa sia l'area di un quadrato in funzione d'altro quadrato di lato più grande.

Essendo A B ed A E (Fig. 13) i lati di due quadrati, e volendo esaminare il valore dell'area del quadrato di lato A B in funzione

del quadrato di lato A E, si immaginino costrutti i quadrati in questione, il quadrato cioè A B C D ed il quadrato A E F G, e si immaginino in seguito prolungati i due lati E F, G F sino all'incontro nei punti I ed H coi lati D C e B C del quadrato più grande. Si renderà dopo ciò visibile ben tosto che, essendo l'angolo A G F = A D I siccome due angoli di quadrati cioè due angoli retti, e medesimamente essendo l'angolo A E F = A B C, le due rette D C e G H sono tra loro parallele, come parallele sono le rette B C, E I.

Ora l'angolo G F E siccome angolo di un quadrato essendo un angolo retto, sono le figure D I F G, E B H F, F H C I altrettanti rettangoli; e poichè A D = A B, A G = A E e la differenza di queste due eguaglianze fornisce l'eguaglianza E B = G D, consegue che, per essere F I = G D, F H = E B, è F H = F I, cioè la figura I F H C, non solo un rettangolo, ma bensì un quadrato. Osservando in seguito i due quadrati A E F G, F H C I ed i due rettangoli E B H F, D I F G, che tutti assieme formano l'intiero quadrato A B C D, non è difficile lo scorgere che il quadrato A E F G è un quadrato di lato A E, che il quadrato F H C I è un quadrato il cui lato è E B, cioè la differenza dei lati dei due quadrati considerati, che il rettangolo E B H F è eguale al rettangolo D I F G, di lati l'uno eguale ad A E, l'altro eguale ad E B, cioè alla differenza dei lati dei quadrati in questione; e dopo tutto ciò possa conchiudersi essere l'area di un quadrato eguale all'area di un quadrato più piccolo, più l'area di un altro quadrato di lato la differenza fra il lato di questo e il lato di quello considerato, più ancora l'area di due rettangoli di lati, l'uno il lato del quadrato più piccolo, l'altro la differenza tra questo ed il lato del quadrato considerato. Essendo A il lato di un quadrato, $A + B$ evidentemente il lato di altro quadrato più grande, è l'area di quest'ultimo quadrato eguale all'area di un quadrato di lato A, più l'area di un quadrato di lato B, più l'area di due rettangoli di lati A e B, ossia è $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2\,A.B.$ Questa espressione autorizza perciò a stabilire che: *il quadrato fatto sulla somma di due rette è eguale al quadrato fatto sulla prima retta, più il quadrato fatto sulla seconda retta, più due rettangoli i cui lati sono le due rette.*

Considerando ora due quadrati come A B C P, A E F G (Fig. 14) e volendo vedere il valore del primo in funzione del secondo, si immagini prolungato P C sino in H all'incontro con E F, e si im-

magini ancora costrutto il quadrato B E I L su di B E differenza dei due quadrati in questione. Dopo queste supposizioni rendesi immediatamente evidente essere l'area del quadrato A B C P eguale all'area del quadrato A E F G, più l'area del quadrato B E I L, meno l'area delle due figure P H F G, C L I H. Ma per le ragioni dette alla dimostrazione precedente, essendo le due figure P H F G e C H I L due rettangoli, ed inoltre H F = B E, epperciò H I = P H = A E, sono i due rettangoli P H F G, C H I L eguali tra loro, ed i lati sono l'uno il lato del quadrato più grande, l'altro la differenza fra detto lato, e il lato del quadrato più piccolo. Conchiudesi perciò, che l'area di un quadrato è eguale all'area di un altro quadrato più grande, più l'area di un quadrato il cui lato è la differenza fra detto lato, e quello del quadrato considerato, meno l'area di due rettangoli eguali, ed i cui lati sono il lato del quadrato più grande, e la differenza fra questo ed il lato del quadrato considerato. Essendo quindi A il lato di un quadrato, A — B il lato di un quadrato più piccolo, sarà l'area di quest'ultimo $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2 \times A \times B$, vale a dire: *il quadrato fatto sulla differenza di due rette è eguale al quadrato fatto sulla prima, più il quadrato fatto sulla seconda, meno due rettangoli i cui lati sono le due rette.*

Or bene, questa proposizione e l'altra precedente non essendo altro che l'espressione geometrica dell'espressione algebrica del quadrato di un binomio, esse fanno vedere l'eguaglianza del risultato a cui si perviene nelle operazioni, nelle due vie algebrica e geometrica.

Relazione delle aree di due parallelogrammi. — L'area di un parallelogramma essendo eguale al prodotto della sua base per la sua altezza, *due parallelogrammi che abbiano eguale base ed eguale altezza sono equivalenti.* Del resto, essendo A B C D ed A B E F (Fig. 15) due parallelogrammi aventi la base A B comune, epperciò eguale, la base superiore di uno sul prolungamento della base superiore dell'altro, epperciò la medesima altezza; perchè il triangolo E B C è eguale al triangolo F A D siccome avente E B = F A, B C = A D, e l'angolo E B C = F A D, si scorgerà tosto come dall'intera figura F A B C togliendo il triangolo E B C, resti il parallelogramma A B E F, equivalente al parallelogramma A B C D, che si ottiene togliendo dalla stessa figura F A B C il triangolo eguale F A D.

L'area di due parallelogrammi di eguale base e di eguale altezza essendo eguale, ed ogni triangolo essendo sempre la metà di un parallelogramma, rendesi evidente che, *due triangoli che abbiano eguale base ed eguale altezza sono equivalenti.*

Ogni parallelogramma essendo equivalente all'area di un rettangolo di eguale base e di eguale altezza, è il rapporto di due parallelogrammi eguale al rapporto di due rettangoli aventi per basi le basi dei parallelogrammi, e per altezza l'altezza dei parallelogrammi.

Relazione delle aree di due rettangoli. — Essendo A B C D ed E F G H due rettangoli di medesima altezza, e di diversa base, suppongasi che una comune misura fra queste ultime, contenuta due volte in E F e quattro volte in A B, sia stata su di queste portata, e per il punto 2 su di E F tirata una parallela ai lati E H, F G, e medesimamente pei punti 1, 2, 3 di A B tirate tre parallele ai lati A D e B C del rettangolo A B C D, tanto il rettangolo E F G H quanto il rettangolo A B C D, si troveranno scomposti il primo in due, il secondo in quattro, rettangoli di eguale base e di eguale altezza. L' area di ciascuno dei rettangoli in questione essendo proporzionata alla quantità di rettangoli eguali capaci di contenere, e questa alla sua volta essendo proporzionata al numero di volte in cui la comune misura delle basi è in ciascuna di esse contenuta, resta così determinato che le aree di due rettangoli di medesima altezza e di basi commensurabili, sono proporzionali a dette basi.

Se supponesi ora che due rettangoli come A B C D, E F G H (Fig. 17) abbiano una medesima altezza, e le basi incommensurabili, poichè scomponendo il rettangolo A B C D ad esempio in quattro rettangoli eguali ed immaginando portata la base A_1, di uno di questi rettangoli su di E F, si avrebbe pel caso sovracitato che le aree dei due rettangoli A B C D, E I K H sarebbero proporzionali alle basi A B, E I, come parimenti i rettangoli A B C D, E 2 L H relativamente alle basi A B ed E 2, ovverosia le proporzioni

A B C D : E I K H :: A B : E I

A B C D : E 2 L H :: A B : E 2

nelle quali tanto E I quanto E 2 si possono ridurre a differenziare da E F di una quantità minore di qualsiasi quantità data, ma essendo

E F G H $<$ E I K H, E F G H $>$ E 2 L H, così si hanno le altre due proporzioni

A B C D : E F G H :: A B : $<$ E I

A B C D : E F G H :: A B : $>$ E 2.

L'ultimo termine delle quali due proporzioni non potendo essere nella prima maggiore, nella seconda minore di E F, per la ragione che nel primo caso qualsiasi lunghezza maggiore di E F di una quantità minore di qualsiasi altra data E 3, può essere in comune misura con A B e determinare sempre un'area più grande di quella del rettangolo E F G H, e per la ragione nel secondo caso che qualsiasi lunghezza minore E F di una quantità minore di qualsiasi altra data, può essere in comune misura con A B e determinare sempre un'area più piccola di quella del rettangolo E F G H, è duopo conchiudere: *le aree di due rettangoli di eguale altezza stanno tra loro come le loro basi.* E poichè ogni lato di un rettangolo può essere tenuto per base e l'altro per altezza, così è dato pure di dire che *le aree di due rettangoli di eguale base stanno tra loro come le loro altezze.*

Ciò posto, essendo A B C D e C E F G (Fig. 18) due rettangoli qualunque, disposti in modo che il lato C E sia sul prolungamento del lato D C, ed il lato C G sul prolungamento del lato C B, se si prolungano i lati F G ed A D sino al loro incontro in H, formasi un rettangolo D C G H avente la medesima altezza C G del rettangolo C E F G, e la medesima base C D del rettangolo A B C D, per modo che in virtù del principio precedente è dato di stabilire le due proporzioni

A B C D : D C G H :: B C : C G

D C G H : C E F G :: C D : C E

che moltiplicate termine a termine, danno l' altra

A B C D $\times$ D C G H : D C G H $\times$ C E F G :: B C $\times$ C D : C G $\times$ C E

la quale divisa nei suoi primi due termini per D C G H presenta il risultato A B C D : C E F G :: B C $\times$ C D : C G $\times$ C E, vale a dire: *le aree di due rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le rispettive altezze.*

La verità di questa proposizione, se presentavasi da per sè stessa evidente dopo la conoscenza dell'espressione dell'area di un rettangolo, venne tuttavia indicata onde far vedere l'identità del risultato seguendo altra via, che è poi la diretta nella ricerca del rapporto di due rettangoli, ignorando l'espressione della misura di essi.

Somma e differenza di due quadrati. — Fatto il parallelo di due quadrati, trovato ciò che sia l'uno in funzione dell'altro, rimane a vedere ciò che sia la loro somma e la loro differenza, ed a questa ricerca valgono appunto i principii precedentemente stabiliti.

Supponendo da principio di avere due quadrati eguali A B C D, B E F C (Fig. 19), se essi si accostano come nella figura, essendo E F = A D, la riunione dei due quadrati viene ad essere un rettangolo, in cui la base è doppia dell'altezza. Ma se in questo rettangolo si separano col mezzo delle diagonali A C, E C, due triangoli rettangoli isosceli A D C, C F E e si dispongono il primo ad avere la posizione A B C', il secondo quella E B C'; posizioni d'altronde che verrebbero a ricevere i due triangoli quando si facessero girare, il primo attorno al vertice A, il secondo attorno al vertice E, ed entrambi un giro di 315°, sarà facile di vedere, che i due lati A D, E F prenderebbero la posizione A B, B E, ed i due lati D C, F C la posizione comune B C', e quindi avere luogo la figura A C E C', equivalente al rettangolo A E F D, epperciò equivalente alla somma dei due quadrati considerati A B C D, B E F C.

Osservando come la figura A C E C' ha il lato A C = A C', C E = E C', perchè lati di identici triangoli, ed ancora A C = E C siccome diagonali di due quadrati eguali, epperciò eguali tra loro i quattro lati A C, C E, E C', C' A, si scorgerà tosto come essa sia un quadrato, avendo i quattro lati eguali, ed avendo gli angoli retti, essendochè ogni angolo è la somma di due angoli semiretti formati appunto dalle diagonali coi lati nei due quadrati. È possibile quindi di conchiudere, come *la somma delle aree di due quadrati eguali è eguale all'area di un quadrato avente per lato una diagonale dei quadrati dati.*

Da questa proposizione deducesi ben tosto che se si ha un triangolo rettangolo isoscele, come ad esempio quello A B C, poichè la sua ipotenusa corrisponde alla diagonale di un quadrato il cui lato sia eguale ad un cateto, che sarà l'area del quadrato fatto

sull' ipotenusa equivalente alla somma dei due quadrati eguali fatti sui cateti. Per guisa che A essendo l' ipotenusa, B il cateto di un triangolo rettangolo isoscele, ha luogo il rapporto $A^2 = 2 B^2$, e nella radice di questo, $A = \sqrt{2 B^2}$, ossia $A = B \sqrt{2}$, un'espressione che stabilisce il valore dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo in funzione del cateto, vale a dire, l' ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele uguale al prodotto del suo cateto, per la radice quadrata del numero 2. E poichè in aritmetica è dimostrato che la radice quadrata del numero 2 non può essere espressa esattamente nè da un numero intiero nè da una frazione, essere cioè irrazionale, così neppure esattamente, è possibile il computo dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele colla conoscenza del suo cateto.

Un triangolo rettangolo isoscele essendo sempre la metà di un quadrato, avente per lato uno qualunque dei cateti, aventi per diagonale l' ipotenusa, è così dato di conchiudere come *la diagonale di un quadrato è eguale al prodotto del suo lato per la radice quadrata del numero due.*

Non occorrerà dire che la differenza di due quadrati eguali sia zero. Suppongasi perciò ora di avere due quadrati non più eguali ma diseguali, come i due quadrati A B D E, D F G H (Fig. 20), e di volere indagare il valore della somma delle aree di essi. Si accostino l'uno all'altro nel modo che chiaro apparisce dalla figura, e indi portata una lunghezza B C = D F, si stacchino col mezzo delle rette A C, C G dalla intiera figura A B F G H E i due triangoli visibilmente rettangoli A B C, C G F, ai quali si dia la posizione A E F', G H F', vale a dire si suppongano girare il primo attorno al vertice A, il secondo attorno al vertice G, ed entrambi fare un giro di 315°, dopo il quale, essendo A B = A E, siccome lati dello stesso quadrato, il lato A B verrà a posare su di A E, ed il punto B cadere in E, ed essendo A B C un angolo retto, il lato B C a trovarsi sul prolungamento di E D, il vertice C ad una distanza E F' = B C = D F = H G = G F, e l'ipotenusa A C la posizione A F', restando così A C = A F'. Medesimamente pel triangolo rettangolo C F G, essendo C F = C D + D F ovvero C F = C D + C B = B D, H F' = H E + E F' = H E + H D = E D = B D = C F, il vertice F venendo in H, ed il lato F C a posarsi su di H F', il vertice C verrà in F', ed essendo H G = G F, siccome

lati dello stesso quadrato, e l'angolo C F G = G H F' siccome entrambi retti, il vertice F cadrà in G, e la ipotenusa C G a prendere la posizione C G = G F'.

I due triangoli rettangoli A B C, C F G avendo, come si è detto, C F = B D = A B, F G = D F = B C, sono perfettamente eguali in guisa che A C = C G, l'angolo B A C = E A F', e conseguentemente A C = C G = A F' = F' G, e l'angolo C A F' = B A E, siccome composti di un angolo eguale e di un angolo comune. La figura quindi A C G F', che comprende un'area eguale alla somma di quella dei due quadrati A B D E, D F G H, avente i quattro lati eguali ed avente un angolo C A F' = B A E, perciò retto, è un quadrato, epperciò: *la somma delle aree di due quadrati è eguale a quella di un terzo quadrato avente per lato l'ipotenusa di un triangolo rettangolo i cui cateti sono i lati dei quadrati dati.*

Essendo A e B i lati di due quadrati, la somma delle loro aree $A^2 + B^2$ essendo eguale a quella di un quadrato C^2 di lato C ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti A e B, ne segue che per mutamento di termini da un membro all'altro dell'eguaglianza $A^2 + B^2 = C^2$, si hanno le altre due eguaglianze $A^2 = C^2 - B^2$, $B^2 = C^2 - A^2$, le quali dinotano come: *la differenza delle aree di due quadrati è eguale a quelle di un terzo quadrato avente per lato un cateto di un triangolo rettangolo in cui l'altro cateto e l'ipotenusa sono i lati dei due quadrati.*

Nella supposizione sempre che A e B siano i cateti di un triangolo rettangolo e C l'ipotenusa, avendosi, come si è detto, le tre eguaglianze $C^2 = A^2 + B^2$, $A^2 = C^2 - B^2$, $B^2 = C^2 - A^2$, egli è ovvio di vedere che le radici quadrate di esse somministrano altre tre eguaglianze

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad A = \sqrt{C^2 - B^2}, \quad B = \sqrt{C^2 - A^2},$$

che sono il valore di ciascuno dei lati in funzione degli altri due, e che dette in parole si enunciano: l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei due cateti; ciascun cateto di un triangolo rettangolo è eguale alla radice quadrata della differenza fra il quadrato dell'ipotenusa ed il quadrato dell'altro cateto.

Per le cose sin qui dette, colla conoscenza di due lati di un triangolo rettangolo è quindi possibile il computo del terzo lato, senza avere mestieri della costruzione del triangolo e di assumere da essa la misura. Anzi, date tre misure, sarà in virtù della enunciata relazione che si potrà giudicare se esse possono essere lati di un triangolo rettangolo. Tre lunghezze A, B, C, potranno essere lati di un triangolo rettangolo se saranno proporzionali ai numeri 3, 4 e 5, od ai numeri 5, 12 e 13, perchè dalla serie di rapporti eguali

$$A : B : C :: 3 : 4 : 5$$

$$A^2 : B^2 : C^2 :: 9 : 16 : 25$$

e

$$A : B : C :: 5 : 12 : 13$$

$$A^2 : B^2 : C^2 :: 25 : 144 : 169$$

si ha

$$A^2 + B^2 : C^2 :: 9 + 16 : 25$$

$$A^2 + B^2 : C^2 :: 25 + 144 : 169$$

nelle quali essendo

$$9 + 16 = 25, \quad 25 + 144 = 169$$

è in entrambe

$$C^2 = A^2 + B^2.$$

La relazione suindicata che corre fra i lati di un triangolo rettangolo, o per meglio dire, che corre fra i quadrati dei lati di esso, si riassume nel grande teorema:

In ogni triangolo rettangolo, il quadrato fatto sull'ipotenusa è eguale alla somma dei quadrati fatti sui due cateti.

Si è di già dimostrata la verità dell'enunciato teorema, immaginando scomposto due diversi quadrati, ed immaginando che alcune parti di essi girassero attorno a dati punti, dimostrata cioè in un modo pressochè meccanico, in quel modo stesso che prima fu trovata da quando, come narra la storia, l'Oracolo di Delfo ne proponeva ai sapienti della Grecia la dimostrazione; si dimostrerà

quindi ora la medesima verità col soccorso di pure considerazioni geometriche come venne dal Pittagora trovata, e che perciò prese il suo nome.

Essendo A B C (Fig. 21) un triangolo rettangolo, se su ciascuno dei lati si costruisce un quadrato, quello B F G C sull' ipotenusa C B, quello A D E B sul cateto A B, quello A I H C sul cateto A C, e quindi dal vertice dell'angolo retto si abbassi una perpendicolare sull' ipotenusa, e si prolunghi sino in L all' incontro col lato F G del quadrato fatto sull' ipotenusa, viene questo quadrato C B F G scomposto da detta retta P L in due rettangoli, l'uno B P L F, l' altro C G L P, ognuno dei quali essendo la metà dell' area di un triangolo avente eguale base ed eguale altezza, è il rettangolo B P L F la metà dell' area del triangolo B F A che si ottiene tirando la retta A F, avente eguale base B F, ed eguale altezza siccome il vertice A sul prolungamento di L P, il rettangolo C G L P la metà dell' area del triangolo C G A che si ottiene tirando la retta A G, avente eguale base C G ed eguale altezza, essendo il vertice A collocato sul prolungamento di L P.

Ora, siccome tirando le rette C E, H B, si vengono a formare due triangoli C B E, B C H, eguale il primo al triangolo A B F per essere B E = A B, B C = B F siccome lati dello stesso quadrato, e l'angolo C B E = A B F siccome composti entrambi di un angolo retto e di un angolo comune A B C; eguale il secondo al triangolo C G A per essere C H = C A, C B = C G siccome lati dello stesso quadrato, e l' angolo H C B = G C A siccome composti entrambi di un angolo retto e di un angolo comune A C B; e che il triangolo C B E è la metà del quadrato A B E D siccome avente eguale base B E ed eguale altezza per essere il vertice C sul prolungamento di D A, il triangolo H C B è la metà del quadrato H C A I siccome avente eguale base H C ed eguale altezza per essere il vertice B collocato sul prolungamento di I A, si verrà a concludere, che è altresì, il triangolo A B F la metà del quadrato A B E D, il triangolo G C A la metà del quadrato C A I H, epperciò, il rettangolo B P L F equivalente al quadrato A B E D, il rettangolo P L D C equivalente al quadrato C A I H, e l' intiero quadrato C B F G siccome eguale alla somma dei due succitati rettangoli, eguale alla somma dei due quadrati A B E D, C A I H; vale a dire, il quadrato fatto sull'ipotenusa eguale alla somma dei quadrati

fatti sui cateti, siccome era stato precedentemente altrimenti dimostrato.

Nel corso della dimostrazione pittagorica, fu visto come il rettangolo B P L F fosse equivalente al quadrato A B E D fatto sul cateto A B, il rettangolo C G L P equivalente al quadrato C A I H fatto sul cateto C A. Osservando come i due rettangoli B P L F, C G L P hanno una medesima altezza L P ed una diversa base P C, P B, e quindi le loro aree sono proporzionali alle basi, è dato stabilire la proporzione B P L F : P L G C :: B P : P C, nella quale essendo $BPLF = \overline{AB}^2$, $PLGC = \overline{CA}^2$, si ha colla sostituzione la proporzione $\overline{AB}^2 : \overline{CA}^2 :: BP : PC$, che attesta come: *nel triangolo rettangolo, i quadrati dei cateti stanno fra loro come le proiezioni dei cateti fatti sull'ipotenusa;* chiamandosi proiezione di una retta su di un'altra la distanza che separa i piedi delle perpendicolari abbassate dalla prima sulla seconda.

Osservando ancora il quadrato B F G C ed il rettangolo C G L P, che hanno una medesima altezza C G e che conseguentemente la loro area è proporzionale alle basi C B, C P, si ha la proporzione

$$BFGC : CGLP :: CB : CP$$

nella quale essendo $BFGC = \overline{CB}^2$, $CGLP = \overline{CA}^2$, si ha colla sostituzione la proporzione $\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2 :: CB : CP$, che attesta come: *nel triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa sta al quadrato di un cateto come l'ipotenusa sta alla proiezione del cateto fatta sull'ipotenusa.*

Queste due ultime verità geometriche sono di grandissimo impiego nella risoluzione di problemi, e nella dimostrazione di teoremi. Del resto esse porgono a vista, il mezzo di trovare due rette che stieno fra loro come la superficie di due quadrati, in altre parole, il mezzo di determinare linearmente un rapporto superficiale, sia col costrurre un triangolo rettangolo in cui i due cateti sieno i lati dei due quadrati, sia col costrurre un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa ed un cateto sieno i lati dei due quadrati, e poscia coll'abbassare dal vertice dell'angolo retto una perpendicolare sull'ipotenusa, e prendendo nel primo caso i due segmenti formati

dalla perpendicolare sull'ipotenusa, nel secondo caso l'ipotenusa, ed il segmento d'ipotenusa dalla parte da cui trovasi il cateto eguale al lato di uno dei quadrati dati.

Prima di abbandonare la figura che ha servito alla dimostrazione pittagorica del teorema sul quale fu rivolta sino ad ora l'attenzione, osservisi come se si tirano le tre rette H G, E F, I D, si vengono a formare tre triangoli H C G, E B F, D A I, i quali se pure tra loro diversi, sono però equivalenti, ed equivalenti col triangolo A B C. Il triangolo I A D si presenta di già evidentemente eguale al triangolo A B C, poichè è rettangolo avendo l'angolo I A D = C A B come opposti al vertice, ed ha A I = A C, A D = A B siccome lati dello stesso quadrato. Il triangolo H C G ha bensì il lato H C = C A, il lato C G = C B come lati di medesimo quadrato, ma ha l'angolo H C G che è il supplemento dell'angolo A C B; egli è tuttavia equivalente col triangolo A C B, perchè immaginando i due triangoli disposti in modo che vengano ad avere un lato comune, l'angolo compreso fra i lati eguali essendo l'uno supplementario dell'altro, l'altro lato eguale verrebbe a prendere posizione sul prolungamento dell'altro lato eguale, epperciò i due triangoli ad avere evidentemente eguale base ed eguale altezza. Il triangolo E B F è nelle stesse condizioni del triangolo H C G, egli ha il lato B E = A B, B F = B C e l'angolo E B F supplementario dell'angolo A B C, egli è per conseguenza equivalente col triangolo A B C. Potrebbesi perciò dire che l'area dell'intiera figura E F G H I D è eguale alla somma di tre quadrati costrutti sui tre lati di un triangolo rettangolo, più quattro triangoli eguali a questo.

La scoperta del teorema di Pittagora ha fatto epoca nella scienza, inquantochè col suo impiego non solo si possono risolvere infiniti problemi, ma da esso fanno capo molti altri teoremi i più importanti, dei quali nei limiti sempre della geometria elementare si verranno enunciando e dimostrando. Prima però di questo, e laonde immediatamente trarre partito dell'utilità del prefato teorema, si porti l'attenzione sul triangolo equilatero.

Il triangolo equilatero, per ciò che fu detto al libro primo, essendo un triangolo in cui le perpendicolari abbassate dai vertici sui rispettivi lati, cioè le altezze, sono tra loro eguali e dividenti le basi per metà, ne segue, che una qualunque di esse scomponendo il triangolo equilatero in due triangoli rettangoli eguali, aventi un

cateto comune nell' altezza, per ipotenusa un lato del triangolo equilatero, e per altro cateto una mezza base cioè un mezzo lato di triangolo equilatero, può ad uno qualunque di essi applicarsi il teorema pittagorico e derivare da questa applicazione il valore dell'altezza del triangolo equilatero in funzione del suo lato. Per maggiore brevità, chiamando con L il lato di un triangolo equilatero e con H una qualunque delle sue altezze, avendosi la relazione $L^2 = H^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$, ricavasi tosto $H^2 = L^2 - \frac{L^2}{4}$ ovvero $H^2 = \frac{3\,L^2}{4}$, e quindi $H = \frac{1}{2}\,L\sqrt{3}$, cioè: *l' altezza di un triangolo equilatero è eguale al prodotto della metà del suo lato per la radice quadrata del numero tre.*

Conosciuto il lato di un triangolo equilatero, avendo il mezzo di computarne l'altezza, si ha il mezzo di determinare l'area, non essendo questa che il semiprodotto del suo lato per l'altezza; cosicchè l'elemento che determina la costruzione, vale pure da solo a determinare la sua area. Ecco quindi la soluzione di un quesito che non sarebbe stato altrimenti possibile se non col soccorso della nota relazione fra i lati di un triangolo rettangolo.

Essendo L il lato di un triangolo equilatero, $\frac{1}{2}\,L\sqrt{3}$ la sua altezza, sarà la sua area $S = \frac{L}{2} \times \frac{L\sqrt{3}}{2}$, ossia $\frac{1}{4}\,L^2\sqrt{3}$, vale a dire: *l' area del triangolo equilatero è eguale al quarto del prodotto del quadrato del lato per la radice quadrata del numero tre.*

Le due formole $H = \frac{1}{2}\,L\sqrt{3}$, $S = \frac{1}{4}\,L^2\sqrt{3}$, potendo venire convertite nelle altre due $L = \frac{2\,H}{\sqrt{3}}$, $L = \sqrt{\frac{4\,S}{\sqrt{3}}}$, che esprimono, la prima il valore del lato in funzione della sua altezza, la seconda il valore del lato in funzione dell'area, esse porgono il mezzo del computo del lato del triangolo equilatero colla conoscenza del lato o dell'area. Si dirà perciò nel primo caso che: *il lato di un triangolo equilatero è eguale al quoziente del doppio dell' altezza per la radice quadrata del numero tre;* nel secondo caso che: *il lato di un triangolo equilatero è eguale al doppio della radice quadrata del quoziente dell' area pella radice quadrata del numero tre.*

Relazioni quadrate fra i lati di un triangolo qualunque. — Una delle principali applicazioni che riceve il teorema pitagorico è quella della determinazione del rapporto quadrato fra i lati di un triangolo qualunque.

Giova premettere anzitutto, che un triangolo A B C (Fig. 22) sarà ottusangolo se una qualunque delle altezze come C D cade sul prolungamento di un lato, che un triangolo A B C (Tav. XXI, Fig. 23) sarà acutangolo se tutte le altezze cadono sui lati. Ma essendosi chiamato col nome di proiezione la retta che congiunge i piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi di una retta sopra altra retta, si dirà così che un triangolo è ottusangolo se la proiezione di un qualche lato sopra altro lato è contenuta sul prolungamento di quest'ultimo, acutangolo se la proiezione di qualsiasi lato sopra altro lato è su questo contenuta.

Adottando di chiamare positiva quella proiezione che è contenuta sui lati, e negativa quella contenuta sul prolungamento dei lati, un triangolo sarà ottusangolo se la proiezione di un suo qualche lato sopra altro è negativa, sarà acutangolo se la proiezione di un lato qualunque sopra altro lato sarà positiva.

Ciò posto, essendo A B C (Fig. 22) un triangolo ottusangolo, D A la proiezione negativa del lato A C fatta sul lato A B, vedonsi tosto sussistere i due triangoli rettangoli C D B, C D A, i quali mercè il teorema pittagorico, forniscono le eguaglianze $\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$, $\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$; dalla seconda delle quali ricavando il valore di $\overline{CD}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{DA}^2$ e sostituendolo nella prima, si fa rimanere $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{DA}^2 + \overline{DB}^2$. Ma essendo $DB = DA + AB$ e conseguentemente $\overline{DB}^2 = \overline{DA}^2 + 2\,DA \times AB + \overline{AB}^2$ per la nota formola del quadrato di un binomio, colla debita sostituzione di questo valore di $\overline{DB}^2$ nel valore di $\overline{CB}^2$, si ricava essere $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{DA}^2 + \overline{DA}^2 + 2\,DA \times AB + \overline{AB}^2$, ossia $\overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 + 2\,DA \times AB + \overline{AB}^2$.

Ecco così il valore del quadrato del lato C B in funzione dei lati C A, A B, e della lunghezza D A proiezione del lato A C su A B. Questa lunghezza D A, essendo come si è detto, negativa, il

prodotto $2\, DA \times AB$ non può essere a meno di essere negativo, e conseguentemente il valore di $\overline{CB}^2$, riducesi all'espressione finale seguente:

$$(^1) \qquad \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 - (-2\, DA \times AB) + \overline{AB}^2$$

identica a quella più sopra, perchè come è visibile dovendo eseguire la sottrazione della quantità compresa fra la parentesi, essa viene a cambiare segno.

Essendo ora A B C (Tav. XXI, Fig. 23) un triangolo acutangolo, A D la proiezione positiva del lato A C sul lato A B, vedonsi tosto i due triangoli rettangoli B C D, A C D, e conseguentemente luogo alle eguaglianze $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2$, $\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$, dalla seconda delle quali ricavando il valore di $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$, e sostituendolo nella prima, si ottiene $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2$. E poichè $DB = AB - AD$, epperciò $\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 - 2\, AB \times AD + \overline{AD}^2$, sostituendo questo valore di $\overline{DB}^2$ a suo posto nel valore di $\overline{BC}^2$, si ricava $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 - 2\, AB \times AD + \overline{AD}^2$, ossia $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\, AB \times AD$, il valore cioè, del quadrato del lato B C in funzione dei lati A C, A B, e della lunghezza A D proiezione del lato A C su A B. Questa proiezione essendo positiva, il prodotto $2\, AB \times AD$ sarà positivo, e l' espressione sopra trovata di $\overline{BC}^2$ si converte nella seguente:

$$(^2) \qquad \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - (2\, AB \times AD)$$

identica, poichè coll' effettuazione della sottrazione i termini sottraendi cambiano segno.

Osservando le due eguaglianze (1), (2), vedesi ben tosto come esse esprimano il teorema seguente. *In ogni triangolo, il quadrato di un lato è eguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, meno il doppio prodotto di uno di essi per la proiezione dell' altro.*

Con questo teorema, data una misura di tre lati di un triangolo è possibile di giudicare se egli sia ottusangolo od acutangolo, se-

condo la somma dei quadrati di due lati è minore o maggiore del quadrato del terzo lato.

Non è di poca importanza il suespresso rapporto quadrato fra i lati di un triangolo, poichè è mercè di esso, che giungesi colla conoscenza dei tre lati di un triangolo qualunque a determinare il valore delle tre altezze, e conseguentemente il valore dell'area; e così la determinazione di questi elementi in funzione di altri, che altrimenti avrebbe necessitata una costruzione, e l'assunzione di misure che come è noto, non possono mai prendersi esattamente.

Risulta diffatti, che essendo ad esempio A B C (Fig. 23), un triangolo dal quale se ne voglia ricavare l'espressione e dell'area e dell'altezza colla conoscenza dei soli lati: colla considerazione che $\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \times DB$, si ha il verso di ottenere la lunghezza D B, e dopo questa ottenuta, in virtù del teorema pittagorico quello di ottenere l'altezza C D, ed evidentemente dopò l'area. Ma volendo trovare una formola, la quale esprima direttamente il valore dell'altezza e dell'area di un triangolo in funzione dei suoi tre lati, chiamisi il lato A B con c, il lato A C con b, e il lato B C con a, ed in allora la sopracitata espressione prende il carattere $b^2 = a^2 + c^2 - 2\,c \times DB$. Portando nel primo membro il termine $2\,c \times DB$, si ha $2\,c \times DB = a^2 + c^2 - b^2$, e dividendo tutta l'eguaglianza per il coefficiente di D B, ricavasi

$$DB = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}.$$

Ora, come si è detto, il triangolo D B C essendo un triangolo rettangolo, è l'altezza

$$\overline{CD}^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}\right)^2$$

e quindi

$$CD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,c}\right)^2}$$

ossia

$$CD = \sqrt{a^2 - \frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\,c^2}}$$

e ridotta al medesimo denominatore la quantità sotto il radicale, risulta

$$\mathrm{C\,D} = \sqrt{\frac{4\,a^2 c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4\,c^2}}$$

ovverosia per ultima espressione

$$\text{l'altezza } \mathrm{C\,D} = \frac{\sqrt{4\,a^2\,c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2\,c}$$

L'area S di un triangolo essendo eguale al prodotto dell'altezza per la metà della base, e la base essendo c, si avrà

$$\mathrm{S} = \frac{c}{2} \times \frac{\sqrt{4\,a^2\,c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}}{2\,c}$$

in cui effettuando il prodotto, e dividendo il numeratore e il denominatore per il fattore c comune, viensi ad avere

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4} \times \sqrt{4\,a^2\,c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}\,.$$

Ora, osservando che la quantità compresa sotto il radicale è la differenza di due quadrati perfetti, e che tale essendo, essa può considerarsi siccome il prodotto della somma per la differenza delle radici, vedesi tosto come il valore di S prenda l'altra forma

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\sqrt{(2\,a\,c + a^2 + c^2 - b^2)\,(2\,a\,c - a^2 - c^2 + b^2)}$$

ma siccome $2\,a\,c + a^2 + c^2$ è eguale ad $(a + c)^2$, e $2\,a\,c - a^2 - c^2 + b^2$, può essere messo nella forma $b^2 - (a^2 + c^2 - 2\,a\,c)$ e che $a^2 + c^2 - 2\,a\,c$ è eguale ad $(a - c)^2$, così S può prendere l'altra forma ancora

$$\mathrm{S} = \frac{1}{4}\sqrt{\{(a + c)^2 - b^2\} \times \{b^2 - (a - c)^2\}}$$

Qui pure ogni quantità compresa nelle grandi parentesi, essendo

diana C D, e se ne fa la sua proiezione sul lato A B, scorgesi tosto, come se detto triangolo fosse isoscele, la proiezione della medesima si ridurrebbe a zero, e risulterebbero due triangoli A D C, B D C rettangoli eguali, dai quali pel teorema di Pittagora, si verrebbe ad avere, che la somma dei quadrati dei due lati A C, C B, sarebbe eguale a due volte il quadrato della mediana od altezza C D, più due volte il quadrato della mezza base. Ma supponendo un triangolo non isoscele, come quello A B C della figura, nessun dubbio che i due triangoli A C D, D C B, in cui viene scomposto dalla mediana C D, sono l'uno ottusangolo, l'altro acutangolo, ed in conseguenza di questa loro essenza, potersi applicare la relazione precedente, e potersi stabilire le due eguaglianze

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + 2\,AD \times DE$$

$$\overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = 2\,DB \times DE$$

delle quali facendo la somma, e ponendo mente che per essere la retta C D una mediana è A D = D B, viensi ad avere l'espressione

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 2\,\overline{CD}^2 + 2\,\overline{AD}^2$$

vale a dire come: ***in ogni triangolo, la somma dei quadrati di due lati è eguale a due volte il quadrato della mediana fra essi compresa, più due volte il quadrato della metà del terzo lato.***

Questo teorema fa sì che, avendo un parallelogramma A B C D, (Fig. 25) ed in esso tirando le diagonali A C, B D, siccome queste si tagliano vicendevolmente per metà, sia dato di stabilire le due eguaglianze seguenti

$$\overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 = 2\,\overline{OC}^2 + 2\,\overline{OD}^2,\ \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{AO}^2 + 2\,\overline{OD}^2$$

che sommate, forniscono l'altra eguaglianza

$$\overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = 2\,\overline{OC}^2 + 4\,\overline{OD}^2 + 2\,\overline{AO}^2$$

nella quale ponendo mente che $AO = OC$, e conseguentemente $\overline{AO}^2 = \overline{OC}^2$, vedersi ridurre nella espressione

$$\overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = 4\,\overline{OC}^2 + 4\,\overline{OD}^2,$$

in cui per essere $OC = \frac{AC}{2}$, $OD = \frac{BD}{2}$ e conseguentemente $\overline{OC}^2 = \frac{\overline{AC}^2}{4}$, $\overline{OD}^2 = \frac{\overline{BD}^2}{4}$, ovvero $4\,\overline{OC}^2 = \overline{AC}^2$, $4\,\overline{OD}^2 = \overline{BD}^2$, è

$$\overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2.$$

Ma $\overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{AB}^2$ essendo la somma dei quadrati dei lati del parallelogramma, e $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$ essendo la somma dei quadrati delle diagonali, è così dato di dire: *in ogni parallelogramma, la somma dei quadrati dei lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.*

Relazione quadrata fra certi segmenti di lati di un triangolo. — Se si ha un triangolo A B C (Fig. 26), e che per un punto preso O nel suo interno si abbassino sui lati le tre perpendicolari O D, O E, O F, ciascuna di esse forma sul rispettivo lato due segmenti adiacenti di lati di triangoli; così, quella O D i due segmenti A D, D B, quella O E i due segmenti E B, E C, quella O F i due segmenti F C, F A. Se ora si immaginano condotte dal punto O delle rette O A, O B, O C ai vertici, si vedono tosto risultare sei triangoli rettangoli, aventi due a due l'ipotenusa comune, e ad ognuno dei quali applicando il teorema pittagorico si vengono a formare le tre seguenti eguaglianze:

$$\overline{OD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{EB}^2$$

$$\overline{OE}^2 + \overline{EC}^2 = \overline{OF}^2 + \overline{FC}^2$$

$$\overline{OF}^2 + \overline{FA}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{AD}^2$$

che assieme sommate, danno l'eguaglianza

$$\overline{OD}^2+\overline{DB}^2+\overline{OE}^2+\overline{EC}^2+\overline{OF}^2+\overline{FA}^2=$$

$$\overline{OE}^2+\overline{EB}^2+\overline{OF}^2+\overline{FC}^2+\overline{OD}^2+\overline{AD}^2$$

nella quale sopprimendo i termini eguali ad amendue i membri, si viene ad avere che

$$\overline{DB}^2+\overline{EC}^2+\overline{FA}^2=\overline{DA}^2+\overline{FC}^2+\overline{EB}^2$$

cioè a dire: *in ogni qualunque triangolo, la somma dei quadrati dei tre segmenti non consecutivi, formati da perpendicolari abbassate da un punto preso nel suo interno, è eguale alla somma dei quadrati degli altri tre segmenti.*

Figure simili. — Colla Planimetria si è trattato del rapporto di misura fra due o più figure qualsiansi, e si è visto risultare per alcune, che siffatto rapporto era l'identico con quello di alcuni elementi rettilinei che le determinavano, e si è visto altresì scaturire per alcune, dei rapporti di quadratura fra alcuni elementi rettilinei che pure le determinavano. Più quindi non rimane che a trattare del rapporto di misura fra due o più *figure simili*, due o più figure cioè, che la figura essendo in tutte la stessa, non abbiano a differire che nella grandezza, e di trarre poscia argomento da un cosiffatto rapporto, e da una cosiffatta essenza di figure, per stabilire, dietro i già noti principii, delle nuove proprietà, e nuovi rapporti lineari e di quadratura, tanto negli elementi rettilinei, quanto in quelli curvilinei delle linee e figure, che furono l'obbietto dei due precedenti libri.

Due o più figure per avere la medesima figura, debbono avere ciascuna necessariamente un medesimo numero di vertici e punti, un medesimo numero di lati e di linee, e se queste ultime sono curvilinee debbono avere un simile andamento, e se rettilinee, debbono avere colle contigue una eguale apertura, vale a dire avere ogni angolo dell'una il suo corrispondente ed eguale nell'altre; ed oltracciò due linee qualunque di una delle due figure, che abbiano una estensione in un rapporto costante coll'esten-

sione di altre linee corrispondenti nelle altre figure. Due o più figure quindi, per essere simili occorre che abbiano ogni angolo dell' una l'eguale nelle altre, e che inoltre il rapporto che corre fra due lati o linee qualunque di una figura, sia eguale al rapporto che corre fra altri ed altre nelle altre figure, ed aventi una identica posizione. Questa simile ragione che debbono avere i lati e le linee delle figure simili, ha fatto dare il nome di *omologo*, parola greca che appunto ha un tale significato, a quei lati, o a quei vertici, o a quegli angoli, o a quelle diagonali, o a tutte quelle altre linee infine, l'uno o l'una in una figura, l'altro o l'altra nelle altre figure, che hanno una identica posizione, relativamente ben inteso all'intiera figura. Valendosi di questa espressione, si dirà: perchè due figure sieno simili occorre che esse abbiano gli angoli al perimetro omologhi o corrispondenti eguali, i lati e tutte le altre linee omologhe proporzionali cioè in un rapporto costante.

I triangoli equilateri essendo tutti tali, che ciascun angolo è di 60°, e che il rapporto che corre fra un lato qualunque di uno, con un lato di altri triangoli equilateri è identico con quello che corre fra ogni qualunque degli altri due lati del primo, con gli altri due lati degli altri triangoli equilateri, perchè rapporto sempre di lunghezze costanti, essi sono tutte figure simili. Medesimamente i quadrati, essendo tali che in ciascuno tutti gli angoli sono retti, e che il rapporto che corre fra un lato qualunque di uno con un lato di altri quadrati, è eguale al rapporto corrente fra un lato qualunque del primo con gli altri lati degli altri quadrati, perchè rapporto sempre di quantità costanti, così sono altresì tutti figure simili.

Linee proporzionali. — Due o più figure che sieno simili dovendo avere i lati omologhi proporzionali, vuol dire che nei perimetri delle medesime si hanno una serie tanto di linee rette quanto di linee curve che tra loro formano una proporzione, in altre parole, delle *linee proporzionali.* Prima quindi di attendere alle figure simili è d'uopo conoscere come sieno originate queste linee proporzionali, affine di potere da questa origine, dedurre quella delle stesse figure simili.

Fermandosi su questo proposito immediatamente sorge al pensiero, che dal momento che due rettangoli, o due parallelogrammi,

o due triangoli aventi eguale altezza, le loro aree ne sono proporzionali alle basi, che ove si conoscesse il mezzo di costrurre due od $n \times 2$ rettangoli, o parallelogrammi, o triangoli, i quali fossero ciascuno equivalenti con ciascuno di altri due dati, e che per di più avessero medesima altezza, come essendo le aree di questi pure proporzionali alle basi, si avrebbe nelle basi di tutti tutti questi rettangoli, o parallelogrammi, o triangoli, delle rette proporzionali tra di loro, essendochè tutte le proporzioni che si sarebbero formate avendo eguali i primi, e medesimamente eguali i secondi termini, come aree di triangoli equivalenti, gli altri non potrebbero a meno di formare proporzione. Ma come si è detto, per giungere a questo risultato occorre avere dei triangoli equivalenti a due dati, perchè le basi di tutti questi sieno delle linee proporzionali.

Perciò, osservando che se si ha un triangolo A B C (Fig. 27), e che parallelamente ad un lato A B si conduca una retta D E, che questa retta colle rette A E, B D, tirate la prima dal punto A, la seconda dal punto B ai punti in cui la parallela taglia i due lati C A, C B; origina quattro triangoli A E B, A D B, D A E, D B E, che hanno tutti e quattro una medesima altezza, ed i due primi per base la medesima base A B, ed i due ultimi la medesima base D E, e che perciò il triangolo A B E è equivalente col triangolo A B D, ed il triangolo D A E equivalente col triangolo D B E, ed ognuno di questi ultimi due triangoli di medesima altezza col triangolo C D E, è dato di vedere come siasi prodotta perfettamente la circostanza che si era indicata necessaria per avere delle rette proporzionali.

Avendo infatti da una parte, due triangoli D A E, C D E, che hanno medesima altezza, epperciò danno la proporzione

$$DAE : CDE :: AD : CD,$$

dall' altra, altri due triangoli E B D, E D C, equivalenti ai due primi ed oltracciò di medesima altezza, i quali danno l'altra proporzione

$$EBD : ECD :: EB : EC;$$

queste due proporzioni avendo i due primi termini eguali agli altri due formano proporzione, e si ha

A D : D C :: B E : E C ;

vale a dire, sono A D, D C, B E, E C, quattro rette in proporzione. La retta E C è una *quarta proporzionale* dopo le tre rette A D, D C, B E; ed ove D C fosse eguale a B E, sarebbe la retta E C una *terza proporzionale* dopo le due rette A D, D C, e la retta D C sarebbe per rispetto ad A D ed E C una *media proporzionale.*

La proporzione A D : D C :: B E : E C a cui si è pervenuti colla fatta considerazione di una retta D E tirata parallelamente al lato A B, come quella che si ottiene componendo la medesima, autorizza a poter dire, come *in ogni triangolo, una retta condotta parallelamente ad un lato divide gli altri due in parti proporzionali,* e viceversa *due lati di un triangolo che siano divisi in parti proporzionali da due punti, la retta che questi congiunge è una parallela al terzo lato.*

Ora in base di detto teorema presentasi chiaro, come tirando dal punto D una retta D F parallela al lato B C, i due lati A B, A C, rimanendo divisi in parti proporzionali, vale a dire dando luogo alla proporzione

A F : F B :: A D : D C,

si abbia questa componendo

A F + F B : F B :: A D + D C : D C,

nella quale per essere F B = D E siccome parallele comprese fra parallele, A F + F B = A B, A D + D C = A C, colla sostituzione giungasi ad ottenere la proporzione

A B : D E :: C A : C D

la quale esprime come *in ogni triangolo, una retta condotta parallelamente ad un lato è a questo proporzionale nel rapporto stesso dei segmenti degli altri due lati che hanno per estremo comune un vertice del triangolo, cogli stessi lati.*

Una retta quindi condotta parallelamente ad un lato di un triangolo forma od origina coi lati di questa, non solo quattro rette proporzionali, ma ne forma sei colla proporzione

C A : C D :: C B : C E :: A B : D E,

e quattro coll'altra proporzione,

C D : D A :: C E : E B.

Poichè colla retta D E parallela al lato A B si ha la proporzione

A D : C D :: B E : C E,

colla retta G H pure parallela ad A B, e per conseguenza anche parallela a D E, si ha medesimamente la proporzione,

G D : C D :: H E : C E;

le quali due proporzioni hanno comuni i conseguenti, epperciò in relativa proporzione gli antecedenti tra loro, così si ha la proporzione,

A D : G D :: B E : H E

e quindi divisa, la

A D — G D : G D :: B E — H E : H E,

nella quale per essere A D — G D = A G, B E — H E = B H, riducesi alla seguente,

A G : G D :: B H : H E,

che dinota come sieno le due rette A D, B E, divise in parti proporzionali mediante le rette parallele A B, G H, D E; o per meglio dire, come *le porzioni di due secanti intercette fra rette parallele sono tra loro proporzionali.* Cosicchè, mentre le porzioni di due secanti parallele intercette fra parallele sono eguali, le porzioni di due secanti non parallele, comprese fra parallele sono proporzionali.

Rientrati in questa questione, resta di vedere se egli sia solo per due secanti, vera la proporzionalità citata, ovvero se lo sia per tutte le secanti che alle parallele si possono condurre.

Per ciò, siccome se tirasi dal punto C una secante qualunque C F alle rette parallele A B, G H, D E, con ragionamento identico al precedente si verrebbe ad avere la proporzione,

A G : G D :: F O : O P,

che con quella

A G : G D :: B H : H E,

darebbe l' altra

A G : G D :: F O : O P :: B H : H E,

così è dato di vedere, come *le secanti partenti da un medesimo punto rimangono divise in parti proporzionali da un sistema di rette parallele.*

Se poi osservasi che per quanto fu già dimostrato dai triangoli A C F, B F C, hanno luogo le proporzioni

C F : C O : C P :: F A : O G : P D

C F : C O : C P :: F B : O H : P E

le quali per avere gli antecedenti eguali, i conseguenti formano la proporzione

F A : O G : P D :: F B : O H : P E,

è dato di vedere altresì, come *un sistema di rette parallele sieno divise in parti proporzionali da delle secanti condotte da un medesimo punto.*

Ora, qualsiasi retta F C', che ad esempio si tirasse dal punto F e che non venga a passare pel punto C, ma incontrasse la retta A C in C', siccome verrebbe divisa in due punti Q ed R dalle parallele D E, G H, e non nel medesimo rapporto in cui è divisa la secante C F nei punti P ed O, a motivo che tanto P Q quanto O R, non sono parallele a C C', così il rapporto corrente fra F A, R G, Q D, non è il medesimo di quello corrente fra F B, R H, Q E, e quindi è dato di poter dire, come *le secanti condotte da un medesimo punto ad un sistema di rette parallele sono solo quelle, che vengono da questo divise in parti proporzionali;* e viceversa

due rette parallele su ciascuna delle quali esistono un eguale numero di punti, proporzionalmente distanti nell' una e nell' altra delle parallele, le rette che uniranno due a due tali punti, sia che questa unione sia fatta cominciando dagli estremi della medesima parte, sia che sia fatta cominciando dagli estremi opposti, purchè fatta con ordine, vale a dire che ogni consecutivo unisca rispettivamente ogni consecutivo; esse si incontreranno sempre in un sol punto.

Cosicchè supposto la conoscenza delle basi A B, D E di un trapezio A B E D, e la distanza A F di un punto F dato sulla base A B, sarà possibile il computo della distanza D P sull' altra base, di un punto P che il prolungamento della retta che lo unisce col punto F, sia una retta che concorra nel prolungamento stesso dei lati non paralleli del trapezio, mercè la proporzione

$$AB : DE :: AF : DP$$

dalla quale $DP = \frac{DE \times AF}{AB}$.

Premesse le proprietà delle linee proporzionali, un esempio di diretta loro applicazione si presenta nella dimostrazione del teorema seguente: ***Il quadrilatero i cui vertici sono i punti di mezzo di altro quadrilatero qualsiasi è un parallelogramma di area metà di quest'ultimo.***

Essendo A B C D un quadrilatero, ed E, F, G, H i punti di mezzo dei lati, la figura E F G H è un parallelogramma, e di area metà di quella del quadrilatero A B C D.

Infatti, tirata la diagonale A C, i punti E ed H trovandosi, il primo sulla metà di D A, il secondo sulla metà di D C, la retta E H divide nello stesso rapporto i due lati D A, D C del triangolo A D C, e conseguentemente è parallela ad A C, ed è eguale alla metà di essa per la nota ragione di rapporto D A: D E :: A C: E H. Medesimamente, la retta che congiunge i punti F e G di mezzo dei due lati B A, B C del triangolo A B C, essendo parallela ad A C ed eguale alla metà di questa; ne consegue che per essere E H, F G due rette parallele ad una terza, sono parallele tra loro, ed essendo ciascuna eguale alla metà di A C, esse sono tra loro eguali. Ora la figura E F G H avendo due lati opposti eguali e paralleli, essa non

è altrimenti che un parallelogramma. Un ragionamento identico sarebbe stato fattibile colla diagonale B D e considerando i due lati opposti H G, E F della figura, ed un risultato identico sarebbesi ottenuto, cioè H G eguale e parallelo ad E F.

Venendo all'area del parallelogramma E F G H è dato di vedere come essa sia scomponibile in quattro triangoli, ciascuno dei quali eguale a ciascuno dei quattro triangoli aventi per lati un lato del parallelogramma e due lati del quadrilatero.

Tirando dal punto F una parallela ad A D, e dal punto E una parallela ad A B, dette parallele si taglieranno in un punto L che sarà collocato sulla metà della diagonale D B, perchè vi ha eguaglianza di rapporto nella divisione del lato D B operata con due parallele agli altri due lati condotti per punti che già trovandosi su di una parallela a D B, sono altresì sulla metà dei lati A B, A D; e si originerà il triangolo E L F eguale al triangolo E A F, siccome avente il lato E F comune, i lati E L = A F, F L = A E siccome lati opposti del parallelogramma A F L E, e quindi detti due triangoli essendo eguali sono altresì equivalenti. Tirando dal punto H una parallela a C B e dal punto G una parallela a C D, queste due parallele verranno ad incontrarsi nel punto di mezzo della diagonale D B e quindi nello stesso punto L per la ragione stessa detta precedentemente; e medesimamente, il triangolo H L G risultante sarà eguale epperciò equivalente col triangolo H C G. Il triangolo poi E L H avendo col triangolo F B G il lato E H = F G siccome lati opposti del parallelogramma E F G H, il lato E L = F B siccome lati opposti del parallelogramma E L B F, ed il lato H L = G B siccome lati opposti del parallelogramma H L B G, sono eguali epperciò equivalenti. Infine il triangolo F L G avendo col triangolo E H D il lato F G = E H siccome lati opposti del parallelogramma E F G H, il lato F L = E D siccome lati opposti del parallelogramma D E F L, il lato L G = D H siccome lati opposti del parallelogramma D H G L, essi sono eguali epperciò equivalenti. Laonde l'area del quadrilatero A B C D essendo eguale a due volte l'area del triangolo E L F, più due volte l'area del triangolo H L G, più due volte l'area del triangolo E H L, più finalmente due volte l'area del triangolo F L G, presentasi evidente come il parallelogramma E F G H è la metà in area dell'intiero quadrilatero A B C D, che è quanto completava l'enunciato teorema.

Carattere delle figure simili. — In ogni qualsiasi triangolo A B C (Fig. 27), poichè tirando una retta D E parallela ad un lato si viene a formare dalle linee proporzionali, o per meglio dire, si vengono a formare dalla proporzione C A : C D :: C B : C E :: A B : D E tre rette C D, C E, D E che stanno tra loro nel rapporto stesso dei tre lati C A, C B, A B del triangolo A B C, e le quali tre rette sono lati di un triangolo D E C avente per base la parallela condotta, è così dato di intendere come il triangolo C D E che si origina conducendo una parallela ad un lato di un dato triangolo, abbia sempre un angolo C comune con questo e gli altri due a motivo della parallela D E corrispondenti pure eguali, cioè C D E = C A B, C E D = C B A, ed abbia i lati proporzionali e quindi sia sempre un triangolo simile al triangolo dato. Ora, infinite essendo le rette che parallelamente ad un lato si possono condurre in un triangolo, così non solo è possibile l'esistenza di due triangoli simili, ma infinito è il numero dei triangoli simili ad un dato altro triangolo che vi possono esistere.

I triangoli A B C, D E F (Fig. 29) si dicono simili, perchè hanno gli angoli rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno ed i lati omologhi proporzionali, vale a dire, hanno l' angolo A = D, l' angolo B = E, l' angolo C = F, ed il lato C A opposto all'angolo B, che sta al lato F D opposto all'angolo eguale E, come il lato C B opposto all'angolo A, sta al lato F E opposto all'angolo eguale D, come il lato A B opposto all' angolo C, sta al lato D E opposto all'angolo eguale F.

E poichè i lati nei due triangoli simili A B C, D E F, danno la proporzione

$$CA : CB : AB :: FD : FE : DE,$$

questa *componendo*, ricavasi

$$CA + CB + AB : CA :: FD + FE + DE : FD$$

ed invertendo

$$CA + CB + AB : FD + FE + DE :: CA : FD$$

la quale proporzione esprime come *i perimetri di due triangoli simili sono proporzionali ai lati omologhi.* Considerando più triangoli

simili, ottiensi in identico modo che i perimetri di ciascuno di essi sono proporzionali ai loro lati omologhi.

Dato un triangolo, sapendo formarne una infinità di simili con tirare delle parallele ad un lato, ne deriva, che dato un poligono qualsiasi sarà altresì possibile di formare un altro poligono composto di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti a quello ed a quelli in cui è scomponibile il dato poligono.

Essendo A B C D E (Fig. 30) un poligono, se si conducono ad esempio le singole diagonali A D, A C che lo scompongono nei triangoli A E D, A D C, A C B, e dopo tirata una retta F G che vogliasi per omologa di A B, si costruisce su di essa un triangolo F G H simile al triangolo A B C, indi sulla diagonale F H si costruisce un triangolo F H I simile al triangolo A C D, ed infine sulla diagonale F I si costruisce un triangolo F I L simile al triangolo A D E, si avrà nell'intiero poligono F G H I L, un poligono composto di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti a quello ed a quelli del poligono A B C D E. Ma se osservasi che da questo fatto si possono stabilire la serie di rapporti eguali

$$AB : FG :: AC : FH :: BC : GH :: FI : AD ::$$

$$CD : HI :: DE : IL :: EA : LF$$

e dai quali rilevare

$$AB : FG :: BC : GH :: CD : HI :: DE : IL :: EA : LF$$

vedesi tosto, come i due poligoni A B C D E, F G H I L abbiano i lati proporzionali. Parimenti se osservasi che l' angolo H F G = C A B, I F H = D A C, I F L = D A E, ricavasi essere H F G + I F H + I F L = C A B + D A C + D A E, ossia l'angolo A = F. Considerazione analoga fatta per gli altri angoli B, C, D, E, ognuno dei quali è composto di angoli eguali agli angoli di cui sono composti ciascuno degli angoli G, H, I, L, dimostra essere l' angolo B = G, C = H, D = I, E = L. Ora il poligono F G H I L stato costrutto colla formazione di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti, avendo col poligono A B C D E i lati omologhi proporzionali e gli angoli omologhi eguali, è a quest' ultimo simile. È dato quindi di potere dire, che *due poligoni simili si com-*

pongono di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti, e viceversa *due poligoni che si compongono di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti, sono simili.*

Dato quindi un poligono, saranno infiniti quelli che simili ad esso si potranno costrurre. Questa infinità di poligoni simili ch' è dato di far esistere ad altro poligono è quella che permette di rappresentare in piccolissima dimensione, ben' anche su piccola porzione di carta, delle grandi regioni di terra, edifizii, macchine, ed in generale ogni qualsiasi oggetto; supponendo un piano che in dimensioni naturali rappresenti tutte le sopracitate cose, ed uniti tre a tre i punti che caratterizzano le dette figure, e poscia col formare altrettanti triangoli simili da convenientemente disporli, ritenendo per tutti essi sempre lo stesso rapporto o proporzionalità fra i lati omologhi, che chiamasi col nome di *scala*, la quale è sempre espressa da una frazione avente per numeratore l' unità, il denominatore così esprimendo il numero di volte che più lunghe sono le dimensioni reali che hanno o che debbono avere, secondochè trattasi di cosa esistente o di cosa progettata.

Due poligoni simili A B C D E, F G H I L avendo i lati omologhi proporzionali, forniendo cioè la proporzione

$$AB:BC:CD:DE:EA::FG:GH:HI:IL:LF$$

si ha questa *componendo*,

$$AB+BC+CD+DE+EA:AB::FG+GH+HI+IL+LF:FG$$

e quest'ultima invertendo

$$AB+BC+CD+DE+EA:FG+GH+HI+IL+LF::AB:FG$$

nella quale i due primi termini esprimendo il perimetro dei poligoni simili, ed i due ultimi due lati omologhi, è dato di stabilire la proposizione: che *il perimetro dei poligoni simili è proporzionale ai lati omologhi.*

Il perimetro di un poligono essendo una linea spezzata chiusa, ogni linea spezzata non chiusa potendo venire considerata come una porzione di perimetro di poligono, ha una medesima ragione con altra porzione simile e limitata da punti omologhi. Così essendo A B C D E (Fig. 31) una linea spezzata ed F G H I L altra linea spezzata simile, tale cioè che tutti gli angoli omologhi siano eguali ed entrambi rientranti o salienti e che inoltre sia

$$AB : BC : CD : DE :: FG : GH : HI : IL$$

poichè componendo detta proporzione ricavasi

$$AB + BC + CD + DE : AB :: FG + GH + HI + IL : FG$$

e questa invertendo

$$AB + BC + CD + DE : FG + GL + HI + IL :: AB : FC,$$

si ha l'espressione che *le lunghezze di due linee spezzate simili sono proporzionali alle rette omologhe.*

Ad ogni linea curva potendo tenere inscritta e circoscritta una linea spezzata, è dato di dire che *due o più curve saranno simili se tutte le linee spezzate inscritte o circoscritte conducibili in una qualunque di esse, hanno le simili nelle altre.* Le due curve A D C E B, F I H L G (Fig. 32), tali che la linea spezzata qualunque inscritta in una ha la simile nell' altra, sono alla loro volta due curve simili.

Due o più poligoni regolari di un eguale numero di lati, essendo tali che il rapporto che corre fra un lato di uno ed un lato degli altri è eguale al rapporto di qualunque altro lato del primo con qualunque altro lato degli altri, perchè rapporto di quantità costanti; e che gli angoli al perimetro sono tutti eguali come derivanti tutti dalla formola $\frac{2r(n-2)}{n}$, così: *tutti i poligoni regolari di un egual numero di lati sono simili tra loro.*

Due o più circonferenze, essendo tali che tutti i poligoni inscritti e circoscritti in una di esse, possono i simili venire inscritti e circoscritti nelle altre partendo da un punto qualsiasi delle medesime,

così: *tutte le circonferenze di circolo sono simili tra loro, e quindi del pari simili sono tutti i circoli.*

Medesimamente *due o più archi di circolo non descritti col medesimo raggio sono simili se gli angoli al centro che essi misurano, sono eguali.* Poichè la similitudine di due o più archi per sussistere abbisognando di quella delle linee spezzate inscritte o circoscritte, è evidente che tirando agli estremi degli archi simili i rispettivi raggi ed a questi stessi estremi delle tangenti o perpendicolari ai raggi, poichè queste s'incontrano sotto un angolo eguale, l'angolo al centro che ne è il supplemento non può essere altrimenti che eguale.

Due archi quindi A B, D E (Fig. 33), che misurino due angoli al centro A C B, D O E eguali, sono simili, e simili sono pure le corde A B, D E che sottendono angoli al centro eguali, e simili ancora sono i settori circolari A C B, D O E aventi un angolo al centro eguale.

E dall'istante che simili sono i circoli, le circonferenze, e gli archi che misurano un medesimo angolo, così essi sono proporzionali alle rispettive linee omologhe, quali i raggi e i diametri, sicchè: 1.° *le circonferenze di due o più circoli sono proporzionali ai raggi ed ai diametri;* 2.° *due archi simili sono altresì proporzionali ai raggi ed ai diametri.*

Ora, l'essere per quanto fu detto a pag. 102, il rapporto di due qualunque archi di circolo espresso dal rapporto composto degli angoli che essi misurano, e di due archi di medesimo raggio misurante l'angolo stesso misurato, dall'arco minore; ed essendo il rapporto di due archi misuranti un angolo stesso eguale al rapporto dei raggi con cui sono descritti, è così stabilito che *il rapporto di due qualunque archi di circolo è espresso dal rapporto composto dei raggi e degli angoli.*

Sufficienza d'elementi per la similitudine delle figure. — Nella stessa guisa che due o più figure che sieno eguali hanno i lati, gli angoli e tutte le altre linee ed angoli omologhi che sono eguali, e pur tuttavia non è necessaria la conoscenza di tutti indistintamente gli elementi che in esse si riscontrano perchè esse sieno determinate, così è delle figure simili, e ben a ragione non essendo le figure eguali che un caso particolare delle simili, quello in cui il rapporto di proporzionalità dei lati è 1.

Per vedere in quali limiti sia compresa la similitudine di due o

più figure, o per meglio dire, quante sono le condizioni necessario a due o più figure perchè abbiano ad essere simili, egli giova osservare, che dal momento che due o più figure per essere simili debbono comporsi di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti, indipendentemente da quelli che possono avere un lato curvilineo, il prodotto del numero di triangoli in cui una figura sarà scomponibile, per il numero delle condizioni di similitudine di due o più triangoli, sia effettivamente un tale prodotto l'espressione della sufficienza d'elementi per la similitudine delle figure.

Ma a determinare questo prodotto abbisognando la conoscenza della sufficienza d'elementi per la similitudine dei triangoli, così sarà di questa sufficienza che si andrà in sulle traccie.

Le condizioni necessarie per l'eguaglianza di più triangoli eguali essendo, come si è visto, le medesime di quelle necessarie per l'eguaglianza di due soli triangoli: del pari le condizioni necessarie per la similitudine di più triangoli simili sono le medesime di quelle necessarie per la similitudine di due triangoli. Ciò posto, a determinare questa sufficienza d'elementi per la similitudine di due triangoli, si suppongano due triangoli qualsiansi, e vedansi mano mano con diverse supposizioni, come debbano essere tra loro gli elementi della medesima specie, affinchè essi possano avere gli angoli e i lati proporzionali, essere cioè simili.

Supponendo da bel principio di avere due triangoli A B C, B D E (Fig. 34), i quali siano disposti nel modo che chiaro apparisce dalla figura, cioè il lato B D del triangolo B D E sul prolungamento del lato A B, ed in modo che vengano ad avere comune il vertice B, egli sarà dato di vedere, che se si prolungano i due lati D E, A C sino al loro incontro nel punto F, ove fosse l'angolo D = C B A, il lato B C non potrebbe a meno di essere parallelo a D F, e medesimamente ove fosse l'angolo E B D = A non potrebbe A F a meno di essere parallelo a B E; epperciò in queste due supposizioni la figura C B E F un parallelogramma, e conseguentemente i lati opposti eguali, cioè C F = B E, F E = C B.

Ora, ponendo mente che nel triangolo D A F, ove D F sia parallelo a B C, i due lati F A, D A sarebbero da questa retta divisi in parti proporzionali, e quindi avrebbe luogo la proporzione

$$AD : AB :: AF : AC :: DF : BC$$

che divisa darebbe

$$AD - AB : AB :: AF - AC : AC :: DF - BC : BC$$

e nella quale per essere $AD - AB = BD$, $AF - AC = CF = BE$, $DF - BC = DF - FE = DE$, colla sostituzione verrebbesi a ricavare la proporzione

$$BD : AB :: BE : AC :: DE : BC;$$

che dinota la proporzionalità esistente nei due triangoli fra i lati che stanno opposti ad angoli eguali. Laonde, poichè supponendo che i due triangoli ABC, BDE avessero i due angoli eguali $D = ABC$, $A = EBD$, supposizione dalla quale sarebbe pure il terzo angolo $C = E$, perchè la somma dei tre angoli di un triangolo essendo costantemente eguale a due retti, il terzo angolo dei due triangoli è la differenza fra 180° e la somma degli altri due; si è visto che essi avrebbero i lati opposti a questi angoli, cioè omologhi, proporzionali, e quindi per tale fatto i due triangoli sarebbero simili, è dato di dire: *due triangoli che abbiano due angoli rispettivamente eguali ciascuno a ciascuno, oppure che siano equiangoli tra loro, essi sono simili.*

Mentre quindi l'eguaglianza rispettiva di due angoli non basta a stabilire l'eguaglianza di due triangoli, essa è sufficiente per stabilirne la similitudine. Cosicchè, mentre tre devono essere gli elementi eguali in due triangoli perchè l'eguaglianza di questi abbia luogo, pel caso considerato sono sufficienti uno di meno, vale a dire due, perchè possa avere luogo la similitudine. Resta quindi a vedere se qualunque siano detti due elementi, angolare l'uno, rettilineo l'altro, oppure entrambi rettilinei, la similitudine possa sempre aver luogo.

Per ciò se si suppongono in seguito due triangoli ABC, DEF (Fig. 35) che abbiano un solo angolo eguale $C = E$, però compreso fra lati proporzionali, cioè tali che formano la proporzione

$$CA : FD :: CB : FE,$$

egli si presenterà evidente, ove si immagini sovrapposto il triangolo DEF sul triangolo ABC, in modo che il vertice F venga

a coincidere col vertice C ed il lato F D venga a posare sul lato C A, che per essere l'angolo F = C, il lato F E verrà a posare sul lato C B, il punto D a cadere in un punto D' ad una distanza C D' = F D, il punto E a cadere in un punto E' ad una distanza C E' = F E, ed infine il lato D E a coincidere colla retta D' E', ed il triangolo F D E a coincidere col triangolo C D' E', epperciò l'angolo C E' D' = F E D, l'angolo C D' E' = F D E. Ora, per essere

C A : F D :: C B : F E

e quindi l'eguale

C A : C D' :: C B : C E'

la retta D' E' non può essere altrimenti che una parallela al lato A B, e come tale gli angoli C B A, C A B, sono corrispondenti cogli angoli C E' D', C D' E', e quindi a questi eguali, ed eguali perciò agli angoli E e D.

I due triangoli A B C, D E F, avendo così i tre angoli eguali, essi sono simili, per quanto fu dimostrato e stabilito al caso precedente, sicchè avranno il terzo lato pure proporzionale, la qual cosa rendesi di poi evidente, perchè dalla retta D' E', parallela alla A B, ha luogo la proporzione

C A : C D' :: C B : C E' :: A B : D' E'

cioè la proporzionalità rispettiva fra tutti i lati dei due triangoli. Resterà perciò dimostrato che *due triangoli che abbiano un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, essi sono simili.* Cosicchè conosciuti qui ancora due elementi, che sono l'uno un angolo, l'altro il rapporto fra i due lati che lo comprendono, è determinata la similitudine di due triangoli.

Non resta più quindi che di esaminare il caso che le due condizioni si riferiscano intieramente agli elementi rettilinei.

Supponendo per ciò il caso di due triangoli A B C, D E F (Tav. XXII, Fig. 36), che abbiano i lati proporzionali, cioè che siano tali che esista fra essi la proporzione

A B : D E :: A C : D F :: B C : E F

egli sarà dato di vedere, se immaginasi nel vertice D del triangolo D E F formato un angolo E D G = A, e nel punto E un angolo D E G = B, che il triangolo risultante D E G sarà simile al triangolo A B C, e conseguentemente a questa similitudine, che sarà

A B : D E :: A C : D G :: B C : G E.

Ora, poichè si ha

A B : D E :: A C : D F :: B C : E F,

questa ultima proporzione forma colla precedente una serie di rapporti eguali, sicchè è D G = D F, E G = E F, ed il triangolo D E F avendo i lati eguali col triangolo D E G simile al triangolo A B C, è a sua volta pure simile col triangolo A B C, e conseguentemente a questa similitudine l'angolo D = A, l'angolo E = B, l'angolo F = C. Laonde *due triangoli che abbiano i lati proporzionali sono simili.*

La similitudine perciò di due triangoli sarà determinata colla conoscenza dei due rapporti che corrono fra un lato e gli altri due lati. Può dirsi perciò in generale, che la sufficienza d'elementi per la similitudine di due triangoli è due.

Due triangoli però possono anche essere simili per reciproca disposizione dei lati, vale a dire per essere i lati di uno paralleli ai lati dell' altro, o per essere i lati di uno perpendicolari ai lati dell' altro.

Considerando il caso di due triangoli A B C, D E F (Fig. 37), che abbiano i lati rispettivamente paralleli, cioè il lato D E parallelo ad A B, il lato D F parallelo ad A C, il lato E F parallelo a B C, egli è assai facile di vedere, come se si prolungano i due lati F D, F E sino a che vengano ad incontrare il lato A B nei punti G ed H, che per essere G F parallelo A C, H F parallelo B C, l'angolo F è corrispondente coll' angolo C epperciò a questo eguale, e medesimamente è l' angolo H G F = A, l'angolo G H F = B perchè corrispondenti, ed a motivo del lato D E parallelo ad A B l' angolo H G F = E D F, G H F = D E F perchè pure corrispondenti; laonde l'angolo A = D, l' angolo B = E. Ed il triangolo

D E F essendo col triangolo A B C equiangolo, è a questo simile, per cui *due triangoli che abbiano i lati paralleli sono simili.*

Considerando l'altro caso, quello cioè di due triangoli A B C, D E F (Fig. 38), i quali abbiano i lati rispettivamente perpendicolari, egli è dato di vedere, che se si prolungano i lati del triangolo D E F sino all'incontro dei lati del triangolo A B C nei punti G, H, L, si vengono così a formare tre quadrilateri A G D L, B G F H, C H E L, ognuno dei quali ha due angoli opposti che sono retti ed originati dalla perpendicolarità dei lati dei due triangoli, e per conseguenza la somma degli altri due opposti dovendo essere eguale a due angoli retti, sieno gli altri due angoli l'uno supplementario dell'altro, cioè l'angolo L D G supplemento dell'angolo A, l'angolo L E H supplemento dell'angolo C, l'angolo H F G supplemento dell'angolo B. Ma poichè l'angolo E D F è il supplemento dell'angolo L D G, l'angolo D E F il supplemento dell'angolo L E H, l'angolo D F E il supplemento dell'angolo H F G, così è l'angolo A = D, l'angolo C = E, l'angolo B = E, ed i due triangoli A B C, D E F essendo equiangoli tra loro, sono simili. Onde *due triangoli che abbiano i lati rispettivamente perpendicolari sono simili.*

Se bene si considerano queste due posizioni che possono avere i lati di due triangoli, è assai facile di vedere come siffatte posizioni in conclusione non siano altro che la formazione dei due elementi eguali che debbono avere due triangoli per essere simili.

Due triangoli per essere simili dovendo o essere equiangoli, oppure avere un angolo eguale compreso fra lati proporzionali, oppure tutti i lati o proporzionali, o paralleli, o perpendicolari, dovendo avere cioè due elementi eguali, come sarebbero due angoli, od un angolo ed il rapporto fra due lati, od i due rapporti coi lati, ed ogni poligono essendo scomponibile mediante diagonali condotte da un vertice, come è stato detto a pag. 52, in $n - 2$ triangoli, ne avviene che la similitudine di due poligoni o figure, sarà determinata coll'eguaglianza di $2(n - 2)$ ossia $2n - 4$ elementi. E diciamo qui pure della similitudine di due figure anco curvilinee, mantenendo sempre l'indipendenza per i lati curvilinei. Mentre quindi nelle figure eguali esistono rispetto ai triangoli in cui sono scomponibili degli elementi comuni, nelle figure simili non esistono, essendo gli elementi in queste, solo rapporti, ep-

perciò quantità eguali solo nel rapporto di misura. Se si paragona poi detta formola con quella degli elementi necessari per l'eguaglianza di due figure, vedesi come appunto essa non differisca che di un solo elemento, lo che prova perfettamente che due figure simili ove abbiano ancora un elemento eguale, esse sono eguali.

Adunque *la sufficienza d'elementi per la similitudine di due figure è espressa dal doppio del numero dei lati diminuito di quattro.*

Essendosi detto la costruzione di un poligono simile ad un altro farsi colla costruzione di tanti triangoli simili, vedesi ora tosto, come la costruzione di un triangolo simile ad un altro possa effettuarsi in più modi, bastando sapere costrurre un angolo eguale ad un altro, ed il sapere tracciare delle linee proporzionali. E poichè in generale allorquando trattasi di costrurre una figura simile ad un'altra, è dato un lato omologo, ovvero il rapporto lineare delle figure, così il quesito delle linee proporzionali è ridotto al quesito che ha la sua risoluzione nei problemi che vanno annessi a questo libro terzo.

Rapporto fra le aree delle figure simili. — Mentre che il rapporto corrente fra le aree di più figure qualsiansi è l'identico fra quello corrente nei numeri che le esprimono, nelle figure simili un tale rapporto è legato cogli elementi che le determinano. Il rapporto corrente fra più figure essendo deduttibile colla conoscenza del modo di determinare il rapporto fra due sole di esse, poichè conosciuto il rapporto di una, con una a una di tutte le altre figure, si possono avere una serie di proporzioni che abbiano eguali gli antecedenti, epperciò i conseguenti formanti proporzione, ed in questa avere il voluto rapporto; così la determinazione del rapporto fra le aree delle figure simili sarà fatto nello stesso modo stato atteso pelle figure qualsiansi, vale a dire sarà fatto colla determinazione di quello corrente fra due sole figure; e per stabilire il rapporto corrente fra due figure simili, si terrà la medesima via percorsa pella determinazione del rapporto di due figure qualsiansi, vale a dire partendo dalla più semplice di tutte, il triangolo.

Considerando due triangoli A B C, D E F (Fig. 39) che sieno simili, egli è dato di vedere, come essendo i lati e le linee omologhe proporzionali tra loro, abbiano luogo le due proporzioni

$$CG:FH :: AB:DE :: AC:FD :: CB:FE$$
$$AB:DE :: AB:DE :: AC:FD :: CB:FE$$

che reciprocamente moltiplicate termine a termine, danno

$$AB \times CG : DE \times FH :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{FD}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{FE}^2$$

e nella quale eguaglianza di rapporti, potendo senza alterazione dividere i due primi termini per la medesima quantità, viene a risultare

$$\frac{AB \times CG}{2} : \frac{DE \times FH}{2} :: \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{FD}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{FE}^2.$$

I due primi termini essendo le espressioni delle aree dei triangoli, risulta quindi come *le aree di due triangoli simili sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi;* da cui per le premesse considerazioni, il teorema: *le aree dei triangoli simili sono nel rapporto dei quadrati dei rispettivi lati omologhi.*

Ora, due figure simili essendo scomponibili in un egual numero di triangoli simili e similmente disposti, indipendentemente da quei lati che possono essere curvilinei, ne avviene, che se chiamansi con A, B, C, D quattro triangoli in cui è scomponibile un poligono, e con E, F, G, H altri quattro triangoli simili ai primi in cui è scomponibile un altro poligono simile al primo, che se chiamasi con a un lato del triangolo A, con b un lato di quello B, con c un lato di quello C, con d un lato di quello D, e con e, f, g, h gli omologhi di a, b, c, d; come sia possibile la formazione di una serie di proporzioni, tante quanti sono i triangoli in cui ognuna delle figure è stata scomposta, cioè

$$A : E :: a^2 : e^2,\ B : F :: b^2 : f^2,\ C : G :: c^2 : g^2,\ D : H :: d^2 : h^2.$$

Ma le due intiere figure essendo simili, epperciò avendo luogo la proporzione

$$a : e :: b : f :: c : g :: d : h$$

e quindi la quadrata

$$a^2 : e^2 :: b^2 : f^2 :: c^2 : g^2 :: d^2 : h^2$$

ne consegue, le prime quattro proporzioni non sono altro che una serie di rapporti eguali, e perciò è

$$A : B : C : D :: E : F : G : H$$

da cui componendo ricavasi

$$A + B + C + D : E + F + G + H ::$$
$$A : E :: B : F :: C : G :: D : H$$

e per le quattro proporzioni sopra stabilite in principio, hassi

$$A + B + C + D : E + F + G + H ::$$
$$a^2 : e^2 :: b^2 : f^2 :: c^2 : g^2 :: d^2 : h^2.$$

Ed essendo i due primi termini di questo primo rapporto le aree delle due figure considerate, vedesi prendere origine il teorema: *Le aree di due figure simili sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi;* e conseguentemente alla premessa fatta a questo capitolo: *Le aree delle figure simili sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi, epperciò ancora delle linee omologhe.*

La verità di questo teorema, era di già resasi evidente allora-quando si trattò a pag. 201 della relazione delle aree di due quadrati coi lati. È dato quindi ora di aggiungere, che tutti i poligoni regolari di un eguale numero di lati essendo simili, le aree di essi sono proporzionali ai quadrati tanto del lato, quanto dell'apotema, quanto del raggio del circolo circoscritto; e medesimamente che essendo tutti i circoli simili tra loro, le aree dei circoli sono proporzionali ai quadrati dei raggi e dei diametri, essendo tutti i raggi e tutti i diametri delle rette omologhe.

Se ora supponesi, che in un circolo di centro O (Fig. 40) per un punto P nel suo interno si conducano tante rette P A, P E, P H, P D, P L, P B, P F, P G, P C, P I alla circonferenza, e poscia tutte queste rette si dividano per metà, nei punti S, T, V, X, U, Z, K, N, R, Q, tutti questi punti apparterranno alla circonferenza di un circolo, di raggio la metà del raggio del circolo O, e la cui area è la quarta parte di quello del circolo di centro O.

Infatti è evidente, che se avvece del circolo di centro O si fosse trattato di un poligono i cui vertici fossero stati i punti A, E, H D ecc., naturalmente, l'altro poligono che si sarebbe conseguito unendo consecutivamente i punti di mezzo delle diverse rette tracciate dal punto P a quei vertici, per risultare di un eguale numero di triangoli simili e similmente disposti, sarebbe stato al medesimo simile. Ora, poichè immaginando che le rette tirate dal punto P alla circonferenza fossero infinite e di più qualsiansi, i punti di mezzo di tutte queste rette somministrerebbero sempre un poligono simile a tutti quelli, che nel circolo di centro O cogli estremi delle medesime sarebbe possibile di inscrivere, così, i punti di mezzo di tutte indistintamente quelle rette non possono a meno di appartenere ad una medesima circonferenza; onde: *il luogo geometrico dei punti di mezzo delle rette tirate da un punto interno di un circolo alla circonferenza, è una circonferenza di circolo.* Le linee omologhe in quei circoli essendo poi nel rapporto 1 : 2, e le superficie di quei circoli stando nel rapporto dei quadrati dei raggi, è così, che la superficie del circolo di centro O è quattro volte più grande del circolo ottenuto, come si era detto.

Le superficie dei circoli stando nel rapporto dei quadrati dei rispettivi raggi, rendesi evidente il divario, che corre fra due circoli che l'uno sia in area la metà dell'altro, e due circoli che l'uno sia in raggio la metà dell'altro. Considerando due circoli di raggio r, R, che sieno in area l'uno la metà dell'altro, i quadrati dei ragggi stando nel medesimo rapporto, ha luogo la proporzione $2 : 1 :: R^2 : r^2$, da cui deducesi, $r^2 = \frac{R^2}{2}$ e quindi $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Cosicchè mentre nel primo caso i raggi stanno nel rapporto di $1 : \sqrt{\frac{1}{2}}$, nel secondo le aree stanno come $4 : 1$.

Due triangoli essendo simili quando hanno due angoli eguali ciascuno a ciascuno, e le aree di due triangoli simili stando nel rapporto dei quadrati dei lati omologhi, vedasi ora per ultimo, come stieno tra loro le aree di due triangoli i quali abbiano un solo angolo eguale. E per ciò siano A C B, E C D (Fig. 41) due triangoli i quali abbiano un angolo eguale, l'angolo A C B $=$ E C D. Se a questi triangoli si darà la disposizione che apparisce dalla figura, cioè si dispongono in modo che gli angoli eguali siano opposti al

vertice, egli sarà facile di vedere come tirando una retta B D, risultino i due triangoli E C D, C D B, che hanno una medesima altezza siccome aventi il vertice nello stesso punto D e la base dell'uno sul prolungamento della base dell'altro; medesimamente risultino i due triangoli A C B, B C D, i quali pure hanno medesima altezza siccome aventi il vertice nello stesso punto B e la base dell'uno sul prolungamento della base dell'altro. Le condizioni quindi in cui si trovano due a due i detti triangoli, sono tali da potere dare luogo alle due proporzioni

$$ECD : DCB :: EC : CB$$

$$DCB : ACB :: DC : AC$$

le quali moltiplicate termine a termine danno la proporzione

$$ECD \times DCB : DCB \times ACB :: EC \times DC : CB \times AC$$

i due primi termini della quale essendo divisibili pella quantità comune D C B, essa riducesi ad

$$ECD : ACB :: EC \times DC : CB \times AC$$

cioè: *le aree di due triangoli aventi un angolo eguale, stanno tra loro nel rapporto composto dei lati che comprendono l'angolo eguale.*

Premesse così le proprietà ed i rapporti delle figure simili, più non resta di vedere, come si era detto fin dal principio, che la loro applicazione congiunta ai principj già conosciuti pella deduzione di nuove proprietà geometriche. E poichè le figure che più di tutte riassumono la geometria sono il triangolo ed il circolo, così si prenderanno separatamente ciascuna di queste due figure, e si esamineranno le proprietà o per meglio dire le relazioni che possono correre in essa, con delle rette nelle medesime diversamente tracciate.

Relazione fra i segmenti dei lati di un triangolo. — Le relazioni che possono correre fra una retta ed un triangolo dipendendo dalla posizione della retta, e la posizione di questa essendo determinata dai punti d'intersezione coi lati del triangolo, i quali alla loro volta dividono i lati stessi in parti o segmenti, è per tal

modo che le relazioni fra una retta ed un triangolo sono quelle dei segmenti formati da questa su quello. Si considererà perciò, dapprima il caso generale di una retta che non passi per nessun vertice, e non sia parallela a nessun lato, essendochè di questa se ne conosce di già la proprietà, ed in seguito si considereranno alcuni casi speciali di rette che passino per un vertice.

Una secante o trasversale ad un triangolo, per essere trasversale ha duopo di tagliare tutti indistintamente i tre lati, essa non è perciò parallela ad alcuno dei lati. — In qualunque punto che i lati di un triangolo siano tagliati da una trasversale, venendo da questa sempre formati due segmenti consecutivi che contansi dal punto d'intersezione della trasversale agli estremi o vertici del rispettivo lato, restano così formati da una trasversale in un triangolo, sei segmenti. Ciò posto, essendo A B C un triangolo (Fig. 42) ed F E una trasversale, i sei segmenti saranno F A, F C, E B, E C, D A, D B. Se ora immaginasi condotta dal vertice B una parallela al lato A C, viene a risultare l'angolo B G E = C F E siccome alterni interni, e viene altresì a risultare l'angolo D B G = D A F, l'angolo B G D = A F D siccome corrispondenti.

I triangoli E G B, F C E, avendo un angolo opposto al vertice eguale, l'angolo E G B = C F E, sono simili, e conseguentemente a questa similitudine, la proporzionalità nei lati espressa da

$$E B : E C :: B G : F C.$$

Medesimamente i triangoli D A F, D B G, avendo l'angolo in D comune, e gli angoli D B G = A, sono simili, quindi danno luogo alla proporzione

$$D A : D B :: A F : B G.$$

Questa proporzione e la precedente moltiplicate termine a termine danno

$$E B \times D A : E C \times D B :: B G \times A F : F C \times B G$$

la cui seconda ragione è divisibile pella quantità comune B G, ne avviene essere

$$E B \times D A : E C \times D B :: A F : F C$$

proporzione che può venire messa nella forma $\frac{E\,B \times D\,A}{E\,C \times D\,B} = \frac{A\,F}{F\,C}$, la quale espressione dapprima moltiplicata per F C e poscia divisa per A F, riducesi all'espressione equivalente $\frac{E\,B \times D\,A \times F\,C}{E\,C \times D\,B \times A\,F} = 1$, ovvero $E\,B \times D\,A \times F\,C = E\,C \times D\,B \times A\,F$. Se si bada che la quantità $E\,B \times D\,A \times F\,C$ è il prodotto di tre segmenti non consecutivi formati dalla trasversale, e che $E\,C \times D\,B \times A\,F$ è il prodotto degli altri tre segmenti, scorgesi ben tosto potersi enunciare il teorema seguente: *La trasversale in un triangolo forma sei segmenti, dei quali il prodotto di tre non consecutivi eguaglia il prodotto degli altri tre.*

Cosicchè ove si sapesse che ad esempio la trasversale F D taglia il lato C B ad $\frac{1}{3}$ dal vertice B, ed il lato A C a $\frac{3}{5}$ dal vertice A, sarà assai facile mercè l'espressione trovata di rinvenire in qual rapporto sarà tagliato il terzo lato, essendochè non si avranno a fare che delle debite sostituzioni, per ottenere così $\frac{1}{2} \times \frac{D\,A}{D\,B} \times \frac{2}{3} = 1$, da cui $\frac{2\,D\,A}{6\,D\,B} = 1$, ossia $2\,D\,A = 6\,D\,B$, e quindi $D\,A = 3\,D\,B$, cioè la trasversale supposta incontrerà il lato A B nel suo prolungamento ad una distanza $B\,D = \frac{A\,B}{2}$.

La relazione che corre fra il prodotto dei segmenti non consecutivi formati da una trasversale in un triangolo stata trovata dal Geometra Menelao, giova altresì a conoscere il rapporto in cui vengono tagliati i lati di un poligono da una trasversale, della quale siano cogniti due punti.

Ad esempio essendo l'esagono regolare A B C D E F (Fig. 43), che venga tagliato da una trasversale che passi pel punto P situato a metà del lato D C, e pel punto Q, situato ad una distanza $E\,Q = \frac{3}{20}\,E\,D$, è agevole anzitutto il vedere che la detta trasversale taglierà ancora tutti gli altri lati, cioè il lato F E in R, il lato A F in I, il lato A B in H, ed il lato B C in L.

Ora, siccome prolungando i due lati F E, C D del poligono sino al loro incontro in G, formasi un triangolo E D G che è equilatero pella ragione speciale, che il poligono A B C D E F essendo un

esagono regolare, ogni angolo al perimetro è di 120°, e conseguentemente sono di 60° i due angoli E D G, D E G; così considerando questo triangolo siccome tagliato dalla trasversale in questione, a mezzo della nota relazione corrente fra il prodotto dei segmenti non consecutivi, si avrà

$$\frac{R\,G \times P\,D \times Q\,E}{R\,E \times P\,G \times Q\,D} = 1$$

a cui sostituendo le quantità cognite, ricavasi

$$\frac{R\,G}{R\,E} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{17} = 1$$

ossia 3 R G = 51 R E, ed $R\,E = \frac{3\,R\,G}{51}$; e per essere E G = E F, così si dirà, che la trasversale incontrerà il lato F E in un punto R ad una distanza $R\,E = \frac{3}{54}$, ossia $\frac{1}{18}$ F E.

Medesimamente, se prolungansi i due lati D E, A F del poligono sino al loro incontro in O, formasi in tal guisa un altro triangolo equilatero E O F, che considerato come tagliato dalla trasversale H I, dà luogo ad essere

$$\frac{I\,F \times R\,E \times Q\,O}{I\,O \times R\,F \times Q\,E} = 1$$

e colla sostituzione dei valori, $\frac{I\,F}{I\,O} \times \frac{3}{57} \times \frac{23}{3} = 1$, ossia 69 I F = 171 I O, ma poichè I F = I O + O F, così si avrà

$$I\,O = \frac{69\,O\,F}{102},$$

cioè la trasversale H I incontrerà il lato A F del poligono sul suo prolungamento, ed in un punto I ad una distanza $I\,F = \frac{57}{34}$ A F.

Prolungando poi i lati B C, E D sino al loro incontro in N, ri-

sulterà il triangolo equilatero D N C, che considerato tagliato dalla trasversale, fornisce l' espressione

$$\frac{LN}{LC} \times \frac{PC}{PD} \times \frac{QD}{QN} = 1$$

che colla sostituzione ottiensi

$$\frac{LN}{LC} \times 1 \times \frac{17}{37} = 1$$

d'onde poi ricavasi, che la trasversale incontrerà il lato B C in un punto L, collocato ad una distanza $LC = \frac{17}{54} BC$.

Infine, col prolungamento dei lati A B, D C si otterrà del pari un altro triangolo B S C equilatero, che considerato come tagliato sempre dalla solita trasversale, darà

$$\frac{HB \times PS \times LC}{HS \times PC \times LB} = 1$$

e colla sostituzione

$$\frac{HB}{HS} \times \frac{3}{1} \times \frac{17}{71} = 1$$

da cui deducesi, che la trasversale incontrerà l'ultimo lato A B in un punto H ad una distanza $HB = \frac{71}{20} AB$, come poi è dato di riscontrare sulla figura.

Il teorema Menelao vale ancora a dimostrare un'altra relazione composta, che corre fra i segmenti dei lati di un triangolo, formato con rette che partendo dai vertici si incontrino in un sol punto. Infatti se in un triangolo A B C (Fig 44) dai vertici si conducono tre rette C D, A E, B F, che abbiano ad incontrarsi in un sol punto P, è dato di vedere, come considerando dapprima il triangolo D B C siccome tagliato dalla trasversale A E, venga fuori l'eguaglianza

$$PC \times EB \times AD = PD \times EC \times AB$$

e come considerando poscia il triangolo A D C siccome tagliato dalla trasversale B F, sorga l'altra eguaglianza

$$PD \times FC \times BA = PC \times FA \times BD$$

la quale moltiplicata termine a termine colla precedente, somministra l' eguaglianza

$$PC \times PD \times EB \times FC \times AD \times BA =$$
$$PD \times PC \times EC \times FA \times AB \times BD$$

che divisa per i fattori comuni, riducesi a

$$EB \times FC \times AD = EC \times FA \times BD$$

nella quale essendo E B, F C, A D tre segmenti non consecutivi, ed E C, F A, B D gli altri tre, puossi enunciare la proposizione seguente: *in ogni triangolo tre rette che passando pei vertici si incontrino in un sol punto formano sui lati di esso sei segmenti, dei quali il prodotto di tre non consecutivi, eguaglia il prodotto degli altri tre.*

Se si ha un triangolo A B C (Fig. 45), e che in esso si conduca la bisettrice dell' angolo C, egli sarà dato di vedere, come pel vertice A conducendo una parallela alla medesima sino all' incontro E col lato B C prolungato, risultino due triangoli A B E, D B C, che per avere l' angolo B comune, l' angolo C D B = E A B siccome corrispondenti, sono simili, e conseguentemente a questa similitudine abbia luogo la proporzione

$$AB : DB :: BE : BC$$

che divisa dà

$$AB - DB : DB :: BE - BC : BC$$

ossia

$$AD : DB :: EC : BC.$$

Ma se osservasi che per essere l' angolo D C B = D C A a causa della bisettrice, l'angolo D C A = C A E siccome alterni interni, e

l'angolo A E C = D C B siccome corrispondenti, sia l'angolo A E C = E A C, e per conseguenza il triangolo A E C isoscele, si comprenderà ben tosto essere C E = C A, cosicchè sostituendo a C E il suo eguale C A nella proporzione a cui si è pervenuti, ottengasi A D : D B :: A C : B C, vale a dire: *i segmenti formati dalla bisettrice di un angolo in un triangolo sul lato opposto sono proporzionali ai lati a questa adiacenti.*

Questa proprietà della bisettrice di un angolo di un triangolo di dividere il lato opposto in parti proporzionali ai lati adiacenti, congiunta al teorema pittagorico, fornisce il mezzo di determinare un' altra relazione che corre fra essa, i lati ed i segmenti da essa formati.

Essendo adunque C D la bisettrice dell' angolo C del triangolo A B C, se dal punto D si abbassano due perpendicolari D G, D F, queste perpendicolari daranno luogo a quattro triangoli rettangoli F C D, D C G, A F D, D G B, dei quali i due primi saranno eguali come aventi l' ipotenusa comune e l'angolo D C F = D C G, sicchè D F = D G, C F = C G; ma daranno tuttavia coll'applicazione del teorema pittagorico, le seguenti eguaglianze

$$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FD}^2$$

$$\overline{FD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AF}^2$$

$$\overline{DG}^2 = \overline{DF}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{GB}^2$$

e facendo le debite sostituzioni

(1) $$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{AF}^2$$

(2) $$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{DB}^2 - \overline{GB}^2$$

ma essendo

$$AF = CA - CF,\ GB = CB - CF$$

e quindi

$$\overline{AF}^2 = \overline{CA}^2 - 2\,CA \times CF + \overline{CF}^2$$

$$\overline{GB}^2 = \overline{CB}^2 - 2\,CB\,.\,CF + \overline{CF}^2$$

così colla sostituzione nelle eguaglianze (1), (2), ricavasi

$$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{AD}^2 - \overline{CA}^2 + 2\,CA \times CF - \overline{CF}^2$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{DB}^2 - \overline{CB}^2 + 2\,CB\,.\,CF - \overline{CF}^2$$

e dietro riduzione

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{CA}^2 + 2\,CA\,.\,CF$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{CB}^2 + 2\,CB\,.\,CF$$

da ognuna delle quali eguaglianze, ricavando i valori di C F ed eguagliandoli, si ricava

$$\frac{\overline{CD}^2 - \overline{AD}^2 + \overline{CA}^2}{2\,CA} = \frac{\overline{CD}^2 - \overline{DB}^2 + \overline{CB}^2}{2\,CB}$$

in cui riducendo tutte le eguaglianze ad un medesimo denominatore, e poscia moltiplicando pel denominatore comune e riordinando per rispetto a $\overline{CD}^2$, viensi a ricavare

$$\overline{CD}^2 = \frac{\overline{CB}^2.\,CA - \overline{CA}^2.\,CB - \overline{DB}^2.\,CA + \overline{AD}^2.\,CB}{CB - CA}$$

che potendo venire messa sotto la forma

$$\overline{CD}^2 = \frac{CB\,.\,CA\,(CB - CA)}{CB - CA} - \frac{\overline{DB}^2.\,CA + \overline{AD}^2.\,CB}{CB - CA}$$

riducesi a

$$\overline{CD}^2 = CB \, . \, CA - \frac{\overline{DB}^2 \, . \, CA + \overline{AD}^2 \, . \, CB}{CB - CA}.$$

Ora la bisettrice C D originando per la proprietà poc'anzi dimostrata la proporzione

$$AD : DB :: AC : CB$$

e quindi l'eguaglianza $DB \times AC = AD \times CB$, che intieramente moltiplicata per A D convertesi in $DB \times AC \times AD = \overline{AD}^2 \times CB$, si avrà con opportuna sostituzione nella espressione a cui erasi pervenuti che

$$\overline{CD}^2 = CB \, . \, CA - \frac{\overline{DB}^2 . CA + DB \, . \, AC \, . \, AD}{(DB \times AC - CA \times AD) . AD}$$

ossia

$$CD^2 = CB \, . \, CA - \frac{DB^2 . CA . AD + DB . AC . AD^2}{DB \, . \, AC - AC \, . \, AD}$$

che semplificata riducesi a

$$CD^2 = CB \, . \, CA - \frac{DB^2 . \, AD + DB \, . \, \overline{AD}^2}{DB - AD}.$$

Quest'ultima espressione potendo venire ad essere messa sotto la forma

$$CD^2 = CB \, . \, CA - \frac{DB . AD \, (DB - AD)}{DB - AD}$$

rendesi riduttibile questa, nella semplice eguaglianza $\overline{CD}^2 = CB \, . \, CA - DB \, . \, AD$, che dimostra ad evidenza come: *In ogni qualunque triangolo, il quadrato della bisettrice è eguale al rettangolo dei lati che la comprendono meno il rettangolo dei segmenti da questa formati.*

La verità di questa proposizione sarà dimostrata col solo concorso di considerazioni geometriche dopo premesse altre proprietà.

Intanto essendo A B C (Fig. 46) un triangolo rettangolo, se dal vertice A dell'angolo retto si abbassa una perpendicolare sulla ipo-

tenusa, presentasi evidente come questa perpendicolare scomponga il triangolo A B C in due triangoli rettangoli A D C, A D B. Se ora ciascuno di questi triangoli rettangoli si paragona coll'intiero triangolo A B C, si presenterà del pari evidente che per essere entrambi rettangoli, cioè avere un angolo retto, e per avere un angolo comune, essi sieno simili. Ma poichè due figure simili ad una terza sono simili tra di loro, così ne avviene che i due triangoli A D B, A D C saranno tra loro simili. Del resto egli è sufficiente di osservare che il triangolo A D C ha l'angolo D A C che è supplemento di un angolo retto, per vedervi che abbia ad essere non altrimenti che l'angolo C = D A B, e conseguentemente l'angolo C A D = B.

I tre triangoli A B C, A D C, A D B essendo tra loro simili, costituiscono le proporzioni seguenti: quella C B : C A :: C A : C D :: A B : A D dal confronto dei triangoli A B C, A D C; quella C B : A B :: A B : B D :: A C : A D dal confronto dei triangoli A B C, A D B; quella A C : A B :: D C : A D :: A D : D B dal confronto dei triangoli A D C, A D B.

Analizzando queste tre proporzioni vedesi come, dalla prima essendo C A medio proporzionale fra C B e C D, dalla seconda A B medio proporzionale fra C B e D B, dalla terza A D medio proporzionale fra D C e D B, si possono ritenere i due principj seguenti: 1.° *In ogni triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione fatta sull'ipotenusa;* 2.° *In ogni triangolo rettangolo l'altezza dell'ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti fatte sull'ipotenusa.*

E questi sono principj a cui fanno seguito molti problemi che appartengono a questo libro terzo.

Relazione fra le rette tirate in un circolo. — Tracciate due rette in un circolo le quali non sieno due corde parallele, esse possono avere la loro intersezione od internamente nel circolo ed essere due corde, od esternamente al circolo ed essere due secanti, od ancora essere l'una una corda od una secante, l'altra una tangente. Si considereranno perciò ciascuno di questi casi e si esamineranno le relazioni che possono correre fra queste diverse rette tirate nel circolo.

Essendo A B, C D (Tav. XXIII, Fig. 47) due corde tirate in un circolo e le quali si taglino nel punto P interno del circolo, si tirino le corde supplementarie A D, C B e si analizzino i due trian-

goli A P D, C P B che così vengono a risultare. Risulta che essi hanno avantitutto un angolo eguale opposto al vertice, inoltre hanno l'angolo A D C = A B C, perchè entrambi inscritti nella medesima circonferenza e misurati dalla metà di un medesimo arco, essi sono perciò simili, e come tali, i lati omologhi, quelli cioè opposti ad angoli eguali, sono proporzionali tra loro, onde A P : P C :: P D : P B; ma A P, P C, P D, P B essendo i segmenti delle due corde tracciate, è così dato potere enunciare la proposizione: *due corde condotte in un circolo se si tagliano, si tagliano in parti inversamente proporzionali.*

Esistendo la proporzione A P : P C :: P D : P B, vuol dire che esiste pure l'eguaglianza formata dal prodotto degli estremi e quello dei medi, cioè A P × P B = P C × P D. Ma poichè il prodotto di due rette può considerarsi siccome l'area di un rettangolo che abbia per lati quelle rette, così è dato di potere dire che: *sono equivalenti le aree dei rettangoli costrutti sulle parti di due corde che si taglino e condotte in un circolo.* Osservando però come avendo luogo tutte le seguenti eguaglianze A P × P B = C P × P D, A P × P B = P H × P G, A P × P B = P E × P F, il primo membro delle medesime è eguale, e per conseguenza ancora eguali tra loro abbiano ad essere tutti i secondi, è dato di rilevare come data una corda ed un punto su di essa, il rettangolo formato dalle due parti della medesima, sia equivalente con quello che può formarsi sulle parti di qualsiasi altra corda condotta per quel punto. Onde è che: *dato un circolo ed un punto, conducendo per questo una retta qualunque, il prodotto delle distanze da esso ai due punti in cui la retta taglia la circonferenza, rimane costante comunque cangi la posizione della retta passante per il punto dato.*

Questa proprietà che hanno le corde che si tagliano in un circolo è quella che porge mezzo ad una dimostrazione esclusivamente geometrica, del rapporto corrente fra i lati, la bisettrice ed i segmenti da questa formati in un triangolo. Essendo infatti I L R un triangolo in cui R P è la bisettrice, è agevole di vedere, come prolungando detta bisettrice sino in Q all'incontro colla circonferenza, e poscia tirando la corda Q L, si presentino due triangoli I P R, R Q L, i quali, per avere l'angolo I R P = Q R L stantechè R Q è bisettrice dell'angolo I R L, l'angolo R I P = R Q L perchè misurati dalla metà dello

stesso arco, sono simili, e conseguentemente a questa similitudine diano luogo alla proporzione

$$RP : RL :: IR : RQ$$

epperciò all' eguaglianza

$$RL \times IR = RP \times RQ$$

nella quale però, osservando che $RQ = RP + PQ$, riducesi immediatamente ad essere dopo la debita sostituzione

$$RL \times IR = RP\,(RP + PQ)$$

ossia

$$RL \times IR = \overline{RP}^2 + RP \times PQ.$$

E poichè dal rapporto in cui si tagliano due corde si ha la relazione

$$PL \times PI = PR \times PQ$$

così sostituendo al valore di $RL \times IR$, nel termine $RP \times PQ$, il suo eguale $PL \times PI$, si ricaverà

$$RL \times IR = RP^2 + PL \times PI$$

che è l'identica espressione di quella verità geometrica che coll'aiuto dell'algebra già venne dimostrata e che si riassume nell'*eguaglianza fra il rettangolo formato su due lati di un triangolo, colla somma del quadrato della bisettrice fra essi compresa ed il rettangolo formato dai segmenti del terzo lato creati dalla bisettrice.*

I rettangoli costrutti sulle parti di due o più corde che abbiano tra loro un punto comune, essendo equivalenti, egli è evidente che ove le parti di una corda siano eguali tra loro, si avrà che il quadrato formato con lato eguale a quella semicorda, sarà equivalente con tutti i rettangoli costrutti sulle parti di tutte le altre corde che avranno a comune il punto di mezzo di quella.

Resta quindi a vedere la posizione che avrà una corda, che sia per metà divisa da un dato punto. Supponendo perciò, che sia il

circolo di centro O (Fig. 48) il circolo dato, che sia E il punto dato pel quale debbasi tirare una corda che da questa sia divisa per metà, si immagini anzitutto condotto il diametro A B per tale punto, e per questo ancora condotta perpendicolarmente al tracciato diametro la corda A C. Egli ne avverrà che tirando i raggi O A, O C risulteranno due triangoli rettangoli A E O, O E C, eguali per avere un cateto O E comune, l'ipotenusa $OA = OC$ come raggi dello stesso circolo, epperciò è $EC = EA$, cioè la corda A C divisa per metà nel punto E, e quindi $\overline{AE}^2 = EB \times ED$. Se osservasi però che tirando le due corde A B, A D il triangolo A D B è rettangolo come avente l'angolo A inscritto in una semicirconferenza; se osservasi che AE è perpendicolare all'ipotenusa B D, per le proprietà del triangolo rettangolo state trovate col trattare le relazioni fra i segmenti dei lati di un triangolo, vedesi ben tosto come si possano stabilire le relazioni seguenti che corrono fra alcune rette tirate in un circolo; cioè 1.° *La semicorda in un circolo è media proporzionale fra i due segmenti del diametro formati dalla corda intiera a questo perpendicolare;* od in altra dicitura: *la distanza di un punto della circonferenza ad un diametro, è media proporzionale fra i segmenti fatti dalla proiezione del punto sul diametro.* 2.° *Ogni corda in un circolo è media proporzionale fra tutto il diametro e la proiezione di essa fatta su un diametro passante per un suo estremo.*

Considerate più rette corde che si taglino in un sol punto nell'interno di un circolo, vengasi al caso di più rette che si taglino esternamente al circolo. E nel cominciare si considerino due rette sole come P A, P B (Fig. 49) che si addimandano secanti al circolo O, e le quali tagliano la circonferenza, la prima nei punti C ed A, la seconda nei punti B e D. Egli è agevole di vedere, che se nel circolo si conducono le corde A D, B C, che queste danno origine a due triangoli A P D, B P C, i quali, per avere un angolo comune in P, l'angolo $PBC = PAD$ siccome misurati dalla metà dello stesso arco, sono simili, e conseguentemente a questa similitudine abbia luogo la proporzione $PA : PD :: PB : PC$, dalla quale chiaro apparisce come *due secanti tirate ad un circolo da uno stesso punto, sono inversamente proporzionali alle loro parti esterne.*

La proporzione $PA : PD :: PB : PC$ siccome corrisponde all'eguaglianza $PD \times PB = PA \times PC$, nella quale ciascun membro è il prodotto di due fattori che sono, una secante e la sua parte

esterna, è così dato dire che: *i rettangoli formati su di due secanti tirate da uno stesso punto ad un medesimo circolo, e le rispettive parti esterne, sono equivalenti.*

Ora, il prodotto di una secante per la sua parte esterna eguagliando quella di altra qualunque secante tirata da uno stesso punto ad un medesimo circolo, per la relativa parte esterna, è un siffatto prodotto costante per tutte le secanti condotte da un medesimo punto, cioè è sempre $PD \times PB = PC \times PA = PL \times PH = PI \times PE = PS \times PF = PN \times PG$. Onde: *Dato un circolo ed un punto fuori di esso, per questo conducendo una retta qualunque, il prodotto delle distanze da esso ai due punti secondo cui la retta taglia la circonferenza, rimane costante comunque cangi la posizione delle rette passanti per il punto dato.*

È evidente che ove la secante condotta da un punto ad una circonferenza riescisse ad essere eguale alla parte esterna, il quadrato di una tale secante sarebbe equivalente a tutti i rettangoli che si potrebbero formare con tutte le altre secanti e le rispettive parti esterne. Ma una secante allorquando è eguale alla sua parte esterna non è più una secante, bisogna che essa sia divenuta una tangente. Per conseguenza si veda con tutto il rigore geometrico, se la tangente goda ancora la proprietà della secante avente la parte interna eguale a zero. Così, essendo P B (Fig. 50) una secante al circolo di centro O, e P T una tangente al medesimo circolo, poichè se si tracciano le due corde T B, T A si vedranno risultare i due triangoli P T B, P T A, i quali, per avere l'angolo P comune, l'angolo $PTA = PBT$ perchè entrambi misurati dalla metà del medesimo arco, sono simili, e conseguentemente alla loro similitudine avere luogo la proporzione $PB : PT :: PT : PA$, così è resosi evidente come *la tangente tirata ad un circolo da un punto qualsiasi, è media proporzionale fra tutta la secante tirata dallo stesso punto e la sua parte esterna.*

La proporzione $PB : PT :: PT : PA$ somministrando l'eguaglianza $\overline{PT}^2 = PB \times PA$, ne deriva che per essere costante, come al caso precedente si è detto, il prodotto delle distanze di un punto, ai punti in cui una retta passante per esso taglia la circonferenza di un circolo, sarà sempre

$$\overline{PT}^2 = PB \times PA = PC \times PI = PD \times PG = PE \times PF.$$

Epperciò, *la relazione che corre fra le rette tirate in o ad un circolo da un sol punto, è quella di eguagliare nel prodotto delle distanze da esso ai due punti in cui incontrano la circonferenza.*

Esaminata la relazione corrente fra due rette, tali che il loro punto d'intersezione avvenga dentro o fuori di un circolo, resta ad esaminare quella in cui l'intersezione sia un punto della circonferenza. Considerando due corde tracciate in un dato circolo da un medesimo punto della circonferenza, due e distinte sono le posizioni che le medesime possono avere, esse possono cioè essere due corde qualsiansi, oppure un diametro ed una corda; in entrambi questi casi però, la relazione che fra le medesime vi può correre è quella degli archi che esse sottendono.

Di due corde qualsiansi, vale a dire, di due corde che sottendano due archi qualsiansi, la geometria elementare non occupandosi che del caso solo in cui l'arco sotteso da una, sia o doppio o metà dell'arco sotteso dall'altra, così della sola relazione di due cosiffatte corde si verrà qui trattando.

Supposto essere H L (Fig. 51) una corda qualsiasi data in un circolo di centro O, e supposto essere H D la corda che sottende un arco metà, e della quale se ne brami la relazione sua colla corda data e col raggio del circolo; conducasi, pel punto D il diametro D C, ed in seguito i due raggi O L, O H, che si renderà visibile come il raggio O D che divide per metà l'arco H D L, divide pure per metà l'angolo al centro H O L, e poichè la bisettrice O I dell'angolo al vertice del triangolo isoscele H O L, divide per metà la base ed è a questa perpendicolare, così è il diametro D C perpendicolare alla corda H L, nel suo punto di mezzo. Ora, essendo la corda D H, media proporzionale fra tutto il diametro D C e la proiezione D I della corda sul diametro, come fu dimostrato nelle relazioni precedenti, e come renderebbesi evidente col tirare la corda H C e col considerare il triangolo rettangolo D H C; ne segue la proporzione

$$DC : HD :: HD : DI$$

dalla quale ricavasi

$$\overline{HD}^2 = DC \times DI.$$

Ma essendo D I eguale al raggio O D — O I, ed O I cateto di un triangolo rettangolo H I O, nel quale l'ipotenusa O H è il raggio del circolo, il cateto I H è la semicorda H L conosciuta, in virtù del teorema pittagorico, si ha che

$$O\,I=\sqrt{\overline{O\,H}^2-\frac{\overline{H\,L}^2}{4}}$$

e quindi

$$D\,I=O\,D-\sqrt{\overline{O\,H}^2-\frac{\overline{H\,L}^2}{4}}$$

ed

$$\overline{H\,D}^2=D\,C\left(O\,D-\sqrt{\overline{O\,H}^2-\frac{\overline{L\,H}^2}{4}}\right)$$

Osservando poi che

$$D\,C=2\,O\,D,\quad O\,H=O\,D$$

vedesi tosto divenire

$$\overline{H\,D}^2=2\,O\,D\left(O\,D-\sqrt{\overline{O\,D}^2-\frac{\overline{H\,L}^2}{4}}\right)$$

e coll' esecuzione del prodotto

$$\overline{H\,D}^2=2\,\overline{O\,D}^2-2\,O\,D\sqrt{\overline{O\,D}^2-\frac{\overline{H\,L}^2}{4}}$$

e dietro riduzione

$$\overline{H\,D}^2=O\overline{2\,D}^2-O\,D\sqrt{4\,\overline{O\,D}^2-\overline{H\,L}^2}$$

da cui per ultimo

$$H\,D=\sqrt{2\,\overline{O\,D}^2-O\,D\sqrt{4\,\overline{O\,D}^2-\overline{H\,L}^2}}$$

il valore cioè della corda richiesta in funzione della corda conosciuta e del raggio del circolo. Per maggiore chiarezza, chiamando con R il raggio di un circolo, con C la corda conosciuta, con c quella che sottende un arco metà nello stesso circolo, è

$$c = \sqrt{2\,R^2 - R\sqrt{4\,R^2 - C^2}}.$$

In questa formola supponendo cognito c ed incognito C, si troverà

$$C = \frac{c}{R}\sqrt{4\,R^2 - c^2}$$

vale a dire, il valore di una corda C che sottende un arco doppio di quello sotteso dalla corda c.

Con queste formole essendo possibile trovare sempre il valore di una corda che sottenda un arco metà ed un arco doppio a quello sotteso da altra corda, è evidente: che ove sieno conosciuti i lati di un poligono inscritto ed il raggio del circolo, si potranno colla prima delle formole, computare i valori dei lati di un poligono di un doppio numero di lati ed a due a due eguali; ed ove sia conosciuto il valore dei lati di un poligono regolare inscritto ed il raggio, si possano colla prima, computare il lato del poligono regolare di un numero doppio di lati e conseguentemente il perimetro del medesimo, colla seconda, quello di un numero metà di lati e conseguentemente anche il perimetro dello stesso. Mentre però è sempre possibile dato un lato calcolare il lato del poligono inscritto in un circolo di doppio numero di lati, non è sempre possibile dato un lato calcolare quello di un poligono inscritto in un circolo e di metà numero di lati, poichè occorre che il numero dei lati sia un numero pari, ed inoltre un poligono per esistere non può averne meno di tre.

La conoscenza del lato di un poligono inscritto in un circolo e quella del raggio di quest' ultimo, determinano non solo le corde che sottendono archi doppi od archi metà, ma determinano ancora le apoteme di tutti i detti poligoni. Essendo infatti H L una corda qualsiasi tirata nel circolo di centro O e che rappresenti il lato di un poligono inscritto in quel circolo, egli è evidente che l'a-

potema O I o perpendicolare abbassata dal centro su detta corda o lato di poligono, mentre la divide per metà in I, forma coi raggi O H, O L due triangoli rettangoli O I H, O I L, ai quali applicando il teorema pittagorico, si viene ad avere

$$\overline{OI}^2 = \overline{OL}^2 - \overline{IL}^2$$

e poichè

$$IL = \frac{HL}{2}$$

così

$$OI = \sqrt{\overline{OL}^2 - \frac{\overline{HL}^2}{4}}$$

ovvero

$$OI = \frac{1}{2}\sqrt{4\,\overline{OL}^2 = \overline{HL}^2}$$

cosicchè chiamando con C una corda qualsiasi in un circolo di raggio R, si avrà che l'apotema chiamata con P sarà

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{4\,R^2 - C^2}$$

cioè *l'apotema di un poligono inscritto regolare od irregolare è eguale alla metà della radice quadrata, della differenza fra il quadrato del diametro e il quadrato della corda.*

E sapendo determinare l'apotema o le apoteme di un poligono inscritto in un circolo, si saprà altresì determinarne l'area, non essendo questa che un prodotto in cui l'apotema è un fattore, i lati gli altri.

Ma se basta la conoscenza del lato di un dato poligono inscritto in un dato circolo perchè se ne possa calcolare l'apotema ed i lati dei poligoni inscritti di doppio numero di lati, ed in generale, se ne possa calcolare i lati di tutti quelli il cui numero di lati sia espresso da $p \times 2^n$, essendo p il numero dei lati del poligono dato, vedasi tuttavia in quali casi basti la sola conoscenza del raggio, per il computo di un determinato poligono regolare.

Sapendo che la diagonale di un quadrato è eguale al prodotto del suo lato per la radice quadrata del numero due, e che la diagonale di un quadrato inscritto in un circolo è eguale al diametro del medesimo, si avrà che R essendo il raggio di un circolo

$$\frac{2\,R}{\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$$

sarà il lato del quadrato inscritto nel medesimo, e

$$\frac{2\,R}{2\sqrt{2}} \text{ ossia } \frac{R}{\sqrt{2}}$$

sarà l' apotema, inquantochè l'angolo al centro del quadrato essendo un angolo retto, la retta che ne unisce il vertice colla metà del lato è eguale a questa metà.

Ma avuta la conoscenza del valore del lato di un quadrato inscritto in un circolo, potendo colla trovata formola

$$c = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4\,R^2 - C^2}}$$

avere il lato di un poligono inscritto di doppio numero di lati, vale a dire l'ottagono, e dopo questo ottenuto potendo ancora replicare l'applicazione della formola ed ottenere il lato del poligono di sedici lati, e così successivamente calcolando, potendo ottenere sempre il lato di un poligono di un numero doppio di lati all' ultimo trovato, è dato potere dire che: *il computo del valore del lato di un poligono regolare il cui numero di lati è una potenza perfetta del numero due, è sempre possibile.*

Medesimamente, per quanto fu dimostrato al fine del libro secondo, il raggio di un circolo portato come corda sulla circonferenza essendo contenuto sei volte esattamente, vale a dire, che se in un circolo di centro O si costruisce un esagono regolare A D B E C F che ogni qualunque dei lati A D, D B, B E, E C, C F, F A è eguale al raggio del circolo, si avrà che colla conoscenza del raggio di un circolo si ha la conoscenza del lato dell' esagono regolare, del suo perimetro nel prodotto del numero dei lati per

il raggio, della sua apotema nell'altezza di un triangolo equilatero di lato eguale al raggio, poichè colla sostituzione nella formola

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$$

per essere $R = C$ diviene

$$P = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$$

che è la formola stessa che esprime l'altezza di un triangolo equilatero, come poi rilevasi altresì dalla figura. Poichè la metà del numero di lati dell'esagono è non minore di tre, così colla formola

$$C = \frac{c}{R}\sqrt{4R^2 - c^2}$$

viensi a trovare il lato del poligono regolare di tre lati inscritto in un circolo, vale a dire il lato del triangolo equilatero nel medesimo inscritto. Essendo $R = c$, così è $C = R\sqrt{3}$, cioè *il lato di un triangolo equilatero inscritto in un circolo è eguale al prodotto del raggio per la radice quadrata del numero tre.* E viceversa, da $C = R\sqrt{3}$ ricavandosi $R = \frac{c}{\sqrt{3}}$, si dirà, che *il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo equilatero è eguale al quoziente del suo lato per la radice quadrata del numero tre.*

L'apotema poi del poligono regolare di tre lati è dalla formola

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}$$

colla debita sostituzione

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - 3R^2}$$

ovvero $P = \frac{R}{2}$, cioè *l'apotema del triangolo equilatero inscritto in un circolo è eguale alla metà del raggio.* La verità di questa proposizione

si ha altresì immediatamente, osservando nella figura, che A B è diagonale di un parallelogramma A D B O, essendo A D, D B lati dell'esagono regolare inscritto, ed eguali ai raggi O A, O B; e la corda A B non è altrimenti che il lato di un triangolo equilatero, ed esso viene diviso per metà nel punto G dall'altra diagonale O D, per modo che è G A = G B, G D = G O.

Se poi applicasi al lato dell'esagono regolare l'altra formola

$$C' = \sqrt{2\,R^2 - R\sqrt{4\,R^2 - C^2}}$$

si avrebbe ancora che per essere C = R sarebbe

$$c = \sqrt{2\,R^2 - R^2\sqrt{3}}$$

ovvero $c = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, vale a dire, *il lato del dodecagono regolare inscritto in un circolo è eguale al prodotto del raggio per la radice quadrata del numero due diminuito della radice quadrata del numero tre.*

Egli è evidente che ove si sostituisse il valore del lato del dodecagono alla medesima formola stata adoperata pel ricavo di essa, si verrebbe a ricavare il lato del poligono di ventiquattro lati; e così di seguito operando si potrebbe giungere ad ottenere il lato di un poligono regolare inscritto in un circolo, il cui numero di lati fosse il prodotto del numero tre per una potenza perfetta del numero due.

Laonde si dirà, che nello stesso modo in cui si conosce la costruzione dei poligoni regolari inscritti in un circolo il cui numero di lati sia una potenza perfetta del numero due, ovvero una simile potenza moltiplicata per tre, così *sono possibili i computi dei lati, dei perimetri, delle apoteme e delle aree di tutti i poligoni regolari il cui numero di lati è una potenza perfetta del numero due, ovvero una simile potenza moltiplicata per tre.*

Resta a vedere se colla stessa facilità colla quale dopo costrutto un poligono inscritto in un circolo, si può averne altro di egual numero di lati e che sia circoscritto, si possa cioè computare i

lati e conseguentemente il perimetro e l'area di un poligono circoscritto simile ad un dato poligono inscritto. Per ciò sia nel circolo di centro O (Fig. 52) inscritto un poligono qualsiasi A B C D E F, parallelamente ai lati del quale condotte tante tangenti alla circonferenza da dare origine ad un poligono simile circoscritto. Egli ne avverrà che dal centro comune O dei due poligoni tirando due raggi O A, O B a due vertici del poligono inscritto, questi debitamente prolungati verranno a passare per i vertici I e G del poligono circoscritto a motivo che A B è parallelo e proporzionale con I G perchè lati omologhi di due poligoni simili. Ora i due triangoli A B O, I O G che sono simili, danno luogo alla proporzione

$$AB : OH :: IG : OL,$$

dalla quale $IG = \frac{AB \times OL}{OH}$; ma O H siccome apotema di un poligono inscritto in un circolo, essendo come lo si conosce dalla formola $P = \frac{1}{2}\sqrt{4\overline{R}^2 - C^2}$, così ne avviene che essendo $OL = R$, $AB = C$, è

$$IG = \frac{C \times R}{\frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - C^2}}$$

ovvero

$$IG = \frac{2R \times C}{\sqrt{4R^2 - C^2}}$$

vale a dire *il lato di un poligono circoscritto ad un circolo è eguale al quoziente, del prodotto del diametro del circolo per la corda omologa inscritta, per la radice quadrata della differenza fra il quadrato del diametro e il quadrato della corda inscritta.*

Ora, siccome dato il lato di un poligono inscritto in un circolo si sa computarne il lato del poligono inscritto di doppio e di metà numero di lati, e si sa altresì computarne i lati dei poligoni simili circoscritti, così è dato di potere computare il perimetro e l'area di due poligoni simili, l'uno inscritto, l'altro circoscritto e di un

medesimo numero di lati, e che la differenza fra i due suddetti perimetri od aree, sia minore di qualsiasi quantità data.

Venendo alla ricerca della relazione che corre fra un diametro ed una corda, considerata questa relazione nel senso degli archi sottesi dalla corda, vedesi ben tosto come infinite essendo le corde che da un dato punto della circonferenza si possano nel circolo condurre, così della pari infinite sarebbero le relazioni a studiare, vale a dire in termini più generali, il quesito che occorrerebbe risolvere, sarebbe quello di determinare la corda che sottende un arco del quale se ne conosce o la sua lunghezza, o l'angolo che lo stesso misura, in funzione sempre del diametro o del raggio del circolo nel quale supponesi tirata la corda. Ora bene, questo quesito se pure risolto dall'alta geometria, non lo è completamente dalla geometria elementare, limitandosi questa sola alla determinazione di alcune delle corde che si possono tirare in un circolo. Ed infatti, venne dimostrato che colla conoscenza del raggio di un circolo si giungeva alla conoscenza del lato del quadrato inscritto, vale a dire si giungeva al valore della corda che sottende un arco che misura al centro l'angolo retto, ovvero dire un arco che è la quarta parte della circonferenza.

Medesimamente venne dimostrato il mezzo di determinare progressivamente il lato dei poligoni di doppio numero di lati per guisa da avere le lunghezze delle corde, che sottendono un arco sia che misura al centro un angolo eguale all'angolo retto diviso per 2^n, sia di lunghezza divisa per tale espressione, sempre colla sola conoscenza del raggio epperciò del diametro. Considerando poi il triangolo equilatero, l'esagono regolare, il dodecagono regolare ed in generale tutti i poligoni formati da un numero di lati espresso dalla formola 3×2^n, venne dimostrato che di essi, tutti i lati sono calcolabili sempre colla conoscenza del raggio, sicchè detti lati essendo corde, che nel triangolo equilatero sottendono sia un arco misurante un angolo di 120°, sia il terzo dell'intiera circonferenza; nell'esagono un arco, sia misurante un angolo al centro di 60°, sia la sesta parte della circonferenza; nel decagono un arco sia misurante un angolo al centro di 30°, sia la dodicesima parte della circonferenza, e così successivamente, per modo che, di tutte quelle corde che sottendono un arco che misura un angolo al centro eguale al quoziente di 360° per un numero che sia una potenza perfetta

del numero due ovvero una simile potenza moltiplicata per tre, se ne conosce la valutazione.

Ma nei limiti della geometria elementare è ancora dato di potere calcolare altre corde che sottendono un qualche arco di lunghezza diversa dal quoziente della circonferenza per 2^n o 3×2^n. Infatti supponendo una corda N R (Fig. 53) condotta in un circolo di centro O che sottenda un arco che sia la decima parte della circonferenza, epperciò il lato del decagono regolare inscritto, che misura un angolo al centro di 36°, sarà assai facile di vedere pel ragionamento che si verrà facendo, che detta corda è in una relazione tale col raggio, da permettere colle cognizioni apprese la possibilità del suo tracciamento, nonchè del computo del suo valore.

Si conducano i due raggi O R, O N e quindi formisi un angolo Q N O = Q O N, il triangolo Q N O risulterà isoscele cioè Q N = Q O, e siccome per essere il triangolo R O N isoscelè come avente i due lati O R, O N eguali perchè raggi del medesimo circolo, è l'angolo O R N = O N R ed inoltre l'angolo O R N = 72°. Dal momento che R O N = 36° siccome fu detto, così ne avviene che l'angolo R N Q = 36° siccome differenza fra R N O e Q N O, onde la retta N Q condotta per costruzione in modo da formare un angolo O N Q = Q O N = 36° formando l'angolo Q N R pure di 36°, è bisettrice dell'angolo R N O; e sapendo che la bisettrice dell'angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali, così potersi stabilire proporzione

$$ON : NR :: OQ : QR$$

dalla quale, perchè O Q = Q N, deriva l'altra

$$ON : NR :: QN : QR.$$

Se ora per ultimo osservasi il triangolo R Q N che ha l'angolo R N Q di 36°, e l'angolo N R Q di 72°, poichè la somma di questi due angoli deve fare col terzo 180°, vedesi tosto che l'angolo R Q N è pure di 72°, ed i due angoli Q R N, R Q N essendo eguali, il triangolo R N Q è isoscele, e conseguentemente Q N = N R; per cui sostituendo al termine Q N nella proporzione a cui erasi pervenuti il termine eguale N R, si viene ad avere l'altra

$$ON : NR :: NR : QR$$

nella quale O N essendo il raggio del circolo e Q R la differenza fra il raggio dello stesso circolo ed O Q, ovvero i suoi eguali Q N, N R, la proporzione suddetta prenderà l' altra forma

$$O\,N : N\,R :: N\,R : O\,N - N\,R$$

dalla quale rendesi evidente che N R lato del decagono regolare inscritto in un circolo è una media proporzionale fra il raggio O N e la differenza fra il detto raggio e il lato N R. Ora bene, una retta la quale sia divisa in due parti tali che la maggiore sia una media proporzionale fra tutta la retta e la sua parte minore chiamandosi divisa in media ed estrema ragione, si dirà perciò che *il lato del decagono regolare inscritto in un circolo è la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione.*

Il problema 4.° annesso a questo libro terzo indicando e dimostrando il mezzo di dividere una retta, e conseguentemente anche un raggio in media ed estrema ragione, così con detta costruzione è possibile la grafica costruzione del decagono regolare inscritto in un circolo. Del resto la Fig. 55 porta tracciata l' operazione dell' inscrizione del decagono regolare; nel semicircolo descritto su di O A con centro in B punto di mezzo del raggio O A, nella retta C B che unisce l' estremo C di un raggio O C perpendicolare ad O A, ed infine nella lunghezza C D corrente tra il punto C ed il punto d' intersezione della retta C B col semicircolo descritto su C A, una retta che portata consecutivamente dieci volte come corda, sulla circonferenza, la compisce, fissando così dieci punti che consecutivamente uniti, formano il decagono regolare C E F G H I L N R S inscritto nel circolo.

L'essere il lato del decagono regolare inscritto in un circolo la parte maggiore del raggio diviso in media ed estrema ragione, oltre al mezzo di sua costruzione derivasi altresì quello del suo computo, perchè diffatto chiamando sempre con R il raggio di un circolo e con X il lato del decagono regolare inscritto, poichè ha luogo la proporzione

$$R : X :: X : R - X$$

da questa ricavasi

$$X^2 = R^2 - R\,X$$

e quindi

$$X^2 + R\,X = R^2$$

equazione di 2.° grado, epperciò

$$X^2 + R X + \frac{R}{2} = R^2 + \frac{R^2}{4}$$

la cui radice è

$$X + \frac{R}{2} = \pm \sqrt{\frac{5 R^2}{4}}$$

onde

$$X = -\frac{R}{2} \pm \frac{R}{2} \sqrt{5}$$

e per essere $\frac{R}{2}$ fattore comune,

$$X = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1)$$

ovvero dire, *il lato del decagono regolare inscritto in un circolo è eguale al semiprodotto del raggio del circolo per la differenza fra la radice quadrata del numero cinque e l'unità.*

Egli è ora evidente come conoscendo il modo di calcolare il valore del lato di un poligono regolare di dieci lati inscritto in un circolo colla sola conoscenza del raggio, si possa calcolare col mezzo della nota formola $C = \frac{C}{R} \sqrt{4 R^2 - C^2}$, il lato del poligono di metà numero di lati, vale a dire il lato del pentagono regolare inscritto, in funzione sempre del raggio.

Ma tra il raggio di un circolo, ed il lato del decagono e pentagono regolare in esso inscritto, correndovi una relazione speciale, è motivo che tanto nella costruzione del pentagono regolare inscritto in un circolo, quanto nel computo della lunghezza del lato, abbia questa relazione ad avere maggiore impiego. Vedasi perciò questa relazione.

Essendo L I, I H due lati del decagono regolare inscritto nel circolo di centro O, egli è naturale che la corda L H che sottende un arco doppio è il lato del pentagono regolare. Ciò posto, si tirino i raggi O L, O H, O I, si vedrà tosto che è l'angolo L O H, come misurato da un arco che è la quinta parte della circonferenza, di 72°, gli angoli L O I, I O H ciascuno essendone la metà, ciascuno è

di 36°; e quindi si presenterà evidente, che se formasi un angolo P I H = P H I, il triangolo P H I risulti isoscele, e poichè il triangolo L I H è esso pure isoscele a motivo che I H = I L come lati di un medesimo poligono regolare, ed inoltre l'angolo L H I è comune ai due triangoli, epperciò l'eguale H L I è eguale all'altro P I H, così i due triangoli H P I, H L I sono simili, e come tali danno la proporzione

$$LH : IH :: IH : PH$$

dalla quale,

$$\overline{IH}^2 = LH \times PH.$$

Ora tirando la retta O P, si vengono a formare due triangoli L O P, L O H, i quali hanno l'angolo O L H comune, ed inoltre poichè essendo O H = O I, P H = P I, la retta O P divide per metà l'angolo I O H, in guisa che mentre si era detto che l'angolo I O H era di 36°, si può ora dire essere l'angolo L O P = 54°, e medesimamente essendo l'angolo L O H di 72°, è l'angolo O L H di 54° e l'angolo P O L = O L P, ed essendo l'angolo O L H = O H L, così vuol dire che è L O P = O H L, e quindi che i due triangoli sono equiangoli epperciò simili, onde deriva la proporzione

$$LH : OL :: OL : LP$$

da cui

$$\overline{OL}^2 = LH \times LP.$$

Sommando il valore di $\overline{OL}^2$ con quello di $\overline{IH}^2$, si viene ad avere

$$\overline{IH}^2 + \overline{OL}^2 = LH \times PH + LH \times LP$$

e poichè esistono nel secondo membro di quest'eguaglianza due termini, i quali hanno un fattore comune che può venire messo fuori, così ricavasi

$$\overline{IH}^2 + \overline{OL}^2 = LH(PH + LP);$$

ma la quantità compresa fra parentesi essendo eguale a L H, si otterrà l'espressione finale

$$\overline{IH}^2 + \overline{OL}^2 = \overline{LH}^2$$

ovverosia *la somma dei quadrati del lato di un decagono regolare e del raggio del circolo a questo circoscritto, è eguale al quadrato del lato del pentagono nel medesimo circolo inscritto.* Non è dopo ciò, certamente difficile il comprendere che l'enunciata proposizione, trova la sua corrispondenza col teorema pittagorico, vale a dire il comprendere che se si ha un triangolo, in cui i lati sieno rispettivamente eguali al raggio di un circolo, ed ai lati del decagono e pentagono regolari inscritti nel medesimo, che un cosiffatto triangolo è rettangolo. E questa relazione che corre tra il raggio ed i lati dei due poligoni inscritti permette di potere ottenere contemporaneamente i due lati dei poligoni con una sola costruzione.

Essendo diffatti il circolo di centro O (Fig. 54) quello in cui si voglia inscrivere un pentagono, non si avrà dopo condotto un diametro A B ed un raggio O C ad esso perpendicolare, che a fare centro nel punto di mezzo D di A O, e con raggio D C descrivere un arco, che taglierà O B nel punto E tale, che la retta che unisce questo punto col punto C è il lato del pentagono regolare, e poichè C O E è un triangolo rettangolo in cui il cateto O C è il raggio, così O E è in virtù dell'ultimo teorema or ora dimostrato, il lato del decagono regolare inscritto nello stesso circolo, sicchè portata come corda consecutivamente una tale lunghezza sulla circonferenza, essa vi deve essere contenuta cinque volte, e fisserà i punti che uniti alla loro volta consecutivamente, daranno il pentagono regolare C F G H L, inscritto in quel circolo.

Dato il lato di un decagono regolare inscritto in un dato circolo; alloraquando si voglia avere il lato del poligono metà numero di lati, ch'è sempre il pentagono regolare, se ne avrà il valore dalla formola $C = \sqrt{R^2 + c^2}$, essendo sempre c il lato del decagono regolare, C quello del pentagono ed R il raggio del circolo.

Sapendo sempre costrurre e computare il lato di un poligono di numero doppio di lati a quello di qualsiasi altro dato, ne avviene che sapendo costrurre e computare il lato del pentagono regolare,

si saprà ancora costrurre e computare qualunque altro il cui numero di lati sia espresso da 5×2^n.

Se osservasi però, che ove in un qualunque circolo di centro O (Fig. 55) si tiri una corda A B che sia eguale al raggio O A del circolo, e quindi da un estremo B si tiri una corda B C che sia eguale al lato del decagono regolare inscritto, che la corda eguale al raggio essendo il lato dell'esagono regolare inscritto è perciò una corda che sottende un arco la sesta parte della circonferenza, e che la corda eguale al lato del decagono regolare inscritto sottende un arco la decima parte della circonferenza, è dato di vedere che la corda che unirà gli estremi C ed A, cioè C A, sottenderà un arco che è la differenza fra la sesta parte e la decima parte della circonferenza. Ora, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, sicchè portato consecutivamente A C sulla circonferenza come vi apparisce dalla figura, essa vi sarà contenuta quindici volte esattamente, onde si dirà, che *la corda dell' arco differenza fra due archi sottesi da due corde che sieno l' una il raggio del circolo, l' altra il lato del decagono regolare inscritto, è il lato del pentedecagono regolare; ovvero dire, del poligono regolare di quindici lati.*

E poichè è sempre possibile dopo inscritto in un circolo un poligono, di costrurne un altro di doppio numero di lati, così potendo costrurre un poligono regolare di quindici lati, sarà possibile la costruzione di un poligono regolare il cui numero di lati sia espresso da 15×2^n. Il pentedecagono essendo un poligono il cui numero di lati non contiene il fattore due, così non esiste altro poligono che abbia una metà numero di lati.

Essendosi ritrovato il lato del pentedecagono regolare nella corda che sottende un arco differenza fra altri due archi sottesi da due diverse corde, potrà parere che altre corde di altri poligoni regolari sia possibile l'ottenere analogamente e che altrimenti non siano costruibili; giova perciò fare osservare che affine due corde appartenenti a poligoni regolari possano nella corda sottesa dalla differenza degli archi che essi sottendono dare un lato di un poligono regolare, occorre che i numeri dei lati dei due poligoni siano tali che il loro prodotto sia esattamente divisibile pella loro differenza. Ora il numero dei lati dei poligoni regolari che si possono costrurre cogli indicati metodi, essendo numeri che non possono con-

tenere fattori diversi del 2^n, 3, 5, così non è possibile rinvenire lati di poligoni, dei quali già non se ne conosca la costruzione.

Detto della costruzione del pentedecagono regolare, resta a dire del computo del lato di tale poligono, in funzione del raggio del circolo. Ora bene, questo quesito che riassumesi nell' enunciazione seguente: Date due corde condotte in un dato circolo trovare il valore della corda che sottende l'arco differenza: vedesi tosto come la sua risoluzione sia deduttibile dalla formola che esprimesse la soluzione del quesito inverso, vale a dire: Date due corde trovare la corda che sottende l' arco somma. Ma per giungere alla soluzione di questi due quesiti, è necessaria la conoscenza di una relazione che corre fra i lati e le diagonali di un quadrilatero inscritto in un circolo. Sia pertanto A C B D un quadrilatero inscritto nel circolo, nel quale vengano tracciate le due diagonali A B, C D, e venga tirata una retta C F formante un angolo A C F = B C D. I due triangoli A C F, C B D avendo l'angolo A C F = B C D per costruzione, l' angolo B A C = B D C siccome misurati entrambi dalla metà del medesimo arco, sono equiangoli epperciò simili, e luogo danno alla proporzione

$$BD : DC :: AF : AC$$

dalla quale ricavasi

$$(1) \qquad BD \times AC = DC \times AF.$$

I due triangoli poi B F C, A D C avendo l'angolo B C F = A C D perchè composti di un angolo eguale e di un angolo comune F C D, l'angolo F B C = A D C siccome misurati entrambi dalla metà del medesimo arco, sono equiangoli epperciò pure simili, e sta la proporzione

$$CD : AD :: CB : FB$$

dalla quale

$$AD \times CB = CD \times FB.$$

Questa eguaglianza sommata termine a termine coll'eguaglianza (1) dà

$$BD \times AC + AD \times CB = DC \times AF + CD \times FB$$

ove per esservi nel secondo membro il fattore C D comune ai due termini, si avrà

$$BD \times AC + AD \times CB = CD\,(AF + FB)$$

ma poichè $AF + FB = AB$, così sarà

$$BD \times AC + AD \times CB = CD \times AB.$$

Quest'ultima eguaglianza mette in evidenza, che *in ogni qualunque quadrilatero inscritto in un circolo, la somma dei rettangoli formati dai lati opposti è eguale al rettangolo formato colle diagonali.* Conosciuta questa relazione fra i lati e le diagonali di un quadrilatero inscritto in un circolo, è assai facile la soluzione del quesito della determinazione della corda che sottenda un arco somma a quello sotteso da due altre corde date condotte in un circolo dato. Infatti essendo A C, C B due corde che si suppongono conosciute, e che per brevità d'operazione chiameremo la prima con a, la seconda con b, ed essendo A B la corda che chiameremo con X, siccome quella che si cerca colla sola conoscenza del raggio del circolo, che come al solito chiameremo con R, e delle due corde a, b, si conduca il diametro C E nel circolo, e quindi le corde supplementarie E A, E B, la figura A C B E essendo un quadrilatero in cui la diagonale $CE = 2R$, in virtù della detta relazione è dato di potere stabilire immediatamente l'eguaglianza seguente

$$2R \times X = b \times AE + a \times EB$$

nella quale, se esistono oltre all'incognita X, incognite le corde supplementarie A E, E B, siccome però il valore di ciascuna di queste è deducibile, la prima colla considerazione del triangolo rettangolo E A C, la seconda colla considerazione dell' altro triangolo rettangolo E B C, si ha per ciascuna di esse

$$AE = \sqrt{4R^2 - a^2},\ EB = \sqrt{4R^2 - b^2}$$

i quali valori sostituiti nella prima eguaglianza stata posta, la convertono in

$$2R \times X = b\sqrt{4R^2 - a^2} + a\sqrt{4R^2 - b^2}$$

la quale non contiene più altro che l'incognita X, epperciò questa ricavando ottiensi

$$X = \frac{b}{2\,R}\sqrt{4\,R^2 - a^2} + \frac{a}{2\,R}\sqrt{4\,R^2 - b^2}$$

la quale formola esprime precisamente il valore della domandata corda.

Ora bene, supponendo cognita la corda A B e la corda C B, come è facile di vedere, sarà fattibile di ottenere il valore della corda differenza A C mediante il semplice ricavo del valore di a dalla sopra trovata formola, e così operando trovasi per risultato

$$A\,C = \frac{A\,B}{2\,R}\sqrt{4\,R^2 - b^2} + \frac{b}{2\,R}\sqrt{4\,R^2 - \overline{A\,B}^2}$$

in guisa che il computo della lunghezza di una corda che sottenda un arco differenza da quelli sottesi da due corde date in un dato circolo, è perfettamente determinato colla semplice risoluzione di una formola algebrica.

Riassumendo le cose dimostrate in queste relazioni fra le rette tirate in un circolo, si dirà: 1.° *È possibile colla conoscenza del raggio di un circolo, la costruzione di tutti quei poligoni regolari inscritti o circoscritti, il cui numero di lati è o una potenza perfetta del numero due, ovvero una simile potenza moltiplicata per tre o per cinque, e tali che tanto i lati quanto i perimetri abbiano a differire tra loro di una quantità minore di qualsiasi quantità data.* 2.° *È possibile colla conoscenza del raggio di un circolo, il computo dei lati, dei perimetri, delle apoteme e delle aree di tutti i poligoni inscritti e circoscritti ad un circolo il cui numero di lati sia o una potenza perfetta del numero due, o una simile potenza moltiplicata per tre o per cinque, ed i cui perimetri ed aree abbiano a differire tra loro di una quantità minore di qualsiasi quantità data.* 3.° *È possibile il computo di tutti gli elementi di qualsiasi poligono circoscritto ad un circolo colla conoscenza degli omologhi del poligono simile inscritto.*

Dato il raggio di un circolo, o ciò che torna lo stesso, dato il diametro, conoscendo il modo di determinare il rapporto corrente

tra esso ed alcune corde, tra esso ed i perimetri di due poligoni l'uno inscritto, l'altro circoscritto, che incessantemente vadano accostandosi alla circonferenza del circolo, un'ultima relazione e delle più importanti pella geometria, resta a trattare, ed è la determinazione del rapporto del diametro alla circonferenza.

Rapporto della circonferenza del circolo al suo diametro. — Il rapporto fra due linee qualunque essendo la misura di una di esse con unità di misura l'altra, così il rapporto della circonferenza di un circolo al suo diametro è il risultato della misura di una circonferenza tenendosi per unità di misura il suo diametro.

Una linea curva perchè possa venir misurata tenendo per unità di misura una retta, occorre che essa possa venire sviluppata, occorre cioè che essa possa venire trasformata in una linea retta di eguale lunghezza: così il rapporto della circonferenza al diametro non è fattibile, senza avere o potere tracciare una linea retta che abbia la lunghezza della circonferenza del circolo. Ma come fu detto e ripetuto più volte, lo sviluppo di una curva non può ottenersi che approssimativamente, qualunque linea spezzata a lati pure infinitamente piccoli, quantunque materialmente possa parere che sostituisca la curva, tuttavia non potersi mai come tale ritenere, è quindi anche la circonferenza irrettificabile esattamente, epperciò non esattamente possibile la sua misura con unità di misura una qualsiasi retta. E non potendo aversi l'esatta misura di una circonferenza di circolo, così non è possibile altresì l'esatta misura di un circolo, essendo questa il risultato del semiprodotto di due fattori, dei quali l'uno non esatto; parimenti, la radice quadrata del numero che esprime l'area di una figura essendo il lato del quadrato equivalente a quella, nel circolo l'area non potendo aversi esattamente, neppure esattamente può aversi la sua radice, e quindi l'impossibilità di avere o formare un quadrato che possa essere equivalente all'area di un circolo, e questa impossibilità geometrica che chiamasi la quadratura del circolo, è pari a quell'altra impossibilità registrata dalla Meccanica nel Movimento Perpetuo.

Posta così l'impossibilità di avere un esatto rapporto fra la circonferenza di un circolo e il suo diametro, e la possibilità sola di determinarlo approssimativamente, non rimane che a vedersi la via a seguire onde raggiungere nella misura di una circonferenza una approssimazione maggiore di qualsiasi approssimazione desiderata.

Questa via è evidente, dopo le conclusioni alle quali si venne al termine delle relazioni fra le rette tirate in un circolo state trattate. Infatti, essendo fattibile colla conoscenza del raggio o del diametro di un circolo, il computo del perimetro di un poligono inscritto e circoscritto di eguale numero di lati e tale da poter venire esteso sino all'infinito, in modo cioè che la differenza fra i due perimetri, i quali vanno continuamente diminuendo l'uno, crescendo l'altro, incessantemente avvicinandosi alla circonferenza di circolo, e differenziare tra loro di una quantità ognor più piccola, la misura di una circonferenza con unità il suo diametro e con un'approssimazione desiderata la si otterrà perciò nel numero che nella sua parte frazionaria darà o l'approssimazione domandata, o un'approssimazione più grande, e che sarà la parte di cifre comune ai numeri che esprimono i perimetri dei due poligoni inscritto l'uno, circoscritto l'altro, e sempre di egual numero di lati.

Ma se in tale modo conseguesi la circonferenza di un circolo, egli non è duopo ad ogni circolo del quale si voglia determinare la circonferenza, o l'area, od una parte qualsiasi dell'una o dell'altra, l'esecuzione di tutti i siffatti computi, perocchè conosciuto il rapporto del diametro alla circonferenza di un circolo, tutti i circoli essendo simili e quindi avendo i lati omologhi proporzionali, lo stesso rapporto è quello corrente con il diametro e la rispettiva circonferenza di qualsivoglia altro.

Dipendendo dalla proporzionalità della circonferenza al diametro nei circoli simili, il poter calcolare colla conoscenza del rapporto fra il diametro e la circonferenza di un circolo fisso la lunghezza della circonferenza di un circolo qualsiasi, e dopo questa quella di una sua parte, nonchè l'area e sue parti, così è necessario di vedere se una tale proporzionalità, astrazione fatta dal ragionamento stato tenuto per dimostrare la similitudine di due circoli e della conseguenza derivata per le linee omologhe, regga ad un ragionamento diretto.

Ora qualsivoglia ragionamento diretto, che tenda a fare vedere la proporzionalità fra la circonferenza ed il diametro di un circolo colla circonferenza e diametro d'altro circolo, non può a meno di avere per base di dimostrare che la circonferenza di un circolo sta al suo diametro come la circonferenza di altro circolo sta ad una lunghezza che non è nè maggiore nè minore del relativo

diametro. Si dimostrerà per conseguenza che due circoli descritti il primo con raggio O D, il secondo con raggio qualsiasi O B (Fig. 56), sono tali che ha luogo la proporzione:

Circonf. O D : circonf. O B :: diam. D E : diam. B F

ovvero :: raggio O D : raggio O B, vale a dire che

Circonf. O D : circonf. O B :: O D : O B $<$ O C e $>$ O A.

Se il rapporto corrente fra la circonferenza di raggio O D e la circonferenza di raggio O B fosse lo stesso di quello corrente fra il raggio O D e una lunghezza maggiore di O B come O C, od una lunghezza minore di O B come O A, egli ne avverrebbe come rendesi ostensivo nella figura stessa, che descritte coi raggi O C, O A due circonferenze di circolo, e poscia inscritto nel circolo di raggio O C e in quello di raggio O D, un poligono di medesimo numero di lati, e medesimamente, circoscritto ai circoli di raggio O A e di raggio O D un poligono di medesimo numero di lati; e tali questi quattro poligoni che i lati di quello inscritto nel circolo di raggio O C abbiano o non abbiano a toccare la circonferenza di raggio O B, ed i lati di quello circoscritto al circolo di raggio O A, abbiano o non abbiano a toccare la circonferenza di raggio O B; in virtù della proporzionalità che si sa esistere fra i perimetri dei poligoni simili, si avrebbe che

Perim. inscr. O D : Perim. inscr. O C :: O D : O C

Perim. circos. O D : Perim. circos. O A :: O D : O A

Ora essendo Perim. inscr. O D $<$ circonf. O D, e Perim. inscr. O C $>$ circonf. O B, è evidente che circonf. O D non può essere con circonf. O B :: O D : O C. Parimenti, essendo Perim. circos. O D $>$ circonf. O D, e Perim. circos. O A $<$ circonf. O B, così non può essere circonf. O D a circonf. O B come O D : O A. In conseguenza, il rapporto in cui stanno le circonferenze di raggio O D e di raggio O B, non potendo essere nel rapporto del raggio O D ad un raggio più grande o più piccolo di O B, così esse sono nel rapporto dei loro raggi o dei loro doppi, cioè dei loro diametri.

Cosicchè supponendo nota la misura della circonferenza di un circolo con unità di misura il suo diametro, col mezzo di una semplice proporzione è deduttibile la circonferenza di qualsivoglia circolo colla conoscenza del suo diametro. Ora supponendo che il rapporto corrente fra la circonferenza di un circolo fisso al suo diametro sia noto, ad esempio, che pel circolo il cui diametro è 1, il rapporto in discorso sia una quantità che nominasi con π (*pi*), si avrà che la circonferenza C di un circolo di diametro D e di raggio R derivandola dalla proporzione $1 : \pi :: D : C$, verrebbe ad essere $C = \pi D$ ovvero $2 R \pi$, epperciò, *la circonferenza di un circolo è eguale al prodotto del diametro, per il numero che esprime la misura della circonferenza del circolo di diametro l' unità.*

L' area poi del circolo essendo eguale al semiprodotto della circonferenza pel raggio, sarà così $S = 2 \pi R \times \frac{R}{2}$ ovvero $S = \pi R^2$, vale a dire, *l' area di un circolo è eguale al prodotto del quadrato del suo raggio, per il numero che esprime la misura della circonferenza del circolo di diametro l' unità.*

Questa proposizione mette in evidenza l'altra proprietà delle aree dei circoli di essere proporzionali ai quadrati dei proprii raggi o diametri.

Le circonferenze e le aree dei circoli per venire determinate abbisognando dell' indispensabile π, del valore cioè della circonferenza di un circolo di diametro l' unità, vengasi a cercarne il suo valore. Siccome venne detto il rapporto della circonferenza al suo diametro non è determinabile esattamente, così non è esattamente determinabile il valore di π, non rimane perciò che di vedere il mezzo di determinarlo approssimativamente. Per ciò si calcoli il perimetro di un poligono inscritto qualsiasi, con unità di misura il diametro 1, si calcoli in seguito il perimetro di altro poligono circoscritto e di eguale numero di lati, altresì tenendo per unità di misura il diametro. Si osservino i due numeri che esprimono siffatti perimetri, e se la parte comune ai due suddetti numeri non esprime una sufficiente approssimazione, si calcolino coi mezzi che si conoscono i perimetri di un poligono inscritto e circoscritto di doppio numero di lati del primo, e nuovamente si osservi se la parte comune ai numeri che esprimono siffatti perimetri danno l'approssimazione voluta, se non la danno proseguisi in modo analogo, sino appunto

d'essere giunti ad avere due numeri che esprimendo con unità il diametro del circolo, l'uno il perimetro di un poligono inscritto, l'altro il perimetro di un poligono circoscritto di eguale numero di lati, la parte comune a detti numeri sia un numero che dia la desiderata approssimazione. Così operando si troverà che nel circolo di diametro 1, dapprima calcolando i perimetri dell'esagono regolare inscritto e circoscritto si troverà:

Perim. Esagono inscr. $= 3{,}000000$
Perim. Esagono circos. $= 3{,}464101 \ldots$

La parte comune essendo il solo 3, ed osservando così che π è compreso fra 3 e 3,4, vedesi come ritenendo la sola cifra 3 si commetta un errore minore dei $\frac{4}{10}$ di unità.

Calcolando in seguito i perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti di doppio numero di lati, si troverà

Perim. Poligono 12 lati inscr. $= 3{,}105828 \ldots$
Perim. Poligono 12 lati circos. $= 3{,}215390 \ldots$

Questi due valori non avrebbero altra parte comune che il 3, e quindi per ora non sarebbe che $\pi = 3 \ldots$, ma egli è però facile di vedere che ritenendo in un computo la cifra consecutiva si verrebbe ad avere un'approssimazione maggiore di $\frac{1}{10}$.

Continuando nei calcoli dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti formati continuamente con raddoppiare il numero dei lati, si troverà

Perim. Poligono 24 lati inscr. $= 3{,}132628 \ldots$
Perim. Poligono 24 lati circos. $= 3{,}159659 \ldots$

Da questi due valori verrebbe di già $\pi = 3{,}1 \ldots$
Continuando ancora si troverà

Perim. Poligono 48 lati inscr. $= 3{,}139350 \ldots$
Perim. Poligono 48 lati circos. $= 3{,}146086 \ldots$
Perim. Poligono 96 lati inscr. $= 3{,}141031 \ldots$
Perim. Poligono 96 lati circos. $= 3{,}142714 \ldots$

Da questi due ultimi perimetri, vedesi come la parte comune sia 3,14, e quindi potersi ritenere $\pi = 3,14\ldots$. Un poligono, sia esso inscritto che circoscritto, quand'anche il numero dei suoi lati fosse infinitamente grande, non sostituendo mai esattamente la circonferenza, ne avviene che spingendo all' infinito il calcolo dei perimetri dei poligoni inscritti e circoscritti, si troveranno sempre due numeri, l' uno più grande, l'altro più piccolo, entrambi che vanno incessantemente avvicinandosi, senza però mai divenire una buona volta ad essere eguali. Ma intanto per uso di calcolo, come di controllo a chi voglia farne la ricerca, diremo che

$$\pi = 3,14159265358979323846\ldots$$

il quale valore è approssimato assai più di quello che occorra per gli ordinari calcoli e ben'anche pei calcoli d'alta sfera. Intanto una espressione equivalente di π si ha altresì nelle frazioni

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9208}{2931}$$

la seconda delle quali convertita in frazione decimale dà un risultato esatto sino ai centesimi, ed è dovuta all'immortale Archimede, la terza al Geometra Rivard, la quarta ad Adriano Mezio, e convertita in frazione decimale dà un risultato esatto sino ai milionesimi.

Se si considerano ora due circoli concentrici, l'uno di raggio O B, l'altro di raggio O A (Fig. 57), e per un punto A della circonferenza di raggio O A, tirata una tangente C D che sia limitata in C e D dalla circonferenza di raggio O B, si avranno tirando i due raggi O C, O D, i due triangoli O A D, O A C amendue rettangoli per essere la tangente C D perpendicolare al raggio O A tirato al punto di contatto A, e di più eguali poichè $O D = O C$ siccome raggi dello stesso circolo, ed il lato O A comune. Dal teorema pittagorico avendosi che $\overline{AD}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{OA}^2$, ne segue che detta eguaglianza moltiplicata intieramente per la quantità π, essa non cessa d'esistere e quindi è $\pi\,\overline{AD}^2 = \pi\,\overline{OD}^2 - \pi\,\overline{OA}^2$. Se si pone mente che $\pi\,\overline{AD}^2$ è la formola che esprime l'area di un circolo il cui

raggio sia A D, che $\pi\,\overline{O\,D}^2$ medesimamente esprime l'area di un circolo il cui raggio sia O D, e che infine ancora $\pi\,\overline{O\,A}^2$ esprime l'area di un circolo di raggio O A, vedesi tosto come l'eguaglianza sopra trovata, esprima qualmente l'area di un circolo di raggio A D sia equivalente alla differenza fra l'area di due circoli di raggio l'uno O B, l'altro O A. Ma due circoli di raggio l'uno O D, l'altro O A, determinano nella loro differenza uno spazio compreso fra due circonferenze di circolo che addimandasi *corona circolare.* Si dirà perciò che *l'area di una corona circolare è eguale a quella di un circolo avente per diametro una corda tangente alla circonferenza minore e condotta nel circolo maggiore.* Osservando però come col prolungamento del raggio B O in G viene a risultare che la retta A D è perpendicolare a B G, ed è perciò media proporzionale fra A G ed A B, essendo A G eguale alla somma dei raggi dei due circoli, ed A B eguale alla differenza degli stessi, si dirà così: *l'area di una corona circolare è eguale a quella di un circolo il cui raggio sia medio proporzionale tra la somma e la differenza dei raggi delle due circonferenze concentriche.*

In altro modo puossi conseguire ancora l'area della corona circolare. Infatti osservando che l'area S della corona circolare è eguale a $\pi\,\overline{O\,B}^2 - \pi\,\overline{O\,A}^2$, vedesi come questa espressione possa venire messa sotto la forma $\pi\left(\overline{O\,B}^2 - \overline{O\,A}^2\right)$, nella quale la quantità collocata nella parentesi essendo la differenza di due quadrati perfetti, epperciò eguale al prodotto della somma e differenza delle radici, sia

$$\pi\left(\overline{O\,B}^2 - \overline{O\,A}^2\right) = \pi\,(O\,B + O\,A)\,(O\,B - O\,A)$$

e moltiplicando e dividendo ad un tempo un fattore per due si ha

$$\pi\left(\overline{O\,B}^2 - \overline{O\,A}^2\right) = \left(\frac{2\,\pi\,O\,B + 2\,\pi\,O\,A}{2}\right)(O\,B - O\,A).$$

Se si analizzano i due fattori trovati ai quali corrisponde l'area della corona, trovasi come uno sia la differenza dei raggi, vale a dire la distanza B A delle due circonferenze, l'altro la semisomma

delle due circonferenze. Può perciò ancora dirsi: che *l'area della corona circolare è eguale al prodotto della semisomma delle circonferenze pella sua larghezza.* Questa regola d'area può quindi fare risguardare la corona circolare siccome un trapezio curvilineo.

Egli è poi evidente che ove si volesse l'area di una porzione di corona circolare, come quella rappresentata in A D C B alla Figura 58 e che chiamasi un *Trapezio circolare*, egli sarebbe sufficiente il computo della differenza fra l'area di due settori simili, vale a dire, la differenza fra l'area del settore A O B e l'area del settore D O C.

Medesimamente ove si volesse l'area di un *segmento circolare a due basi,* come E F G H, si otterrebbe col formare l'area del settore del segmento ad una sola base E G M H F secondo il modo stato indicato alla misura del circolo, poscia quella dell'altro segmento pure ad una sola base G M H e facendone per ultimo la differenza.

Relazione fra le rette tirate in una ellisse. — Tra le infinite rette che comunquemente possono venire tracciate nella ellisse, di due sole relazioni possono questi elementi trattare, e sono, la prima quella tra rette che taglino entrambi gli assi, e non sono parallele, la seconda quella tra rette che abbiano ad essere parallele o ad un medesimo asse o ad un medesimo diametro. Non si esaminerà però pella prima relazione che il solo caso di rette in cui la porzione intercetta fra gli assi sia eguale alla differenza dei semiassi. Da ognuna poi delle dette due relazioni si vedranno sorgere altrettanti mezzi di costruzione della ellisse, nonchè delle proprietà che la caratterizzano, o meglio che la determinano.

Ciò premesso, siano A B, C D (Tav. XXIV, Fig. 59) i due assi di una ellisse poichè si intersecano ad angolo retto ed in parti eguali nel punto O, e sia R P una retta tracciata in modo che la parte R Q intercetta tra i due assi sia eguale alla differenza dei due semiassi, e la parte Q P sia fatta eguale ad O C. Egli è evidente, che essendo O C il semiasse minore, O R la differenza dei due semiassi, è R P eguale al semiasse maggiore. Vedasi quindi se il punto P appartenga o non appartenga ad una ellisse che abbia per assi A B e C D.

Per ciò immaginisi abbassata dal punto P una perpendicolare od ordinata P S sull'asse maggiore, e prolungata sino in G all'in-

contro di una parallela tirata dal punto R alla A B. Ne risulterà anzitutto un triangolo rettangolo O R Q, dal quale mercè il teorema pittagorico, si ricaverà

$$O R = \sqrt{(O B - O C)^2 - \overline{O Q}^2}$$

ed in seguito a motivo della similitudine dei due triangoli rettangoli R Q O, Q P S come aventi un angolo opposto al vertice eguale, si avrà la proporzione Q S : O Q :: O C : O B — O C, dalla quale $Q S = \frac{O Q \times O C}{O B - O C}$; ed infine dal triangolo rettangolo P Q S, e sempre dal teorema pittagorico, si avrà

$$P S = \sqrt{O C^2 - \left(\frac{O Q \times O C}{O B - O C}\right)^2}.$$

Segnati i fuochi F, F' della ellisse avente per assi A B, C D, ed in seguito tracciate le due rette F P, F' P, vedonsi sorgere due triangoli rettangoli F' S P, F S P, da ciascuno dei quali è dato di ricavare, sempre in virtù del teorema pittagorico, che

$$F' P = \sqrt{\overline{P S}^2 + \overline{F' S}^2}, \; F P = \sqrt{\overline{P S}^2 + \overline{F S}^2}$$

i quali due valori onde potere sviluppare, è sufficiente il badare, che per la similitudine dei due triangoli P Q S, P R G, esistente questa pel parallelismo di costruzione di R G a Q S, si ha la proporzione R G : Q S :: O B : O C, onde

$$R G = O S = \frac{O B \times Q S}{O C} = \frac{O Q \times O C \times O B}{O B \times O C - O C^2} = \frac{O Q \times O B}{O B - O C};$$

e che parimenti essendo $F' S = O F' + O S$, $F S = O F - O S$ ed $O F' = O F = \sqrt{\overline{O B}^2 - \overline{O C}^2}$, sia

$$F' S = \frac{O Q \times O B}{O B - O C} + \sqrt{\overline{O B}^2 - \overline{O C}^2}$$

$$F S = \frac{O Q \times O B}{O B - O C} - \sqrt{\overline{O B}^2 - \overline{O C}^2}$$

e quindi

$$F'P = \sqrt{\overline{OC}^2 - \left(\frac{OQ \times OC}{OB - OC}\right)^2 + \left(\frac{OQ \times OB}{OB - OC}\right)^2 + \frac{2\,OQ \times OB}{OB - OC} \times \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2} + \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}$$

$$F P = \sqrt{\overline{OC}^2 - \left(\frac{OQ \times OC}{OB - OC}\right)^2 + \left(\frac{OQ \times OB}{OB - OC}\right)^2 + \frac{2\,OQ \times OB}{OB - OC} \times \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2} + \overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}$$

che riducendo e trasformando,

$$F'P = \sqrt{\overline{OB}^2 + \left(\frac{OQ}{OB - OC} \times \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}\right)^2 + 2\,OB . \frac{OQ}{OB - OC} \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}}$$

$$FP = \sqrt{\overline{OB}^2 + \left(\frac{OQ}{OB - OC} \times \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{CO}^2}\right)^2 - 2\,OB . \frac{OQ}{OB - OC} \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}}$$

e dopo effettuata la radice

$$F' P = OB + \frac{OQ}{OB - OC} \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}$$

$$F\ P = OB - \frac{OQ}{OB - OC} \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OC}^2}.$$

Questi valori di F' P ed F P sommati assieme dando F' P + F P = 2 O B, ne segue, che le due rette F' P, F P sommando assieme una lunghezza eguale all' asse maggiore A B, il punto P è un punto dell' ellisse, e si può perciò dire che *qualunque retta di lunghezza eguale al semiasse maggiore, venga adattata in una ellisse in modo da avere un suo estremo collocato sull'asse minore, e ch'essa intercetti fra gli assi una lunghezza eguale alla differenza dei due semiassi, avrà l'altro estremo sempre collocato sul perimetro di una ellisse.*

Questa proprietà che ha una retta disposta nell' indicato modo in una ellisse, porge immediatamente la soluzione del quesito della costruzione di detta curva. Infatti tracciate due rette AB, CD, l'una normale all'altra nel loro punto di mezzo O, è sufficiente un listino di carta sul di cui orlo siano segnati tre punti S, T, V, in modo che i due T e V più distanti eguaglino il semiasse maggiore, ed il terzo S offra da una parte in SV il semiasse minore, dall' altra in ST la differenza fra i due semiassi, perchè con esso infiniti punti dell' ellisse sia possibile di potere tracciare, bastando per tale oggetto dare al detto listino la disposizione che chiara apparisce dalla figura, una disposizione cioè che mentre uno dei punti estremi T sia collocato costantemente sull'asse minore, e il punto intermedio S sia collocato sempre sull' asse maggiore, l'altro punto estremo V restando incessantemente per tutte indistintamente le posizioni che può ricevere, un punto della ellisse. Una tale costruzione altrettanto semplice quanto comoda ha suggerito la costruzione del così detto *compasso ad ellisse*, di cui alla Fig. 60 se ne porge il disegno, e alla Fig. 61 la sua applicazione.

Il compasso ad ellisse consta di un disco M soventi metallico e qualche volta anche di legno, e ciò a seconda degli usi a cui può venire destinato, nel quale stanno a croce due scanalature fatte convenientemente e in ciascuna delle quali vi ponno scorrere due maschi A, B, che sorpassano l'altezza del disco di una quantità sufficiente perchè possano venire attraversati da un regolo, il quale può venire fissato ad essi, mediante delle viti che stanno a' loro capi, ed il quale offre ad un suo estremo un calcatojo C. Questi strumenti essendo adoprati pel tracciamento in generale di ellissi sulla carta, essi vengono muniti di piccole puntine alla base del disco, permettendo queste di fare rimanere indipendente il compasso al movimento del calcatoio che viene impresso al regolo onde tracciare l'ellisse con moto continuo.

La Fig. 61 rappresenta la disposizione che deve venire data al compasso in discorso perchè torni adatto il suo impiego. Se presentasi evidente come la curva tracciata col mezzo del calcatoio I, sia una ellisse pel fatto che con esso non riproducesi altro che l'operazione del listino di carta precedentemente indicata, una riproduzione a movimento continuo, tuttavia occorre di vedere quando si possa o non si possa col compasso descrivere un'ellisse.

La distanza che separa i due maschi essendo la differenza che corre fra i due semiassi dell' ellisse, ne segue che stabilita in essi una differenza di due semiassi, si potranno descrivere infiniti ellissi in cui mantengasi costantemente la medesima differenza. Il compasso più non servirà allorchè il raggio del suo disco sarà minore della differenza fra i due semiassi, e questo fatto rendesi evidente col seguire il movimento che si fa tenere all'istrumento. Se infatti questo movimento producesi nella direzione I C, il maschio V cammina verso D, mentre che il maschio V' cammina verso A, e quando quest' ultimo è giunto nel centro della crociera, in allora il calcatoio I è giunto in C, e continuando il movimento nello stesso senso il maschio V' continua il suo cammino verso A, mentre che il maschio V retrocede camminando così verso C, e quando questo è giunto al centro della crociera, il calcatoio è giunto in A, ed il maschio V' colla continuazione del movimento retrocede verso B, mentre che quello V continua la sua direzione; e così di seguito, producendosi nel movimento ellittico del calcatoio un movimento rettilineo di andirivieni dei due maschi, quello V come estremo del regolo, sempre nella crociera che traccia l'asse minore, quello V' sempre nella crociera che traccia l'asse maggiore; ed evidentemente allorachè il calcatoio si trova agli estremi degli assi, i due maschi dovendo essere uno nel centro della crociera, l'altro nelle scanalature, non è possibile descrivere con un compasso ad ellisse, una ellisse, la cui differenza di semiassi sia maggiore del raggio del disco del compasso.

Egli è poi evidente che qualunque punto P del regolo del compasso, descriverà una ellisse parallela a quella descritta dal punto I; ed è altresì evidente che man mano si limiterà la distanza dei due maschi, che è la differenza dei due semiassi, il movimento dei maschi nelle crociere sia di altrettanto più corto, sino a ridursi a zero, ove la distanza fra i due semiassi sia zero, nel quale caso la curva descritta dal calcatoio I, sarebbe un circolo con centro nel centro della crociera, un circolo descritto nello stesso modo col quale lo si descrive mediante i così detti compassi a verga, uno dei mezzi stati indicati fino dai preliminari pel tracciamento della circonferenza del circolo.

Venendo alla considerazione di rette che siano dapprima perpendicolari ad un asse, per esempio all' asse maggiore, sia P Q

(Fig. 62) una di siffatte rette o corde perpendicolari all'asse maggiore A B, la quale per la simmetria stata spiegata al libro secondo, dell'asse rispetto alla curva, è dal detto asse divisa per metà in modo che $PS = PQ$; e vedasi il rapporto corrente fra una tale corda o semicorda coi segmenti da essi formati sull'asse maggiore.

Facciasi centro nel punto P e con raggio P F, vale a dire con raggio eguale alla distanza corrente da un estremo della corda in considerazione al fuoco F dell'ellisse, descrivasi una circonferenza la quale taglierà l'asse maggiore nel punto E ad una distanza $SF = SE$; e conducasi dall'altro fuoco F' la retta F' P, e la si prolunghi sino all' incontro in G colla circonferenza descritta.

Essendo F' F, F' G, due secanti al circolo, ed F' E, F' H le relative parti esterne, pelle note proprietà delle rette tirate in un circolo, vedesi aver luogo la proporzione

$$F'G : F'F :: F'E : F'H$$

nella quale ponendo mente che

$$F'G = F'P + PG = F'P + PF = AB - 2\,OB$$

$$FF' = 2\,OF$$

$$F'E = F'F - EF = 2\,OF - 2\,SF = 2\,(OF - SF) = 2\,OS$$

ed infine essendo R punto di mezzo di F' G, che

$$F'H = F'G - HG = 2\,RG - 2\,PG = 2\,(RG - PG) = 2\,RP$$

si ha l'altra identica proporzione

$$2\,OB : 2\,OF :: 2\,OS : 2\,RP$$

che divisa intieramente per 2 convertesi nella proporzione

$$OB : OF :: OS : RP.$$

Componendo e dividendo questa ultima proporzione, si avrà nel caso primo

$$OB : OB + OF :: OS : OS + RP$$

ovvero

(1) $$OB : OS :: OB + OF : OS + RP$$

nel caso secondo

$$OB : OB - OF :: OS : OS - RP$$

ovvero

(2) $$OB : OS :: OB - OF : OS - RP.$$

Di queste due proporzioni (1), (2), componendo la prima e dividendo la seconda, si avrà

$$OB : OB + OS :: OB + OF : OB + OF + OS + RP$$

$$OB : OB - OS :: OB - OF : OB - OF - OS + RP.$$

Prendendo ad esaminare ciascuna di queste due ultime proporzioni a cui si è pervenuti, scorgesi come

$$OB + OS = OA + OS = AS$$

$$OB + OF = OA + OF = AF$$

$$OB + OF + OS + RP = F'R + OF' + OS + RP = F'P + F'S$$

$$OB - OS = SB$$

$$OB - OF = FB$$

$$OB - OF - OS + RP = F'R - OF' - OS + RP = F'P - F'S$$

e per conseguenza diventino le altre due identiche

$$OB : AS :: AF : F'P + F'S$$

$$OB : SB :: FB : F'P - F'S$$

le quali poi moltiplicate tra loro termine a termine, danno

$$\overline{OB}^2 : AS \times SB :: AF \times FB : \overline{F'P}^2 - \overline{F'S}^2$$

e poichè il triangolo F' P S è rettangolo, così è

$$\overline{F'P}^2 - \overline{F'S}^2 = \overline{PS}^2$$

e quindi

$$\overline{OB}^2 : AS \times SB :: AF \times FB : \overline{PS}^2$$

ovvero

$$\overline{PS}^2 : AS \times SB :: AF \times FB : \overline{OB}^2.$$

Questa proporzione da sè esprime una proposizione che può enunciarsi: *il quadrato di una semicorda perpendicolare all'asse maggiore, sta al prodotto dei segmenti dell' asse da essa formati, come il prodotto delle distanze da un fuoco ai vertici, sta al quadrato del semiasse maggiore.*

Ora, poichè applicando codesto principio alla semicorda perpendicolare sulla metà O dell' asse maggiore A B, si avrebbe la proporzione

$$\overline{OC}^2 : AO \times OB :: AF \times FB : \overline{OB}^2$$

nella quale essendo A O $\times$ O B, un prodotto di due fattori eguali, eguale perciò ad $\overline{OB}^2$, ne avviene che la detta proporzione convertesi in

$$\overline{OC}^2 : \overline{OB}^2 :: AF \times FB : \overline{OB}^2$$

nella quale essendo eguali i conseguenti, sono altresì eguali gli antecedenti, e quindi $AF \times FB = \overline{OC}^2$, cosicchè applicando detto valore di A F $\times$ F B alla proposizione precedente, vedesi risultare

$$\overline{PS}^2 : AS \times SB :: \overline{OC}^2 : \overline{OB}^2.$$

Onde: *il quadrato di una semicorda perpendicolare all' asse maggiore, sta al prodotto dei segmenti dell' asse da essa formati, come il quadrato del semiasse minore, sta al quadrato del semiasse maggiore.* Ma poichè il rapporto che corre fra i quadrati di due semicorde perpendicolari all' asse maggiore e il prodotto dei segmenti dell' asse da ciascuna formati, è un rapporto corrispondente

al rapporto di due quantità costanti, così può enunciarsi la proposizione più generale: *i quadrati delle semicorde perpendicolari all' asse maggiore, stanno ai prodotti dei segmenti dell' asse da ciascuna formati, in un rapporto costante che è quello dei quadrati dei due semiassi.*

A questa proposizione collegansi moltissime deduzioni. Egli è infatti facile di vedere come descritto sull' asse maggiore A B (Fig. 63) di una ellisse A D B C una circonferenza, e poscia innalzato in un punto S dell' asse una perpendicolare la quale incontri l' ellisse in un punto P, e la circonferenza descritta in un punto G, poichè per la proposizione stata or ora dimostrata ha luogo la proporzione

$$\overline{PS}^2 : AS \times SB :: \overline{OC}^2 : \overline{OB}^2$$

e poichè S G è nel circolo medio proporzionale tra A S ed S B, cioè $\overline{SG}^2 = AS \times SB$; e quindi

$$\overline{PS}^2 : \overline{SG}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OB}^2$$

onde la proporzione radice

$$PS : SG :: OC : OB$$

giungesi alla relazione seguente: *il rapporto corrente fra i due semiassi di una ellisse, od ancora quello corrente fra i suoi assi, è eguale al rapporto di due perpendicolari innalzate da un medesimo punto dell' asse maggiore e limitate l'una alla ellisse, l' altra alla circonferenza descritta sull' asse maggiore.*

Questa relazione porge immediatamente un nuovo mezzo di costruzione dell' ellisse per punti. Infatti ogni perpendicolare innalzata su di un punto dell'asse essendo quarta proporzionale dopo gli assi ed una perpendicolare innalzata nello stesso punto sino all' incontro della circonferenza descritta sull' asse maggiore, colla costruzione di tante quarte proporzionali si possono ottenere tante corde proporzionali all'asse maggiore quante si vogliano.

Se osservasi però come A B e C D essendo i due assi dati, che si tagliano perpendicolarmente nel punto di mezzo O, che se sul-

l' asse maggiore e parimenti sull' asse minore si descrivono due circonferenze, e che poi tracciata una retta qualsiasi O G, che intersechi la circonferenza descritta sull' asse minore nel punto H, come menando da detto punto una parallela all'asse maggiore sino all' incontro P di una perpendicolare abbassata sullo stesso asse dal punto G, che a causa dei triangoli O S G, H P G aventi un angolo in G comune, e gli altri due angoli rispettivamente eguali, a motivo di essere H P parallelo con O S: sono simili, epperciò

$$O G : O H : G S : P S$$

vedesi tosto, come P S essendo quarta proporzionale dopo O G = O B semiasse maggiore, O H = O C semiasse minore, e G S perpendicolare all' asse nello stesso punto S; il punto P appartenga all' ellisse, e come quindi rendasi assai facile di trovare tutte le quarte proporzionali che si era detto occorrere, bastando semplicemente di tracciare delle rette dal centro che taglino le due circonferenze descritte l'una sull' asse maggiore, l' altra sull' asse minore, e poscia dai punti d' intersezione con quest' ultima, menare delle parallele all'asse maggiore sino ad incontrare le perpendicolari abbassate su questo dai punti d'intersezione delle rette tirate dal centro colla circonferenza descritta sull' asse maggiore, per essere tutti questi punti così ottenuti altrettanti punti appartenenti all' ellisse. Più comodo però presentasi di dividere come lo indica la stessa Fig. 63, la circonferenza grande ad esempio in 24 parti eguali, e poscia tirare i diversi raggi, e dopo questi le rette 1—1, 2—2, 3—3, 4—4, 5—5, che risulteranno perpendicolari all' asse maggiore, e per ultimo menare dal punto 1' una parallela all' asse sino all' incontro della perpendicolare passante pel punto 1, dal punto 2' una parallela sino all' incontro della ordinata passante pel punto 2, e così successivamente per tutti gli altri punti, per avere in tutte queste intersezioni altrettanti punti appartenenti all' ellisse voluta.

La proporzionalità corrente fra le lunghezze di due perpendicolari innalzate in un medesimo punto dell' asse maggiore di una ellisse e limitate l' una al perimetro della curva, l' altra a quello del circolo descritto sull'asse maggiore, porge mezzo alla deduzione del valore dell'area o misura superficiale dell' ellisse. Egli è infatti

agevole di vedere che se in un circolo descritto sull'asse maggiore A B (Fig. 64) di una ellisse si inscrive un poligono, e quindi dai singoli vertici di siffatto poligono si abbassano delle perpendicolari sull' asse maggiore, queste perpendicolari mentre scompongono il circolo in tanti trapezi, scompongono altresì l' ellisse in un eguale numero di trapezi, e quindi sia l'area dell'ellisse eguale alla somma di tutti i suoi trapezi in cui venne scomposto e deduttibile dal rapporto di essi con quelli appartenenti al circolo, figura della quale se ne conosce l' area.

Si considerino perciò due di siffatti trapezi, l'uno R S I H appartenente al circolo, l' altro P R S Q appartenente all' ellisse, e si veda il rapporto area che corre fra detti due trapezi. L' area del trapezio R S I H essendo eguale ad $\frac{RH + SI}{2} \times RS$, e l'area del trapezio R S Q P essendo eguale ad $\frac{RP + SQ}{2} \times RS$, ne deriva che il rapporto area dei due trapezii è il rapporto delle due dette espressioni, e poichè le medesime hanno un fattore comune che è $\frac{1}{2} RS$, così si ha che il rapporto delle due superficie $\frac{RSQP}{RSIH}$ è eguale a $\frac{RP + SQ}{RH + SI}$. Ora osservando che ogni perpendicolare innalzata sull' asse maggiore di una ellisse è quarta proporzionale dopo i due semiassi e la perpendicolare innalzata nello stesso punto e limitata alla circonferenza del circolo descritta sull' asse maggiore, vedesi tosto che

$$RP = \frac{OC}{OB} . RH, \quad SQ = \frac{OC}{OB} . SI$$

e la somma di R P con S Q essere perciò espressa da

$$RP + SQ = \frac{OC}{OB} (RH + SI)$$

onde

$$\frac{RP + SQ}{RH + SI} = \frac{OC}{OB}$$

ma poichè $\frac{RSQP}{RSIH}=\frac{RP+SQ}{RH+SI}$, così è

$$\frac{RSQP}{RSIH}=\frac{OC}{OB}.$$

Il rapporto di due trapezi qualunque, appartenenti l'uno all'ellisse, l'altro al circolo descritto sull'asse maggiore, ed amendue formati dalle perpendicolari abbassate sull'asse maggiore, essendo nel rapporto dei due semiassi, è dato perciò di conchiudere: che *il rapporto corrente fra l'area di una ellisse e l'area di un circolo descritto sul suo asse maggiore, è eguale al rapporto corrente fra il semiasse minore ed il semiasse maggiore.* Cosicchè chiamando con s l'area dell'ellisse, con S quella del circolo descritto sull'asse maggiore O B, si avrà che $\frac{s}{S}=\frac{OC}{OB}$, e quindi $s=S\times\frac{OC}{OB}$. Ma S esprimendo l'area di un circolo di raggio eguale ad O B, epperciò $S=\pi\,\overline{OB}^2$, ne deriva che $s=\pi\,\overline{OB}^2.\frac{OC}{OB}$, ossia $s=\pi\,.\,OB\,.\,OC$. Questa espressione mostra ad evidenza come *l'area dell'ellisse è eguale al prodotto di tre fattori, che sono l'uno il rapporto della circonferenza al diametro di un circolo avente per diametro l'unità, gli altri due sono i due semiassi.*

La relazione corrente fra le semicorde perpendicolari all'asse maggiore ed i segmenti su questo da esse formati, è perfettamente identica alla relazione fra le semicorde condotte perpendicolarmente all'asse minore ed i segmenti su questo da esse formate.

Infatti dalla relazione precedente avendosi (Fig. 65) la proporzione

$$\overline{OB}^2:\overline{OC}^2::AS\times SB:\overline{PS}^2$$

poichè $BS=OB+OS$ ed $SA=OB-OS$, ne avviene che $AS\times SB=(OB+OS)(OB-OS)=\overline{OB}^2-\overline{OS}^2$, e quindi la suddetta proporzione convertesi nell'eguale

$$\overline{OB}^2:\overline{OC}^2::\overline{OB}^2-\overline{OS}^2:\overline{PS}^2$$

ovvero

$$\overline{OB}^2 : \overline{OB}^2 - \overline{OS}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{PS}^2$$

la quale divisa dà per risultato

$$\overline{OB}^2 : \overline{OS}^2 :: \overline{OC}^2 : \overline{OC}^2 - \overline{PS}^2.$$

Ora essendo $OS = PQ$, e l'ultimo termine della proporzione la differenza di due quadrati, epperciò ritenibile come risultato del prodotto della somma per la differenza delle radici, cioè $\overline{OC}^2 - \overline{PS}^2 = (OC + PS)(OC - PS) = DQ \times QC$, così la proporzione a cui si era pervenuti è convertibile nella seguente

$$\overline{OB}^2 : \overline{PQ}^2 :: \overline{OC}^2 : DQ \times QC$$

e quindi nella sua eguale

$$\overline{OB}^2 : \overline{OC}^2 :: \overline{PQ}^2 : DQ \times QC$$

la quale mostra ad evidenza come *il rapporto fra il quadrato di una semicorda perpendicolare all'asse minore e il prodotto dei segmenti da essa formati su tale asse, è eguale al rapporto dei quadrati dei semiassi, epperciò in un rapporto costante.* In generale si può quindi dire che *i quadrati delle semicorde perpendicolari agli assi stanno al prodotto dei rispettivi segmenti da esse formati, in un rapporto costante ed eguale a quello dei quadrati dei due semiassi.*

Venendo per ultimo alla considerazione di corde qualsiansi parallele tra loro, si tiri nell'ellisse A D B C una corda F H che si prolunghi sino in N all'incontro dell'asse, e pel punto di mezzo Z si tiri col centro O la retta o diametro M *m*, ed infine pel punto M si conduca una tangente all'ellisse, che incontrerà l'asse nel punto G, e sarà per le ragioni dette al libro secondo, una parallela ad F H.

La relazione che corre fra le perpendicolari innalzate da un medesimo punto dell'asse maggiore e limitate l'una al perimetro del-

l' ellisse, l' altra alla circonferenza descritta sull' asse maggiore, fa sì che descrivendo sull' asse maggiore A B una semicirconferenza, indi dal punto M abbassando una perpendicolare M K sull' asse e prolungandola sino all' incontro della semicirconferenza in U, si avrà che qualunque altra perpendicolare R X' innalzata da un punto R sull' asse e limitata in F dall' ellisse ed in Y dalla semicirconferenza, fornisce la proporzione K M : K U :: R F : R Y.

E poichè tirando la retta G U e prolungandola sino all' incontro della perpendicolare stata innalzata nel punto R, si hanno i quattro triangoli simili R G X', K G U, R G X, K G M che forniscono l'altra proporzione K M : K U :: R X : R X', ne segue che essendo R X maggiore di R F a motivo che la retta G M venne tracciata per costruzione tangente all' ellisse, anche la retta R X' deve essere maggiore di R Y, e quindi il punto X' non può trovarsi sulla semicirconferenza, e conseguentemente la retta G U è tangente alla semicirconferenza. Questa relazione dei punti di contatto di due tangenti condotte da un medesimo punto dell' asse maggiore, l'una all'ellisse, l'altra alla semicirconferenza descritta sull'asse maggiore, di trovarsi entrambi collocati su di una retta perpendicolare all' asse maggiore, somministra il mezzo di tracciare una tangente ad una ellisse, allorchè il punto dal quale essa deve venire tracciata sia dato sul prolungamento dell' asse maggiore, per esempio in G, che in allora descrivendo due semicirconferenze l'una sull' asse maggiore, l'altra su G O, dal loro punto d'intersezione U, abbassando una perpendicolare sull' asse maggiore, si avrà nel punto M d' intersezione di questa coll' ellisse il punto di contatto della tangente a condursi.

Un' altra conseguenza è pure data di ritrarre dalla relazione suddetta dei punti di contatto delle tangenti tirate da un medesimo punto dell' asse all' ellisse ed alla circonferenza descritta sul suo asse maggiore, ed è quella che essendo G U tangente alla semicirconferenza è ad essa O U perpendicolare, e quindi il triangolo O U G è un triangolo rettangolo, nel quale il cateto O U è eguale ad O B come raggi dello stesso circolo, ed eguale perciò al semiasse maggiore, e dal quale hanno luogo le due proporzioni

$$OG : OB :: OB : OK$$

$$\overline{OG}^2 : \overline{OB}^2 :: OG : OK$$

la prima delle quali potendo ancora enunciarsi con

$$\overline{OG}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OK}^2$$

trasforma la seconda in

$$\overline{OG}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OK}^2 :: OG : OK.$$

Premessa così l' esistenza della proporzione

$$\overline{OG}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{OK}^2 :: OG : OK$$

nel vertice B dell' ellisse si innalzi una perperpendicolare all' asse sino all' incontro in I col diametro M m, e pel punto H si tiri una parallela all'asse C D che incontrerà il diametro nel punto T e l'asse maggiore nel punto L. I due triangoli O B I, O K M essendo simili, danno la proporzione

$$\overline{OB}^2 : \overline{OK}^2 :: OBI : OKM$$

ma essendo

$$\overline{OB}^2 : \overline{OK}^2 :: OG : OK$$

così è

$$OG : OK :: OBI : OKM.$$

Ora i due triangoli O M G, O M K avendo medesima altezza, e quindi le loro aree stando come le loro basi, cioè come O G ad O K, vedesi tosto come abbiasi la proporzione

$$OMG : OMK :: OBI : OKM$$

nella quale essendo eguali i conseguenti sono pure eguali gli antecedenti, e quindi è il triangolo O M G equivalente col triangolo O B I. E poichè da quantità eguali togliendo quantità eguali, i resti sono ancora eguali, così dai due triangoli O M G, O B I togliendo il triangolo O M K, si ha che il trapezio K B I M è equivalente al triangolo M K G.

Considerando i due triangoli G M K, N H L è dato di vedere che essi sono simili e quindi avere luogo la proporzione

$$MKG : NHL :: \overline{MK}^2 : \overline{HL}^2$$

ma poichè M K ed H L sono due semicorde perpendicolari all' asse maggiore, e quindi il rapporto corrente fra i quadrati di esse è eguale a quello corrente fra il prodotto dei segmenti da ciascuna di esse formati sull' asse, cioè

$$\overline{MK}^2 : \overline{HL}^2 :: AK \times KB : AL \times LB$$

così è

$$GMK : NHL :: AK \times KB : AL \times LB.$$

Essendo però $AK = OB + OK$, $KB = OB - OK$ ed $AK \times KB = (OB + OK)(OB - OK) = \overline{OB}^2 - \overline{OK}^2$, e medesimamente $AL = OB + OL$, $LB = OB - OL$ ed $AL \times LB = (OB + OL)(OB - OL) = \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2$, così è

$$GMK : NHL :: \overline{OB}^2 - \overline{OK}^2 : \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2.$$

I triangoli O B I, O L T, O K M essendo simili, epperciò dando le proporzioni

$$OBI : OLT :: \overline{OB}^2 : \overline{OL}^2$$

$$OBI : OKM :: \overline{OB}^2 : \overline{OK}^2$$

che divise risultano

$$OBI - OLT : OBI :: \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2 : \overline{OB}^2$$

$$OBI - OKM : OBI :: \overline{OB}^2 - \overline{OK}^2 : \overline{OB}^2$$

nelle quali essendo comuni i conseguenti, gli antecedenti formano proporzione e si ha

$$OBI - OLT : OBI - OKM :: \overline{OB}^2 - \overline{OL}^2 : \overline{OB}^2 - \overline{OK}^2$$

scorgesi tosto come la proporzione a cui si era pervenuti diventi

$$MKG : NHL :: OBI - OKM : OBI - OLT$$

ovvero

$$MKG : NHL :: KBIM : LBIT$$

nella quale essendo, per quanto già venne dimostrato, M K G = K B I M, eguali cioè gli antecedenti, sono altresì eguali i conseguenti, e quindi il triangolo N H L equivalente al trapezio L B I T. Se ora aggiungesi tanto al triangolo N H L quanto al trapezio L B I T, il quadrilatero O L H Z, vedesi tosto il triangolo, divenire il triangolo O N Z, e il trapezio divenire la figura O Z H T I B. Ma poichè il triangolo O B I è equivalente al triangolo O M G, è duopo conchiudere che ciò che manca al triangolo O N Z per divenire il triangolo O M G è eguale a ciò che manca alla figura O Z H T I B per divenire il triangolo O B I, cioè il triangolo Z H T equivalente col trapezio Z M N G, e poichè Z H T è eguale al triangolo K'F Z, così anche questo è equivalente col trapezio ZMNG.

Se si tira una corda fh parallela alla corda F H, e che perciò viene divisa per metà in z, e se si abbassa dall'estremo f una perpendicolare, è agevole di vedere con ragionamento analogo a quello tenuto, che il triangolo fzc è equivalente col trapezio M G N' z. Ora i due triangoli fzc, Z F K' essendo simili come aventi i lati paralleli, epperciò avendo luogo la proporzione

$$ZFK' : zfc :: \overline{FZ}^2 : \overline{fz}^2$$

ha pur luogo l'altra proporzione

$$MGNZ : MGN'z :: \overline{FZ}^2 : \overline{fz}^2;$$

ma il trapezio M G N Z essendo eguale alla differenza fra i due triangoli O M G, O N Z, e quello M G N' z essendo eguale alla differenza fra i due triangoli O M G, O N' z, così si ha la proporzione

$$OMG - ONZ : OMG - ON'z :: \overline{FZ}^2 : \overline{fz}^2.$$

Ma a causa della similitudine dei triangoli O M G, O Z N, O z N', avendosi

$$OMG : OZN :: \overline{OM}^2 : \overline{OZ}^2$$

$$OMG : O z N' :: \overline{OM}^2 : \overline{Oz}^2$$

che divise danno

$$OMG - OZN : OMG :: \overline{OM}^2 - \overline{OZ}^2 : \overline{OM}^2$$

$$OMG - O z N' : OMG :: \overline{OM}^2 - \overline{Oz}^2 : \overline{OM}^2$$

le quali avendo comuni i conseguenti, gli antecedenti formano proporzione, così si ha

$$OMG - OZN : OMG - O z N' :: \overline{OM}^2 - \overline{OZ}^2 : \overline{OM}^2 - \overline{Oz}^2.$$

Osservando per ultimo che $\overline{OM}^2 - \overline{OZ}^2 = (OM + OZ)(OM - OZ) = m Z \times Z M$, $\overline{OM}^2 - \overline{Oz}^2 = (OM + Oz)(OM - Oz) = m z \times z M$, conchiudesi essere

$$\overline{FZ}^2 : \overline{fz}^2 :: m Z \times Z M : m z \times z M$$

espressione che attesta ad evidenza, come *i quadrati delle semicorde qualsiansi purchè parallele tra loro, sono proporzionali ai prodotti dei segmenti fatti sul diametro che le divide per metà.* E siccome tirando dal centro O un diametro parallelo ad FH, che è il coniugato di M m, si avrebbe $\overline{FZ}^2 : \overline{VO}^2 :: m Z \times Z M : O m \times O M$ ed $O m \times O M = \overline{OM}^2$, così è

$$\overline{FZ}^2 : M Z \times Z m :: \overline{VO}^2 : \overline{OM}^2.$$

Onde la relazione che corre fra i quadrati delle semicorde perpendicolari agli assi ed i segmenti dalle medesime formate sugli assi, è del tutto analoga a quella corrente fra i quadrati delle se-

micorde che taglino un diametro e sieno parallele al diametro coniugato, poichè il rapporto corrente fra il quadrato di ciascuna di dette semicorde e il prodotto dei segmenti formati sul diametro è costante ed eguale a quello corrente fra i quadrati dei due semidiametri coniugati.

Questa nuova relazione porge il mezzo di potere assai facilmente inscrivere in un parallelogramma una ellisse, imperocchè due tangenti ad una ellisse che siano parallele, avendo i loro punti di contatto collocati su di un medesimo diametro che è il coniugato di quello che potrebbesi condurre dal centro dell'ellisse parallelamente alle tangenti, ne avviene che i lati di ogni parallelogramma si possono considerare come le quattro tangenti condotte agli estremi di due diametri coniugati, epperciò le rette che congiungono le metà dei lati opposti del parallelogramma, i diametri dell'ellisse a costrurre. Volendo intanto vedere l'inscrizione di una ellisse in un parallelogramma, si parta dal caso di volere inscrivere una ellisse in un rombo A B C D (Fig. 66). Poichè il rombo ha i lati adiacenti eguali, ne avviene che le rette E F, H G che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti sono eguali, e quindi l'ellisse dovendo passare pei punti E, G, F, H, ed essendo E F, G H due diametri eguali, vedesi tosto come detti diametri, per la ragione che già venne detta al libro secondo, sono parallele alle corde supplementarie degli assi, e quindi ove si tirino le due diagonali D B, A C del rombo, esse saranno le traccie degli assi. Ma per tracciare l'ellisse, sapendo che i quadrati delle semicorde parallele ad un diametro coniugato stanno al prodotto dei segmenti formati sull' altro diametro come i quadrati dei due semidiametri, e nel caso in discorso essendo i diametri eguali, epperciò ancora eguali i semidiametri, sono perciò i quadrati delle semicorde parallele ad un diametro parallelo ad una corda supplementaria degli assi, eguali al prodotto dei segmenti da esse formati sull'altro diametro coniugato parallelo all'altra corda supplementaria, ne avviene che un tale rapporto essendo l'identico con quello delle semicorde condotte perpendicolarmente al diametro di un circolo, le semicorde tracciate perpendicolarmente al diametro di un circolo di diametro eguale al diametro dell' ellisse a costrurre saranno le semicorde parallele ad uno dei due diametri coniugati in discorso che formeranno sull'altro dei segmenti eguali ai segmenti formati dalle semicorde perpendicolari nel circolo.

Laonde fatto centro in O e descritta una circonferenza, poscia innalzate per diversi punti del diametro H G delle perpendicolari sino all'incontro della circonferenza, e per i medesimi punti condotte delle parallele al diametro E F, non si avranno su di queste ultime che a portare, come emerge dalla figura stessa, le lunghezze che dallo stesso punto corrono alla circonferenza del circolo, per ottenere così tanti punti, tutti appartenenti all'ellisse voluta, e che perciò non avranno che a venire convenientemente raccordati.

Volendo inscrivere una ellisse in un parallelogramma qualsiasi come quello A B C D (Fig. 67), operasi in modo analogo. I quadrati delle semicorde parallele ad un diametro essendo al prodotto dei segmenti formati sul diametro coniugato, nel rapporto stesso dei quadrati dei due semidiametri, ne avviene che condotte le rette E F, I G che uniscono i punti di mezzo dei lati opposti del parallelogramma, essendo queste i diametri dell'ellisse a costrursi, non si avrà che a descrivere dapprima una ellisse avente per assi E F ed H L = I G, chè le semicorde perpendicolari ad E F condotte in detta ellisse sono coi segmenti formati sull' asse maggiore E F nello stesso rapporto dei quadrati dei due semiassi e perciò ancora dei quadrati dei due semidiametri, siccome lunghezze eguali.

Laonde condotte nella ellisse tracciata, per diversi punti di E F tante corde perpendicolari ad E F, e per i medesimi punti delle parallele al diametro I L, non si avranno che a portare su di queste ultime delle lunghezze che sieno eguali alle perpendicolari partenti dallo stesso punto e limitate alla ellisse, perchè tutti i detti punti che così si ottengono appartengono all' ellisse desiderata, e quindi il tracciamento di essa sia condotto al solo raccordamento conveniente di punti tra loro.

Relazione fra le rette tirate in una iperbole. — Fra le molte rette che è dato di potere tracciare nell' iperbole, e conseguentemente fra le molte relazioni che sarebbe dato di potere stabilire, si limita qui il trattamento alle relazioni fra le principali corde come sono quelle perpendicolari all'asse traverso, ed ai principali diametri quali sono gli assintoti. Rappresentando la Fig. 68 una iperbole, in A B il suo asse trasverso, in C D il suo asse non trasverso, in F ed F' i due fuochi della curva, si tracci una corda qualsiasi P Q che sia perpendicolare all' asse trasverso. Essendo quest'asse una linea di simmetria, la corda P Q è da questo divisa

in due parti eguali, sicchè è P S = S Q. Se ora con centro nel punto P e con raggio P F descrivesi una circonferenza, indi si tirino i due raggi vettori P F', P F, e quello F' P si prolunghi sino in G e la distanza F' H dividesi per metà in R, si vedrà come le due rette F' E, F' G, che sono rispetto al circolo descritto con centro in P due secanti, diano la proporzione

$$F'G : F'E :: F'F : FH'$$

nella quale badando come $F'G = 2RH + 2PH = 2(RH + PH) = 2PR$, $F'F = 2OF$, $F'E = 2OF + 2SF = 2(OF + SF) = 2OS$, $F'H = F'P - PH = F'P - PF = AB = 2OB$, vedesi come possa scambiarsi nell'altra proporzione

$$2PR : 2OF :: 2OS : 2OB$$

dalla quale deducesi

$$PR : OF :: OS : OB$$

ovvero

$$OB : OF :: OS : PR.$$

Questa proporzione a cui si è pervenuti, si componga e si divida, nel primo caso si avrà

$$OB : OB + OF :: OS : OS + PR$$

ovvero

(1) $$OB : OS :: OB + OF : OS + PR$$

nel secondo caso

$$OB : OB - OF :: OS : OS - PR$$

ovvero

(2) $$OB : OS :: OB - OF : OS - PR$$

Componendo la proporzione (1) e dividendo quella (2), si ottiene

$$OB : OB + OS :: OB + OF : OB + OF + OS + PR$$

$$OB : OB - OS :: OB - OF : OB - OF - OS + PR.$$

Ora badando che $OB + OS = AS$, $OB + OF = F'B$, $OB + OF + OS + PR = F'R + F'O + OS + PR = F'P + F'S$,

$OB - OS = SB$, $OB - OF = FB$, $OB - OF - OS + PR = F'R - F'O - OS + PR = F'P - F'S$, viene con opportune sostituzioni ad aversi le due proporzioni

$$OB : AS :: F'B : F'P + F'S$$

$$OB : SB :: FB : F'P - F'S$$

le quali moltiplicate termine a termine daranno

$$\overline{OB}^2 : AS \times SB :: F'B \times FB : \overline{F'P}^2 - \overline{F'S}^2.$$

Ma poichè il triangolo $F'PS$ è un triangolo rettangolo, così $\overline{F'P}^2 - \overline{F'S}^2 = \overline{PS}^2$, e quindi

$$\overline{OB}^2 : AS \times SB :: F'B \times FB : \overline{PS}^2$$

ovvero

$$\overline{PS}^2 : AS \times SB :: F'B \times FB : \overline{OB}^2.$$

Questa proporzione attesta ad evidenza, come *il rapporto fra il quadrato di una semicorda perpendicolare all'asse trasverso ed il prodotto fra i due segmenti da essa formati, sia eguale al rapporto corrente fra il prodotto delle distanze da un vertice ai fuochi, ed il quadrato del semi-asse trasverso.* Quest'ultima ragione essendo formata da quantità costanti per tutte le corde che si possano condurre perpendicolarmente all'asse trasverso, così ne avviene che *il rapporto corrente fra i quadrati delle semicorde perpendicolari all'asse trasverso ed il prodotto dei segmenti su questo da esse formati è un rapporto costante.*

Poichè nell' ellisse il prodotto delle distanze da un vertice ai due fuochi è eguale all' asse minore, così la lunghezza dell' asse non trasverso nell'iperbole si limita con una retta il cui quadrato sia eguale al prodotto delle distanze da un vertice ai due fuochi. Il lato di un quadrato essendo la media proporzionale fra i due lati di un rettangolo equivalente, così dati i fuochi F ed F' di una iperbole, si troverà l'asse non trasverso descrivendo sulla retta che unisce i fuochi una semicirconferenza e poscia innalzando in un

vertice, per esempio B, una perpendicolare la quale incontrerà la semicirconferenza in un punto I che darà nella lunghezza B I il semi-asse non trasverso richiesto. Medesimamente ove fossero dati i due assi A B, C D si troverebbero i fuochi formando il rettangolo I K L M sui due assi, e poscia con centro nel centro dell'iperbole e con raggio eguale ad O I descrivendo una semicirconferenza che taglierà l'asse trasverso in due punti F, F', che saranno i fuochi desiderati.

Il rettangolo costrutto sui due assi A B, C D, quello A B che segna la distanza fra i due vertici dell'iperbole e quello C D determinato nel modo che venne detto, dà nelle diagonali L I, K M due diametri nell'iperbole, i quali sono coniugati, e tali che col loro prolungamento essi non giungono neppure all'infinito ad incontrare la curva, mantenendosi così due diametri non trasversi. A dimostrare come le diagonali del rettangolo I K L M sieno due diametri i quali non incontrino neppure all'infinito l'iperbole, giova premettere una proposizione geometrica di qualche importanza. Se per un punto qualunque V di una iperbole si conduce una corda perpendicolare all'asse trasverso e la si prolunga da ambe le parti sino all'incontro colle suddette diagonali o diametri, ne deriva che per la similitudine dei triangoli rettangoli O B I, O X T come aventi un angolo comune, ha luogo la proporzione

$$(1) \qquad \overline{OB}^2 : \overline{BI}^2 :: \overline{OX}^2 : \overline{XT}^2.$$

Ma essendo per la proposizione precedentemente dimostrata $\overline{OB}^2 : \overline{BI}^2 :: AX \times BX : \overline{XV}^2$, ed $AX = OX + OB$, $BX = OX - OB$, e quindi $AX \times BX = (OX + OB)(OX - OB) = \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2$, la suddetta proporzione convertesi in

$$\overline{OB}^2 : \overline{BI}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 : \overline{XV}^2.$$

Questa proporzione avendo con quella (1) la prima ragione eguale, le seconde ragioni formano proporzione e si ha

$$\overline{OX}^2 : \overline{XT}^2 :: \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 : \overline{XV}^2$$

oppure

$$\overline{OX}^2 : \overline{OX}^2 - \overline{OB}^2 :: \overline{XT}^2 : \overline{XV}^2$$

la quale divisa dà

$$\overline{OX}^2 : \overline{OB}^2 :: \overline{XT}^2 : \overline{XT}^2 - \overline{XV}^2$$

ovvero

$$\overline{OX}^2 : \overline{XT}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{XT}^2 - \overline{XV}^2.$$

Ora essendo

$$\overline{XT}^2 - \overline{XV}^2 = (XT + XV)(XT - XV) = NV \times TV$$

la proporzione a cui erasi pervenuti si convertirà nell'altra

$$\overline{OX}^2 : \overline{XT}^2 :: \overline{OB}^2 : NV \times TV$$

nella quale però per essere come dalla proporzione ([1])

$$\overline{OX}^2 : \overline{XT}^2 :: \overline{OB}^2 : \overline{BI}^2$$

si ridurra ad

$$\overline{OB}^2 : \overline{BI}^2 :: \overline{OB}^2 : NV \times TV.$$

Essendo in questa ultima proporzione eguali gli antecedenti, sono altresì eguali i conseguenti, e quindi è $\overline{BI}^2 = NV \times TV$, ossia *il quadrato del semi-asse minore è eguale al rettangolo avente per lati le distanze di un punto dell'iperbole ai punti in cui una corda perpendicolare all'asse trasverso viene ad incontrare gli assintoti.*

Da questa proposizione mostrasi evidente come dovendo il prodotto delle due distanze V N, V T eguagliare il quadrato di B I, ove l'assintoto O I venisse ad incontrare l'iperbole, la parte T V per quella corda che verrebbe tracciata da un tale punto si ridurrebbe a zero, ed in allora non sarebbe più vera la proposizione stata dimostrata. Mentrechè per l'appunto, le corde che mano mano si possono condurre perpendicolarmente all'asse trasverso costantemente allontanandosi dal vertice dell'iperbole, crescendo in lunghezza per la parte N V debbono necessariamente diminuire nella

parte T V, affinchè il loro prodotto sia costantemente eguale a $\overline{BI}^2$, ma non possono in questa parte ridursi a zero, sicchè è dato conchiudere che *le diagonali del rettangolo formato sui due assi di una iperbole sono due diametri amendue non trasversi, essi sono gli assintoti dell' iperbole.*

Relazione delle rette tirate in una parabola. — Del pari che nella iperbole, così nella parabola, qui non si trattano che le relazioni correnti fra le corde condotte parallelamente alla direttrice, perpendicolarmente perciò all' asse. Rappresenti la Fig. 69 una parabola in cui A B ne è la direttrice, F il fuoco, C E l' asse, e si conduca per un punto qualsiasi P una corda P Q parallelamente alla direttrice. Questa corda sarà divisa per metà dall'asse nel punto S a motivo della simmetria già stata spiegata al libro secondo dell' asse colla curva. Se ora osservasi come conducendo il raggio vettore F P formasi un triangolo rettangolo F P S, al quale applicando il teorema pittagorico si può avere l'eguaglianza $\overline{PS}^2 = \overline{PF}^2 - \overline{FS}^2$, vedesi ben tosto come essendo $PF = PR = SC$, si abbia $\overline{PS}^2 = \overline{CS}^2 - \overline{FS}^2$. Ma $CS = CF + FS$, $CV = VF$, e $\overline{CS}^2 = \overline{CF}^2 + 2\,CF \times FS + \overline{FS}^2$, ed ancora

$$\overline{CS}^2 = \overline{FS}^2 + 2\,CF\,(FS + FV) = \overline{FS}^2 + 2\,CF \times SV.$$

Da questa espressione ricavasi come *il quadrato di una semicorda perpendicolare all'asse della parabola è eguale al prodotto di una distanza fissa, quale è quella corrente dal fuoco alla direttrice, per il doppio del segmento formato sull'asse.*

Il rapporto corrente fra i quadrati di due semicorde essendo quello dei loro valori, ed i loro valori essendo il prodotto di due quantità, di cui l'una sempre costante, è così il detto rapporto l'identico di quello corrente fra le altre, epperciò *il rapporto corrente fra i quadrati delle semicorde perpendicolari all' asse della parabola, è eguale a quello dei segmenti da esse formati sull'asse.*

QUA

DELLE FORMOLE CONTE

VALORI

Quadrato	Rettangolo	Parallelogramma	TRIANGOLO	
			Equilatero	Scaleno
X = lato	B, b = lati	B = base H = altezza	L = lato H = altezza	a, b, c = lati B = base p = semiperimetro H = altezza
$S=X^2$	$S=A\times B$	$S=B\times H$	$H=\frac{1}{2}L\sqrt{3}$ $S=\frac{1}{4}L^2\sqrt{3}$	$S=\frac{B\times H}{2}$ $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

VALORI

Corda C che sottende in un circolo arco doppio di quello sotteso da corda c

$$C=\frac{c}{R}\sqrt{4R^2-c^2}$$

—

Corda C che sottende in un circolo arco somma di quello sotteso da due corde A e B

$$C=\frac{B}{2R}\sqrt{4R^2-A^2}+\frac{A}{2R}\sqrt{4R^2-B^2}$$

Corda c che sottende in un circolo arco metà di quello sotteso da corda C

$$c=\sqrt{2R^2-R\sqrt{4R^2-C^2}}$$

—

Corda A che sottende in un circolo arco differenza di quello sotteso da due corde C e B

$$A=\frac{C}{2R}\sqrt{4R^2-B^2}\pm\frac{B}{2R}\sqrt{4R^2-C^2}$$

Lato *l* del triangolo equilatero inscritto in un circolo

$$l=R\sqrt{3}$$

—

Lato *l* del quadrato inscritto in un circolo

$$l=R\sqrt{2}$$

—

Lato *l* del decagono regolare inscritto in un circolo

$$l=\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

NB. S = area,

DRO

NUTE NEL LIBRO TERZO

SUPERFICIE

Trapezio	Poligono	CIRCOLO — Circolo	CIRCOLO — Settore	CIRCOLO — Corona circolare	Ellisse
B, *b* = basi H = altezza	P = perimetro H = apotema	C = circonferenza R = raggio D = diametro C : D :: π : 1	A = arco G = angolo	C, *c* = circonferenza R, *r* = raggi	2 A = asse magg. 2 B = asse min.
$S=\frac{H(B+b)}{2}$	$S=\frac{H.P}{2}$	$S=\frac{C.R}{2}$ $C=2\pi R=2\pi D$ $S=\pi R^2$	$S=\frac{A\times R}{2}$ $A=\frac{G\times C}{360}$	$S=\frac{C+c}{2}\times R-r$	$S=\pi.A.B$

LINEE

Apotema P di un poligono di lato l inscritto in un circolo

$$P=\frac{1}{2}\sqrt{4R^2-l^2}$$

—

Apotema dell'esagono regolare inscritto in un circolo

$$P=\frac{1}{2}R\sqrt{3}$$

—

Apotema di un quadrato inscritto in un circolo

$$P=\frac{R}{\sqrt{2}}$$

R = raggio del circolo.

Lato L di un poligono circoscritto ad un circolo e simile ad un poligono inscritto di lato l

$$L=\frac{2R\times l}{\sqrt{4R^2-l^2}}$$

—

Lato l di un poligono inscritto in un circolo e simile al poligono di lato L e di apotema P circoscritto al circòlo

$$l=\frac{L\times P}{R}$$

Raggio del circolo circoscritto ad un poligono di lato l e di apotema P

$$R=\frac{1}{2}\sqrt{4P^2+l^2}$$

—

Raggio del circolo circoscritto al triangolo equilatero di lato l

$$R=\frac{l}{\sqrt{3}}$$

—

Raggio del circolo inscritto in un poligono di apotema P

$$R=P$$

PROBLEMI.

1.° — *Dividere una data retta nello stesso rapporto in cui è divisa un' altra.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 1).

Risoluzione 1.ª — Sia a la retta a dividersi nello stesso rapporto in cui è divisa la retta b.

Si tirino due rette ad angolo, si porti una distanza $AB = b$ ed $AC = a$, si segnino sulla retta A B i punti in cui la retta data b è divisa, e per questi diversi punti D, E si menino diverse parallele alla retta B C, le quali verranno a dividere la retta A C nei punti F e G, tali che sarà $AB : AE : AD :: AC : AG : AF$, vale a dire nello stesso rapporto in cui è divisa la retta A B.

Non si avranno perciò che a portare sulla retta a ed a partire da un suo estremo, due distanze eguali ad A F, A G, perchè sia detta retta a divisa nello stesso rapporto della retta b.

Dimostrazione. — Essendosi condotto E G parallelo a B C, e parimenti D F parallelo a B C, risultano i triangoli A B C, A E G, A D F tutti simili tra di loro come aventi un angolo comune e gli altri eguali perchè tutti corrispondenti, quindi i diversi lati omologhi sono proporzionali, epperciò esiste la proporzione $AB : AC :: AE : AG :: AD : AF$. L' esistenza di una tale proporzione è altresì evidente dopo il primo teorema della pag. 224.

La retta A C essendo così divisa nello stesso rapporto della retta A B, e per conseguenza nello stesso rapporto della b, è pure la sua eguale a divisa in un' eguale rapporto colle distanze A F, A G.

(Vedi Tavola XXV, Fig. 2).

Risoluzione 2.ª — Si tratti di dividere la retta C D nello stesso rapporto in cui è divisa la retta A B.

Si dispongano le due rette date per modo che siano parallele,

e si conducano le rette C A, D B, e si prolunghino sino a che vengano ad incontrarsi nel punto O. Da questo punto si facciano passare delle rette per tutti i punti di divisione della retta data A B, e si prolunghino di tanto sino a che vengano a tagliare la retta data C D, che così verrà divisa nello stesso rapporto in cui è divisa la A B.

Dimostrazione. — Considerando i due triangoli C D O ed A B O che hanno un angolo comune in O, il lato A B parallelo a C D, e gli altri angoli eguali perchè corrispondenti, si ha che essi sono simili, epperciò i loro lati omologhi proporzionali, onde la seguente proporzione

$$CD : AB :: CO : AO.$$

Considerando in seguito i due triangoli O C H, O A E, che per lo stesso motivo sono simili, si ha

$$CH : AE :: CO : AO$$

la quale proporzione avendo colla prima le seconde ragioni eguali, le prime formano proporzione, per cui

$$CD : AB :: CH : AE.$$

Un ragionamento analogo fatto agli altri triangoli, dimostrerà come colla eseguita operazione risulti effettivamente diviso C D nello stesso rapporto in cui è diviso A B.

Discussione. — Se le parti in cui è divisa la retta data sono eguali, è evidente che anche l'altra retta verrà divisa in parti eguali. Volendo perciò dividere una data retta in parti eguali, si potranno applicare qualunque delle due indicate risoluzioni, cioè: 1.° tirando due rette ad angolo e portando su di una tante volte una lunghezza qualunque quante sono le parti in cui si vuole dividere la retta data che si porta all'altra retta dell'angolo, e poscia conducendo dai diversi punti di divisione delle parallele alla retta che unisce gli estremi, le quali parallele divideranno opportunamente la retta eguale alla retta data. 2.° tirando una parallela alla retta che si vuole dividere e portandovi sopra tante volte una lunghezza, ad occhio maggiore o minore della parte che si vuole ottenere, quante sono le parti in cui si vuole dividere la retta, e quindi eseguire l'operazione indicata nella seconda risoluzione.

2.° — *Trovare una quarta proporzionale a tre rette date.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 3).

Risoluzione. — Sieno a, b, c, le rette date a cui si deve trovare una quarta proporzionale.

Si tirino due rette ad angolo e sovra di esse si porti A B $= a$, A C $= b$, A D $= c$. Tirata la retta B C, pel punto D si meni a questa una parallela che taglierà la retta A C nel punto E. La retta A E sarà la quarta proporzionale domandata dopo le tre rette a, b, c.

Dimostrazione. — Essendo i due triangoli A B C, A D E simili per avere l'angolo in A comune e gli altri due angoli rispettivamente eguali agli angoli B e C perchè corrispondenti, ha luogo la proporzionalità fra i lati omologhi, cioè A B : A C :: A D : A E, alla quale proporzione sostituendo quantità eguali derivasi $a : b :: c :$ A E, da cui si vede essere effettivamente A E la quarta proporzionale dopo le tre rette date.

3.° — *Trovare una media proporzionale fra due rette date.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 4).

Risoluzione 1.ª — Sieno a e b le due rette date, alle quali si debba trovare una media proporzionale.

Si tiri una retta indefinita e sopra di essa si prenda una distanza A B $= a$ ed una distanza B C $= b$. Sopra la retta A C si descriva una semicirconferenza, e nel punto B si innalzi una perpendicolare ad A C fino all'incontro della semicirconferenza in D. La retta B D sarà la media proporzionale fra le due rette A B e B C, ossia alle due rette date a e b.

Dimostrazione. — Si tirino le rette A D, D C, e si considerino i due triangoli A B D, D B C che sono simili per essere tutti e due rettangoli, per avere un lato comune e per avere l'angolo B A D = B D C, poichè ciascuno di essi sommato coll'angolo A D B forma un angolo retto; epperciò potersi stabilire la seguente proporzione: il cateto A B sta al cateto B D del triangolo rettangolo A B D come il cateto B D sta al cateto B C del triangolo rettangolo C B D. Da questa proporzione A B : B D :: B D : B C, si vede subito che la

retta B D è media proporzionale fra le due rette A B e B C, e per conseguenza alle sue eguali *a* e *b*.

La dimostrazione dell'operata costruzione era evidente dopo il 2.° principio della pag. 252.

(Vedi Tavola XXV, Fig. 5).

Risoluzione 2.ª — Sieno *a* e *b* le rette date a cui vuolsi trovare una media proporzionale.

Si tiri una retta A B eguale alla retta *a* e si porti una distanza A C = *b*. Pel punto C si innalzi una perpendicolare alla A B fino a che venga ad incontrare in D una semicirconferenza descritta sulla retta A B. Si tiri per ultimo la retta A D, che sarà la media proporzionale domandata.

Dimostrazione. — Tirando la retta D B e considerando i due triangoli A C D, D A B, si vede che hanno un angolo comune in A ed un angolo retto, epperciò essere simili, epperciò proporzionali i lati omologhi, e quindi la seguente proporzione A B : A D :: A D : A C, dalla quale si scorge tosto essere A D media proporzionale fra A B ed A C, ossia fra le sue eguali *a* e *b*.

4.° — *Dividere una data retta in media ed estrema ragione; e viceversa, essendo data la parte maggiore di una retta divisa in media ed estrema ragione, trovare la retta.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 6).

Risoluzione. Parte 1.ª — Sia A B la retta che si deve dividere in media ed estrema ragione, cioè in due parti, tali che la parte maggiore sia media proporzionale fra tutta la retta e la parte minore.

Nell'estremo B si innalzi una perpendicolare B C eguale alla metà della retta, e facendo centro in C con raggio C B si descriva una circonferenza che taglierà nel punto D una retta condotta dal punto A al punto C. Si porti da A in E la distanza A D, che sarà la parte maggiore della retta data A B divisa nel punto E in media ed estrema ragione.

Dimostrazione. — Dalla teoria sapendo che la tangente condotta ad un circolo è media proporzionale fra tutta la secante e la

sua parte esterna, ne segue che essendo la circonferenza descritta con raggio C B tangente alla retta A B, ha luogo la proporzione seguente A F : A B :: A B : A D. Ma essendo $AF = AD + DF$, $DF = AB$ per costruzione, ed $AD = AE$, la precedente proporzione si riduce nell'altra eguale A E + A B : A B :: A B : A E. Ora sapendo dall'aritmetica che la differenza dei due primi termini di una proporzione sta al primo od al secondo come la differenza dei due ultimi termini sta al terzo ed al quarto, si ha che A E : A B :: B E : A E, ed invertendo, cioè mettendo i medi al posto degli estremi, ottiensi A B : A E :: A E : E B, proporzione che attesta come la parte A E è media proporzionale fra tutta la retta A B e la differenza B E, epperciò come colla fatta costruzione siasi ottenuto realmente divisa la retta data in media ed estrema ragione.

(Vedi Tavola XXV, Fig. 7).

Risoluzione. Parte 2.ª — Sia m la parte maggiore di una retta da cercarsi divisa in media ed estrema ragione.

Si tiri una retta indefinita e su di essa si prenda una distanza $AB = m$, indi nel punto B si innalzi una perpendicolare $BD = \frac{AB}{2}$, si tiri la retta A D e la si prolunghi. Si porti $DE = DB$, si tiri la retta E B, si porti ancora $AC = AB$ e pel punto C si meni una parallela alla retta E B che incontrerà il prolungamento di A B nel punto F. La retta A F sarà la domandata.

Dimostrazione. — Se nel punto F si innalza una perpendicolare sino all'incontro della retta A D in G, si avrà che essendo i triangoli A B D, A F G simili, perchè aventi un angolo comune e rettangoli, ha luogo la proporzione A B : B D :: A F : F G; ma B D è la metà di A B, quindi F G è anche la metà di A F. I due triangoli G C F, D E B essendo simili come aventi i lati paralleli, così essendo $DB = DE$ è anche $GF = GC$, e per conseguenza si vede che A C, che è per costruzione eguale ad A B, è la parte maggiore della retta A F divisa in media ed estrema ragione, epperciò A F la retta cercata.

5.° — *Costruire geometricamente la radice quadrata di qualsivoglia numero; ovvero, data una retta trovarne un'altra eguale alla retta data moltiplicata per la radice quadrata di un certo numero.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 8).

Risoluzione. — Sia l la retta data che si voglia moltiplicare, ad esempio, per la radice quadrata del numero 7.

Si tiri una retta A B eguale a tre volte la retta data, e sopra di essa si descriva una semicirconferenza che si tagli poi in un punto C con un arco descritto facendo centro in A e con raggio eguale ad l. Si tiri la retta C B e sopra questa si descriva pure una semicirconferenza, che poi si tagli in un punto D con un arco descritto da C con raggio C D eguale alla retta data l. Si tiri per ultimo la retta D B, che sarà la domandata.

Dimostrazione. — Dal teorema di Pittagora sul triangolo rettangolo, si ha che $CB^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$; ora $AB^2 = (3\,l)^2 = 9\,l^2$, $\overline{AC}^2 = l^2$ quindi $CB^2 = 9\,l^2 - l^2 = 8\,l^2$ e $CB = l\sqrt{8}$.

Considerando di seguito il triangolo rettangolo C D B, si ha che $\overline{DB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CD}^2$, ma $\overline{CB}^2 = 8\,l^2$, $\overline{CD}^2 = l^2$, quindi $\overline{DB}^2 = 8\,l^2 - l^2 = 7\,l^2$ e $DB = l\sqrt{7}$, cioè la retta D B è eguale alla retta data l moltiplicata per la radice quadrata del numero 7.

(Vedi Tav. XXV, Fig. 9).

Risoluzione 2.ª — Sia l la retta data che si tratti di moltiplicare per la radice quadrata del numero 11.

Si tiri una retta $AB = 3\,l$ e nel punto A si innalzi una perpendicolare $AC = l$. Si tiri la retta C B e nel punto C si innalzi una perpendicolare eguale ad l, e per ultimo si tiri la retta D B, che sarà la domandata.

Dimostrazione. — Dal teorema di Pittagora essendo sempre $\overline{CB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, e per costruzione essendo $AB = 3\,l$, $BC = l$, così è $\overline{CB}^2 = 9\,l^2 + l^2 = 10\,l^2$. Parimenti essendo $\overline{DB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2$ e $CD = l$, si avrà sostituendo che $\overline{DB}^2 = 10\,l^2 + l^2 = 11\,l^2$,

e quindi $DB = l\sqrt{11}$, cioè la retta trovata D A è eguale alla retta data l moltiplicata per la radice quadrata del numero undici.

Discussione. — Dai fatti esempi rendesi chiaro, come due sieno le vie per le quali si può giungere a trovare una retta che sia eguale ad altra retta moltiplicata per la radice quadrata di qualsivoglia numero. La prima di dette vie consiste nel formare successivamente tanti triangoli rettangoli, quante sono le unità di cui sorpassa il minimo quadrato perfetto che contiene il numero dato, ed aventi il primo per ipotenusa una retta lunga tante volte la retta data quante sono le unità contenute nella radice quadrata dell'indicato quadrato perfetto, e per cateto la retta data; gli altri triangoli aventi sempre per cateto la retta data e per ipotenusa l'ipotenusa del triangolo precedente; che l'altro cateto dell'ultimo triangolo sarà la retta domandata. La seconda consiste nel formare successivamente tanti triangoli rettangoli, quante sono le unità che mancano al massimo quadrato contenuto nel dato numero, ed aventi il primo un cateto eguale ad una retta lunga tante volte la retta data quante sono le unità contenute nella radice quadrata dell'indicato massimo quadrato, l'altro cateto la retta data; gli altri triangoli rettangoli aventi costantemente un cateto eguale alla retta data e per l'altro cateto l'ipotenusa del triangolo precedente, che l'ipotenusa dell'ultimo triangolo sarà la retta domandata.

6.° — *Conoscendo il rapporto di due rette, tracciare una retta talmente divisa nei multipli e sottomultipli della scelta unità di misura, per modo che dalla lunghezza di una delle rette date si possa direttamente valutare la lunghezza dell'altra; od in altri termini, costruire ciò che chiamasi la scala grafica.*

(Vedi Tavola XXV, Fig. 10).

Risoluzione. — Sia 1 : 1000 il rapporto di due rette, il metro l'unità di misura, e si tratti di costruire una scala grafica semplice.

Essendo 1 : 1000 il rapporto di due rette, è chiaro che se una retta è eguale ad 1 metro, l'altra è eguale a 1000 metri, epperciò ammesso che la più corta rappresenti la più grande in quel dato rapporto, si avrà che una lunghezza tracciata a mo' d' esempio su di un foglio di carta della lunghezza di un decimetro, rappresen-

terebbe un'altra distanza 1000 volte più grande, cioè una distanza di 100 metri.

Ora bene, se si tira una retta eguale ad esempio a 7 centim., e la si divide in 7 parti eguali, si avrà che la lunghezza rappresentata è di 70 metri, e di 10 metri ciascuna parte. Se si porta una di queste parti indietro sul prolungamento di $\overline{70{,}0}$, e si divide in 10 parti eguali, ciascuna di queste ultime parti rappresenterà il metro. Ciò fatto, se si scrivono nel modo che sta indicato nella figura i rispettivi numeri, si avrà disegnata una scala metrica grafica semplice nel rapporto dell'1 al 1000.

Dimostrazione. — 1.° Essendo data una distanza grande, ad esempio, di 54 metri, si otterrà subito la lunghezza omologa piccola, prendendo la distanza col compasso che esiste dalla divisione in cui sta scritto il 50 alla divisione 4 dopo lo zero. E siccome ogni divisione grande è 1 centimetro ed ogni divisione piccola 1 millimetro, la distanza 5 centimetri più 4 millimètri, ossia 54 millimetri, rappresenterà nel rapporto di 1 a 1000 la lunghezza di 54 metri.

2.° Data una retta piccola, ad esempio di 0,037, si troverà la omologa grande prendendo un'apertura di compasso eguale a 0,037, e portandola sopra la fatta scala, in modo che una delle punte sia su di una divisione precisa delle grandi e l'altra cada nello spazio $\overline{0{,}10}$, e si vedrà tosto che una cadrà sulla divisione 30 e l'altra sulla divisione 7 dopo lo zero, quindi la distanza omologa domandata sarà 37 metri, ossia 1000 volte 0,037.

Discussione. — Se la distanza data, o quella ad ottenersi, contenesse dei sottomultipli che non stessero segnati per la loro piccolezza sulla scala, allora deve valere l'occhio, e qui sta l'abilità dell'operatore nel sapere il più giustamente possibile apprezzarne le frazioni.

(Vedi Tavola XXV, Fig. 11).

Risoluzione 2.ª — Sia a costruirsi una scala metrica nel rapporto di 1 : 813.

Una retta di 813 metri corrispondendo ad un'altra di 1 metro, ne segue che 800 metri corrisponderanno ad una lunghezza di 0^{m}, 9840, e quindi 100 metri corrisponderanno a 0,1230, e ad esempio 60 metri corrisponderanno a 0,0738.

Si tiri perciò una retta indefinita, e sovra di essa si porti una distanza, col mezzo di un doppio decimetro, di 0,0738, e si divida in 6 parti eguali; ciascuna di queste parti varrà 10 metri. Si porti indietro, cioè sul prolungamento di 60 a 0, una delle parti ottenute, e la si divida ancora in 10 parti eguali, che ciascuna rappresenterà il metro. Si scrivano i numeri nel modo indicato nella figura e si avrà una scala grafica semplice metrica e nel rapporto di 1 : 813.

Egli è chiaro che ove si potesse dividere le più piccoli divisioni che rappresentano il metro in 10 parti, si potrebbero avere anche i decimetri nella misura di una retta grande col mezzo di siffatta scala. La difficoltà che si incontra nello spingere a sottigliezza la divisione di una retta data, se può venire supplita, come è stato detto nella teoria del primo libro, mercè il nonio rettilineo, tuttavia poichè l'applicazione di questo strumento non potrebbe farsi che da un macchinista e quindi non sempre si può avere nè il mezzo nè il tempo nè la convenienza di adattare ad una scala il nonio, si usa di costruire le così dette scale ticoniche, derivante un tal nome da quello dell'inventore Enrico Ticone.

Sulla scala stata disegnata, in cui le più piccole divisioni rappresentano il metro, si costruirà la scala ticonica.

Per ciò si innalzino dai diversi punti delle divisioni grandi delle perpendicolari, e sopra una di queste si porti tante volte distanze qualunque, però eguali tra di loro, quante sono le parti in cui si vuole dividere la più piccola divisione. Nel considerato esempio volendo dividere le divisioni inferiori in 10 parti eguali, si porterà 10 distanze eguali sulla perpendicolare e per i diversi punti di divisione si tireranno delle parallele alla scala semplice, e quindi si unirà la divisione 9 coll' estremo della perpendicolare innalzata nel punto 10, e per tutte le altre divisioni contenute da 10 a 0 si tireranno delle parallele a questa. Si apporranno per ultimo i numeri nel modo che sta indicato nella figura, e la scala così costrutta nel rapporto di 1 : 813 sarà ticonica e dà il mezzo di ottenere i decimetri nella misura di una distanza grande.

Dimostrazione. — Essendo data una distanza, ad esempio di $62^m,30$, si troverà l'omologa nella distanza che corre sulla parallela n.° 3 della perpendicolare abbassata dalla divisione 60 all'incontro della trasversale condotta dalla 2.ª divisione. Poichè se si osserva

che la trasversale forma colla perpendicolare un triangolo i cui lati sono divisi in 10 parti eguali, epperciò le parti comprese rispettivamente eguali ad 1, 2, 3 decime parti delle più piccole divisioni, cioè la distanza della divisione 3 che corre dalla perpendicolare alla trasversale, è i $\frac{3}{10}$ della divisione che rappresenta il metro, ne segue che la distanza $0^m,30$ aggiunta a due divisioni piccole ed a 6 divisioni grandi, darà la distanza totale di 62,30.

In eguale modo essendo data una distanza piccola, ad esempio di 0,0457, e si volesse sapere a quale distanza grande corrisponderebbe nel rapporto della costruita scala, basterà prendere un'apertura di compasso eguale a 0,0457 e portarla sulla scala in modo che una punta fissa scorrendo su una delle perpendicolari, l'altra punta venga a coincidere o prossimamente a coincidere con una delle trasversali, e leggere sulla scala la distanza, che in tale caso si troverà eguale a metri 36,90.

Discussione. — Secondo questa scala si vedrà che volendo giudicare di una quantità minore del decimetro, o si sarebbe dovuto condurre un maggiore numero di parallele, oppure stare alla precisione dell'occhio nel valutare la frazione di distanza di parallela, perchè l'estremo della retta proposta si trovi sulla trasversale.

Dalla costruzione delle scale si scorge tosto che esse sono di grande importanza, tutta volta che occorre di costruire una figura simile ad un'altra, conoscendo il rapporto dei lati omologhi delle due figure, e l'unità di misura adottata.

7.° — *Dividere una data retta, in parti che contate da un estremo di essa, stieno fra loro come le radici quadrate di numeri dati, ovvero come le superficie di figure simili.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 12).

Risoluzione. — Sia A B la retta a dividersi in parti che contate dall'estremo A stieno fra loro come le superficie di figure simili i cui lati omologhi sieno l, l', l''.

Sulla retta A B si descriva un semicircolo, e facendo centro in A con raggio eguale ai lati omologhi si descrivano tre archi che taglieranno la semicirconferenza descritta nei punti C, D, E. Da que-

sti diversi punti si abbassino delle perpendicolari alla retta A B, che la divideranno nelle domandate parti.

Dimostrazione. — Dal teorema di Pittagora stato dimostrato nella teoria di questo libro, si ebbe il corollario seguente: il quadrato dell' ipotenusa di un triangolo rettangolo sta al quadrato di un cateto, come tutta l' ipotenusa sta alla proiezione fatta dal cateto sull'ipotenusa. Or bene, se si tirano le rette A C, A D, A E, B C, B D, B E, si vedrà tosto che tutti i triangoli A C B, A D B, A E B sono rettangoli come inscritti nella semicirconferenza, e che perciò hanno luogo le seguenti proporzioni

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: AB : AF$$

$$\overline{AB}^2 : \overline{AD}^2 :: AB : AG$$

$$\overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 :: AB : AH$$

le quali avendo tutte gli stessi antecedenti, i conseguenti formano proporzione, epperciò si ricava $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AB : AF : AG : AH$, e sostituendo le rette $l, l' \, l''$ alle sue eguali, si ricava $\overline{AB}^2 : \overline{l}^2 : \overline{l'}^2 : \overline{l''}^2 :: AB : AF : AG : AH$. La retta data A B è quindi divisa nel rapporto dei quadrati dei lati omologhi delle date figure simili, vale a dire nel rapporto della loro superficie, poichè è proprietà delle figure simili le superficie di stare tra di loro come i quadrati dei lati omologhi.

8.° — *Esprimere con linee il rapporto di due figure simili.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 13).

Risoluzione. — Siano l e l' i lati omologhi di due figure simili. Si tiri una retta A B eguale al lato l, si descriva su di essa una semicirconferenza, e facendo centro in A con raggio eguale ad l' si tagli la semicirconferenza nel punto C. Da questo punto C si abbassi una perpendicolare C D, e si avrà che le due rette A B e A D saranno nello stesso rapporto delle superficie delle due figure simili date, i cui lati omologhi sono l ed l'.

Dimostrazione. — Se si tirano le rette A C e B C, il triangolo A C B risultante è rettangolo siccome avente il vertice C sulla semicirconferenza, e per il medesimo teorema accennato nel problema precedente si ha che $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ :: A B : A D; ma essendo A B $= l$, ed A C $= l'$, si ha che $\overline{l}^2 : \overline{l'}^2$ :: A B : A D, cioè le due linee rette A B ed A D stanno nel medesimo rapporto dei quadrati dei lati omologhi delle figure simili date, epperciò in quella delle superficie, poichè le superficie di figure simili stanno tra di loro come i quadrati dei lati omologhi.

9.° — *Descrivere un poligono simile a due altri poligoni simili dati, ed equivalente alla loro somma.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 14).

Risoluzione. — Sieno l ed l' i lati omologhi di due poligoni simili, e si tratti di trovare il lato omologo del poligono simile ed equivalente alla loro somma.

Si tiri una retta A B eguale al lato l, ed in A si innalzi una perpendicolare A C $= l'$. Si tiri la retta C B, che sarà il lato omologo domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo A B C essendo rettangolo, epperciò $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, ne deriva che due poligoni simili stando tra loro nel rapporto dei quadrati dei loro lati omologhi, epperciò le aree dei due poligoni di lati l ed l' nel rapporto di $\overline{AB}^2$ ad $\overline{AC}^2$, così la superficie del poligono formato sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle superficie dei poligoni simili costrutti sui cateti, e quindi evidentemente C B è il lato omologo dei lati l ed l' del poligono simile a costruirsi.

10.° — *Descrivere un poligono simile a due altri poligoni simili dati, ed equivalente alla loro differenza.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 15).

Risoluzione. — Siano l ed l' i lati omologhi di due poligoni simili, e si tratti di trovare il lato omologo del poligono simile equivalente alla loro differenza.

Si tiri una retta A B eguale al lato l, e si descriva su di essa una semicirconferenza che poi si tagli nel punto C con un arco descritto facendo centro in A e con raggio eguale ad l'. Si tiri la retta B C che sarà il lato omologo domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo A B C essendo rettangolo perchè inscritto nel semicircolo, ed avendo dal teorema di Pittagora che il quadrato od ogni qualunque poligono costrutto su di un cateto è equivalente alla differenza dei quadrati o poligoni simili descritti sull' ipotenusa e l'altro cateto, il cateto C B è il lato omologo del poligono da costruirsi simile ai due dati, e di superficie la differenza.

11.° — *Sopra una retta data fare un rettangolo equivalente ad un altro dato.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 16).

Risoluzione. — Sieno a e b i lati del dato rettangolo, e sia a costruirsi equivalente a questo, un altro rettangolo sulla retta data A B.

Dal punto A si tiri una retta ad angolo colla A B, si portino le distanze A C $= a$, A D $= b$, e pel punto D si meni una parallela alla B C che taglierà la retta A C nel punto E. La retta A E sarà il lato domandato.

Dimostrazione. — Per essere la retta D E parallela alla B C, i due triangoli A B C, A D E sono simili e quindi ha luogo la proporzione A B : A C :: A D : A E, nella quale il prodotto dei medi eguagliando il prodotto degli estremi, si ha A B $\times$ A E $=$ A C $\times$ A D, ed essendo A C $= a$, A D $= b$, risulta A B $\times$ A E $= a\,b$. Il prodotto $a\,b$ esprimendo la superficie del rettangolo di lati a e b, essa è quindi eguale a quella del rettangolo di lati A B e A E, siccome era richiesto dal problema.

12.° — *Costrurre un rettangolo simile ad un dato, e la cui superficie ne sia la terza parte.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 17).

Risoluzione. — Sieno a e b i lati del rettangolo dato, al quale si tratta di costrurne un altro simile, e della terza parte di superficie.

Si tiri una retta A B eguale ad a, la si divida in tre parti eguali coi punti D ed E, e pel punto D si innalzi una perpendicolare D C sino all'incontro con una semicirconferenza descritta sulla retta A B. Si tiri la retta B C, che sarà il lato omologo di A B, e per conseguenza facile il costruire dopo su di esso un rettangolo simile al dato.

Dimostrazione. — Tirando la retta A C, il triangolo A B C essendo rettangolo ha luogo, dietro il corollario del teorema di Pittagora, la proporzione seguente: $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB : DB$; ma $AB = a$, $BD = \frac{AB}{3}$, quindi la proporzione suddetta si trasforma nell'altra: $a^2 : \overline{BC}^2 :: a : \frac{a}{3} :: 1 : \frac{1}{3}$.

Ora i due rettangoli dovendo essere simili, le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi, epperciò dietro la proporzione rinvenuta, le superficie dei due rettangoli stanno come 3 : 1, cioè il lato B C è l'omologo del rettangolo di superficie un terzo del rettangolo di lati dati.

13.° — *Costruire un rettangolo conoscendone la superficie e il perimetro.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 18).

Risoluzione. — Sia $2p$ il perimetro dato, ed l il lato del quadrato equivalente al rettangolo da costruirsi.

Si tiri una retta A B eguale al semiperimetro p, e sovra di essa si descriva una semicirconferenza. In un punto qualunque C si innalzi una perpendicolare $CD = l$, e pel punto D si meni una parallela ad A B che taglierà la semicirconferenza nel punto E. Da questo punto E si abbassi una perpendicolare sulla A B, si porti $FB = FG$, e si formi il rettangolo A F G H che sarà il domandato.

Dimostrazione. — Dalla fatta costruzione si vede che la retta E F è media proporzionale fra A F ed F B, cioè l'esistenza della proporzione $AF : FE :: FE : FB$, nella quale il prodotto dei medi eguagliando il prodotto degli estremi, è $\overline{FE}^2 = AF \times FB$; ma $FE = l$, $FB = FG$, quindi il quadrato del lato dato è eguale alla

superficie del rettangolo A F G H, perchè eguale ad $AF \times FG$. Essendo poi $AF + FG = AF + FB = AB$ semiperimetro dato, il rettangolo costrutto risolve pienamente il problema.

Risoluzione analitica. — Sia p il semiperimetro, ed l il lato del quadrato equivalente al rettangolo da costruirsi, i cui lati si chiamino con a e b.

Mettendo il problema in equazione, si ha

$$a + b = p, \quad a \times b = l^2.$$

Ricavando il valore di a dalle due equazioni ed eguagliandoli, si ottiene

$$a = p - b, \quad a = \frac{l^2}{b}, \quad p - b = \frac{l^2}{b}$$

e moltiplicando i due membri di quest'ultima per b, si ha $p\,b - b^2 = l^2$ equazione di 2.° grado, per cui

$$b^2 - p\,b + \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} - l^2$$

ed estraendo la radice

$$b - \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - l^2}$$

e quindi

$$b = \frac{p}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{p^2 - 4\,l^2}.$$

Conoscendo il valore di b è assai facile di ricavare il valore di a, bastando sottrarre b da p.

14.° — *Convertire un poligono qualunque in un triangolo equivalente.*

(Vedi Tav. XXVI, Fig. 19).

Risoluzione. — Sia il poligono A B C D E da trasformarsi in un triangolo equivalente.

Si tirino le diagonali D A, D B, si prolunghi il lato A B, e pei vertici E e C si menino delle parallele a queste diagonali che in-

tersecheranno la retta A B nei punti F e G. Si tirino le rette D F e D G, ed il triangolo F D G risultante sarà equivalente al poligono dato.

Dimostrazione. — Considerando i due triangoli D A F, A D E, è agevole il vedere che essi hanno la medesima base D A e la medesima altezza, inquantochè i vertici F ed E si trovano su una parallela alla base D A, epperciò che essi sono equivalenti. Se ora dal triangolo D F A si toglie il triangolo D O A, e dal triangolo D A E si toglie lo stesso triangolo, i resti saranno ancora equivalenti, cioè il triangolo F O A che si aggiunge al poligono è equivalente al triangolo E O D che gli si toglie.

Le medesime considerazioni facendo, si vedrà che essendo equivalenti i due triangoli D B C, D B G per avere eguale base ed eguale altezza, ove da ciascuno dei due triangoli si tolga il triangolo comune D H B, i resti cioè il triangolo D H C che si toglie al poligono è equivalente al triangolo B H G che gli si aggiunge, e che perciò la superficie del triangolo F G D è equivalente a quella del dato poligono.

15.° — *Convertire un triangolo scaleno in un triangolo isoscele equivalente.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 20).

Risoluzione 1.ª — Sia A B C il triangolo scaleno dato che si tratti di trasformare in un triangolo isoscele equivalente.

Si divida la base A B per metà nel punto D, e per questo punto si innalzi una perpendicolare ad A B sino all'incontro E con una parallela condotta dal vertice C alla retta A B. Si tirino le rette A E, B E, ed il triangolo A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo A B E avendo la retta E D perpendicolare sulla metà della base, è isoscele, ed inoltre avendo la medesima base A B e la medesima altezza D E del triangolo A B C è a questo equivalente.

(Vedi Tav. XXVI, Fig. 21).

Risoluzione 2.ª — Sia A B C il triangolo che si tratti di trasformare in un triangolo isoscele equivalente.

Si cerchi una media proporzionale fra i lati C B e C A, si porti questa media proporzionale sui lati C B e C A nei punti F e G, e per ultimo tirisi la retta G F, chè il triangolo C F G risultante sarà il triangolo isoscele domandato.

Dimostrazione. — I due triangoli A B C, G F C avendo un angolo comune, epperciò dietro il teorema di cui a pag. 243, le loro superficie stando come i prodotti dei lati che comprendono l'angolo eguale, si ha la seguente proporzione: Sup. A B C : Sup. G F C :: C A $\times$ C B : C G $\times$ C F; ma il triangolo G F C dovendo essere isoscele, C G deve essere eguale a C F, ed inoltre le superficie dei due triangoli dovendo pure essere eguali, la proporzione si ridurrà nell'eguaglianza C A $\times$ C B $= \overline{CF}^2$, che corrisponde alla proporzione C A : C F :: C F : C B, ossia C F uno dei lati del triangolo isoscele domandato, media proporzionale fra C A e C B, operazione che si è per l'appunto eseguita descrivendo sopra C B una semicirconferenza, portando C D $=$ C A, innalzando per D una perpendicolare sino in E e portando poi C G $=$ C F $=$ C E.

Il triangolo quindi G F C è isoscele ed equivalente al triangolo A B C.

16.° — *Convertire un triangolo scaleno in un triangolo equilatero equivalente.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 22).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo scaleno dato da trasformarsi in un triangolo equilatero equivalente.

Per il vertice C si meni una parallela alla base A B, e quindi si formi in A un angolo di 60°, che la retta dell'angolo verrà a tagliare la parallela nel punto D. Si prenda una media proporzionale tra le due rette A B, A D, e la si porti sui lati A B ed A D, essa cadrà nei punti G ed H. Si tiri la retta G H, ed il triangolo G A H sarà il triangolo domandato.

Dimostrazione. — I due triangoli A B C, A B D, siccome aventi eguale base A B ed il vertice su una stessa parallela, sono equivalenti. Ora il triangolo equilatero costrutto, ed il triangolo B A D, dovendo avere un angolo comune di 60°, le loro superficie devono stare come i prodotti dei lati che comprendono l'angolo eguale, e

siccome le superficie debbono essere eguali, così il prodotto dei lati che comprendono l'angolo in uno, deve essere eguale al prodotto dei lati che comprendono l'angolo nell'altro, per cui deve essere $A D \times A B = A H \times A G$; ma $A H = A G$, quindi è $A D \times A B = \overline{A G}^2$, ossia A G il lato del triangolo equilatero cercato è media proporzionale fra il lato A B ed il lato A D del triangolo A B D equivalente al triangolo dato A B C.

17.° — *Descrivere un parallelogramma equivalente ad un triangolo dato.*

(Vedi Tavola XXVI, Fig. 23).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato che si tratti di trasformare in un parallelogramma equivalente.

Dividasi il lato B C per metà in D, e per questo punto si meni una parallela al lato A C del triangolo, e per il vertice C una parallela ad A B, le quali si taglieranno nel punto F. Il parallelogramma A E F C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Considerando i due triangoli C F D, E B D, essi hanno $C D = D B$ per costruzione, l' angolo $C D F = E D B$ perchè opposti al vertice, l'angolo $F C D = C B A$ come alterni interni, e quindi essi sono eguali, epperciò equivalenti. Dal triangolo A B C togliendovi il triangolo E D B ed aggiungendovi il triangolo C F D, il parallelogramma A E F C è equivalente al triangolo dato A B C.

18.° — *Descrivere un quadrato equivalente ad un triangolo dato.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 24).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato che si tratti di trasformare in un quadrato equivalente.

Dal vertice C si abbassi la perpendicolare od altezza C D sopra la base A B, e si cerchi una media proporzionale tra la base A B e la metà dell'altezza, che sarà il lato del quadrato domandato.

Dimostrazione. — Il prodotto $A B \times \frac{C D}{2}$ esprimendo la superficie del triangolo A B C, è chiaro che chiamando A G il lato del

quadrato, si deve avere $AB \times \frac{CD}{2} = \overline{AG}^2$, ossia A G lato del quadrato, medio proporzionale tra la base A B e la metà dell'altezza C D. Quindi essendosi descritto su A B una semicirconferenza e portato $AF = DE = \frac{CD}{2}$, innalzata in F la perpendicolare F G e portato $AL = AH = AG$, il quadrato A L I H è equivalente al triangolo dato A B C.

19.° — *Descrivere un quadrato di superficie approssimativamente equivalente ad un dato circolo.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 25).

Risoluzione. — Sia il circolo dato quello di centro O, che si tratti di trasformare in un quadrato approssimativamente equivalente.

Si tirino due raggi O F, O P perpendicolari tra loro, e dal punto P si porti sulla circonferenza due volte il raggio del circolo, sì che verrà nel punto A. Si tiri, il raggio O A, le rette A P, F P, e sul prolungamento di A P si porti $PG = PF$ e $AH = AO$. Si cerchi una media proporzionale tra A G ed A H, la quale sarà il lato del quadrato domandato con errore minore di un mezzo centesimo.

Dimostrazione. — Essendo il raggio O F perpendicolare al raggio O P, la retta F P è eguale al raggio moltiplicato per la radice quadrata del numero due, e la retta A P siccome lato del triangolo equilatero inscritto è eguale al raggio moltiplicato per la radice quadrata del numero tre. La retta quindi A G è eguale al prodotto del raggio pella somma della radice quadrata del numero due con quella del numero tre.

Ora, se si pone mente che la $\sqrt{2} = 1{,}41421....$, la $\sqrt{3} = 1{,}73205...$, la somma $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3{,}14626...$, e di più se si osserva che la superficie di un circolo è eguale al prodotto del numero π per il quadrato del raggio, si vedrà tosto che la media proporzionale fra il raggio ed A G è il lato del quadrato domandato, poichè ha luogo la seguente eguaglianza $\overline{AB}^2 = AO \times AG$, nella quale la retta A G essendo con errore minore di un mezzo centesimo eguale a $\pi . AO$, il prodotto con A O darà $\pi\, AO^2$, cioè la superficie del

circolo, prossimamente equivalente ad $\overline{A\,B}^2$ superficie del quadrato A B C D descritto sulla retta A B.

Discussione. — Il problema che si venne di risolvere, si sarebbe potuto enunciare: trovare l' approssimata quadratura del circolo.

Dalla fatta risoluzione si vede che il lato del quadrato equivalente ad un circolo è media proporzionale fra il raggio ed il prodotto del raggio per π, cioè $A\,B = \sqrt{\pi\,R \times R} = R\,\sqrt{\pi}$. Ora π essendo una quantità incommensurabile, cioè tale che non è possibile il determinarla che con una più o meno grande approssimazione, così anche la sua radice quadrata non sarà che più o meno approssimata, e quindi il lato del quadrato equivalente che si può ottenere, non può essere che più o meno grandemente approssimato, a seconda del numero di cifre del valore di π cui si tiene conto nel computo, come d' altronde è stato detto a pag. 275.

20.° — *Condurre per un punto dato fuori di un circolo parimenti dato una tangente al medesimo.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 26).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O quello dato, a cui si debba tirare una tangente pel punto P dato.

Dal punto P si tiri una secante qualunque P S, si cerchi una media proporzionale fra le rette P S e P Q, e con centro in P e raggio eguale a questa media proporzionale, si descriva un arco che tagli la circonferenza nei due punti T e T', che saranno i punti di contatto. Si tirino le rette P T e P T' che saranno le tangenti domandate.

Dimostrazione. — Essendo proprietà dimostrata nella teoria, che una tangente ad un circolo è media proporzionale fra tutta la secante tirata dal medesimo punto e la sua parte esterna, così P T' essendo eguale a P T ed a P R media proporzionale fra la secante P S e la parte esterna P Q, le rette P T e P T' sono tangenti al dato circolo.

21.° — *Descrivere una circonferenza passante per un punto dato e tangente a due rette date.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 27).

Risoluzione 1.ª — Siano A B ed A C le due rette date, e P il punto per cui deve passare la circonferenza a descriversi tangente pure alle date due rette.

Si segni la bisettrice A G dell'angolo formato dalle due rette A B, A C e si tiri la retta A P, si faccia in seguito centro in un punto qualunque E e si descriva una circonferenza che sia tangente alle due rette A B, A C, la quale taglierà la retta A P nei due punti Q ed F. Si tirino le rette E Q, E F, e per il punto P si menino delle parallele a queste che taglieranno le bisettrice nei punti G ed H. Si faccia centro in G con raggio G P, ed in H con raggio H P, e si descrivano due circonferenze che saranno le domandate, perchè tangenti alle due rette date A B, A C e passanti pel punto dato P.

Dimostrazione. — Dai punti G, H ed E si abbassino le perpendicolari H I, G L ed E D, e si considerino prima i due triangoli A E F, A H P, che sono simili per avere l'angolo H A P comune ed un lato H P parallelo al lato E F, e che danno la proporzione A E : A H :: E F : H P, poscia i triangoli A E D, A H I pure simili per avere l'angolo H A I comune ed essere rettangoli e che danno la proporzione A E : A H :: E D : H I. Queste due proporzioni avendo il primo membro eguale, i secondi formano proporzione, ed è E F : H P :: E D : H I, ma essendo E F = E D ne segue che i conseguenti sono pure eguali ed è H P = H I. Il circolo quindi descritto con raggio H P sarà tangente alle due rette come avente il centro sulla bisettrice e per essere H I = H P.

Ragionamento analogo facendo prima ai due triangoli A E Q, A G P, e poi ai triangoli A E D, A G L, si verrà a ricavare che G L = G P, e che quindi anche la seconda circonferenza descritta sarà tangente alle due rette date A B, A C.

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 28).

Risoluzione 2.ª — Sieno A B, C D le due rette date, e P il punto per cui deve passare una circonferenza che deve riescire tangente alle due rette date.

Si segni la bisettrice dell'angolo formato dalle due rette, e su di essa si abbassi dal punto P una perpendicolare, la quale si prolunghi di una quantità $Q R = P Q$. Si cerchi una media proporzionale fra S P ed S R, e la si porti partendo da S in T ed in V. Per i punti T e V si innalzino delle perpendicolari alla retta A B che verranno ad incontrare le bisettrice nei punti O ed O'. Si faccia per ultimo centro in O con raggio O P, ed in O' con raggio O' P, e si descrivano due circonferenze, le quali riesciranno tangenti alle rette date A B, C D, e passeranno pel punto dato P.

Dimostrazione. — La retta S R essendo una secante comune alle due circonferenze domandate, ne segue che le tangenti S T, S V sono per loro proprietà geometrica medie proporzionali fra tutta la secante S R e la parte esterna S P, quindi le due circonferenze descritte risolvono il problema come aventi il centro sulla bisettrice dell'angolo delle due rette, epperciò tangenti alle medesime e passanti pel punto dato.

22.° — *Descrivere una circonferenza passante per due dati punti e tangente ad una retta data.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 29).

Risoluzione. — Siano A e B i due punti dati, e sia C D la retta data a cui si debba descrivere una circonferenza tangente.

Si tiri la retta A B fino all'incontro della retta C D in C, si cerchi una media proporzionale fra la retta C B e la retta C A, e si porti questa media proporzionale sulla retta C D in T. In questo punto T si innalzi una perpendicolare fino all'incontro in O della perpendicolare innalzata nel punto E di mezzo della retta A C, e per ultimo facciasi centro in O e con raggio O A descrivasi una circonferenza, che sarà la domandata.

Dimostrazione. — Egli è chiaro che il circolo descritto passerà per i due punti A e B, inquantochè il centro si trova sulla perpendicolare innalzata sulla metà della retta che li unisce, e risulterà tangente alla retta C D, poichè la tangente C T è per costruzione media proporzionale fra tutta la secante C B e la parte esterna C A, e la retta O T è perpendicolare alla C D.

23.° — *Descrivere una circonferenza tangente ad un circolo dato e tangente a due rette date.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 30).

Risoluzione 1.ª — Siano A B, A C le rette date, e sia il circolo di centro O quello dato a cui si voglia descrivere una circonferenza tangente.

Si conducano due rette E D, F G che sieno parallele alle rette A B, A C e distanti da queste di una quantità eguale al raggio del circolo dato. Si descrivano poi i circoli che passando pel punto O siano tangenti alle due rette E D, F G, impiegandovi uno dei metodi indicati nella risoluzione del problema 22.°, e sieno questi i circoli di centro Q e B. Facendo centro nello stesso punto e restringendone i raggi di una quantità eguale al raggio del circolo dato, si descrivano due circonferenze che risolveranno il problema.

Dimostrazione. — Le rette E D ed F G distando dalle A B, A C di una quantità O S raggio del circolo dato, egli è evidente che i circoli primitivamente descritti venendo a toccare le rette E D ed F G, quando i raggi vengano diminuiti di una quantità eguale ad O S, le circonferenze verranno ad essere tangenti alle rette A B ed A C, e medesimamente se prima passavano pel centro O verranno ad essere tangenti alla circonferenza data.

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 31).

Risoluzione 2.ª — Siano le rette date A B, B D perpendicolari tra di loro, e sia il circolo di centro O quello dato, a cui si tratti di descrivere una circonferenza tangente.

Si faccia centro in B e con raggio eguale al raggio del circolo O si descriva una circonferenza. Si prolunghi la retta A B in E, nel punto E si innalzi una perpendicolare E F = B E, e poscia si tirino le rette F B, F O, l'ultima delle quali taglierà la descritta circonferenza in G. Si porti B H = B F, si tirino le rette G B, O H, e nei punti I ed L, in cui quest'ultima incontra la circonferenza descritta con centro in B, si tirino ancora le altre due rette B I, B L, ed in seguito pel centro O si menino delle parallele alle rette G B, B I, B L che taglieranno la F B prolungata

nei punti C, C', C''. Si faccia centro in C con un raggio C P, in C' con raggio C D, in C'' con raggio C'' K, raggi tutti eguali alle perpendicolari abbassate dai rispettivi centri sulle rette date, e si descrivano tre circonferenze che saranno tangenti alle due rette date ed alla circonferenza data.

Dimostrazione. — Essendo O C parallela a G B, i due triangoli O C F, G B F sono simili e quindi danno luogo alla seguente proporzione

$$OC : GB :: CF : BF$$

che divisa dà

$$OC - GB : GB :: CF - BF : BF$$

ossia

(¹) $$CR : GB :: CB : BF.$$

Considerando in seguito i due triangoli F B E, B C P che sono pure simili, si ha

$$CP : BE :: CB : BF.$$

Questa proporzione e la proporzione (¹) avendo il secondo membro eguale, i due primi formano proporzione e si ha C R : G B :: C P : B E, nella quale i conseguenti essendo eguali, gli antecedenti sono pure eguali, epperciò C R = C P, cioè la circonferenza descritta con raggio C P è tangente oltre alle rette date, ancora al circolo dato in R.

Analoga considerazione facendo dei triangoli simili O H C', B H I, si ricava la proporzione seguente

$$C'H : HB :: C'O : BI$$

che moltiplicata dà

(¹) $$C'B : HB :: C'T : BI.$$

E per rispetto ai triangoli simili C' D B, B E F ricavandosi che C' B : B F :: C' D : B E, ed essendo B F = H B, tale proporzione e quella (¹) avendo il primo membro eguale, i secondi formano proporzione e si ha C' T : B I :: C D : B E; ma B I essendo eguale a B E, così è pure C' T = C D, cioè la circonferenza descritta in C' con raggio C' D è non solo tangente alle due rette date, ma ancora al circolo dato nel punto T.

Con analoga considerazione fatta pelle due prime circonferenze descritte si perviene pure a dimostrare che C'' K = C'' M = C'' S, epperciò come ancora la terza circonferenza descritta con raggio C'' K risolva il problema.

24.° — *Descrivere una circonferenza passante per due punti dati e tangente ad un dato circolo.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 32).

Risoluzione. — Sieno P e Q i due punti dati e sia il circolo di centro O il circolo dato a cui si tratta di descrivere una circonferenza tangente.

Si tiri la retta P Q, nel suo punto di mezzo A si innalzi una perpendicolare, e facendo centro in un punto qualunque B di questa si descriva una circonferenza che passi per i due punti P e Q e che tagli la circonferenza data ad esempio nei due punti E e D. Si tiri la retta E D e si prolunghi fino all'incontro in F col prolungamento della retta P Q, poscia si cerchi una media proporzionale tra le rette F D ed F E, e facendo centro in F con raggio eguale a questa media si descriva un arco che tagli la circonferenza data nei due punti H e G. Si conducano le rette O H, O G fino all'incontro nei punti C e C' colla perpendicolare A B, e per ultimo facendo centro in C con raggio C P ed in C' con raggio C' P si descrivano due circonferenze che passeranno per i punti dati e saranno tangenti alla data circonferenza.

Dimostrazione. — La tangente al circolo da descriversi essendo comune al circolo dato, ne segue che essa è in ogni modo sempre media proporzionale tra tutta la secante, condotta tanto nel circolo dato quanto in quello da descriversi, e la sua parte esterna.

E siccome poi due circoli che sieno tangenti, la linea che unisce i centri passa per il loro punto di contatto, così ne segue che determinato i punti di contatto, la linea che parte da questo punto e va al centro del circolo è un luogo geometrico del centro della circonferenza a descriversi. La perpendicolare A B essendo un altro luogo geometrico, i punti d'incontro C e C' sono i centri manifestamente della circonferenza che descritta coi raggi C Q e C' Q risolvono il problema.

25.° — *Dividere la superficie di un triangolo con rette partenti da un vertice in un dato rapporto.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 33).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato che si voglia dividere in tre parti nel rapporto di 1 : 2 : 3 con rette partenti dal vertice C.

Si divida la base A B nel rapporto 1 : 2 : 3, cioè in 6 parti eguali, e dal vertice C si conducano le rette C D, C E che vadino ad una divisione ed a tre divisioni, e saranno le dividenti domandate.

Dimostrazione. — I triangoli A D C, D C E, E C B, avendo la medesima altezza, le superficie stanno come le loro basi, e siccome le basi stanno nel rapporto di 1 : 2 : 3, così anche le superficie dei triangoli A D C, D C E, E C B stanno nel rapporto di 1 : 2 : 3.

Conchiudesi perciò, come per dividere la superficie di un triangolo in un dato rapporto con rette partenti da un vertice, è sufficiente dividere il lato opposto al vertice dato nel dato rapporto, perchè le rette condotte a questi punti di divisione siano le dividenti desiderate.

26.° — *Dividere la superficie di un triangolo con rette partenti da un punto preso su di un lato.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 34).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato da dividersi ad esempio in tre parti equivalenti con rette partenti da un punto P preso sul lato A C.

Dividasi il lato in cui trovasi il punto dato, nel numero di parti o rapporto in cui si vuole dividere il triangolo, e siano questi i punti D ed E. Si conduca la retta B P, e pei punti D ed E si menino a questa delle parallele che taglieranno il lato B C nel punto F, ed il lato A B nel punto G. Si tirino per ultimo le rette P G, P F, che saranno le dividenti domandate.

Dimostrazione. — Se si tirano le rette B D, B E, è chiaro che il triangolo A B C verrà diviso da queste in tre parti equivalenti, poichè i tre triangoli ADB, DEB, EBC, hanno eguale base A D =

D E = E C ed il vertice in B. Or bene se si considerano i due triangoli P G B, P D B, si vedrà che essi sono equivalenti per avere la medesima base P B e la medesima altezza siccome aventi il vertice su d'una parallela, epperciò come se dai due triangoli equivalenti si toglie il triangolo comune P O B risulti che il triangolo P O D che si aggiunge al triangolo A D B è equivalente al triangolo G O B che gli si toglie, epperciò il triangolo A P G è equivalente al triangolo A D B ed è la terza parte del triangolo totale A B C.

Con ragionamento analogo, si dimostra che il triangolo P F C è equivalente al triangolo C E B, epperciò il triangolo A B C diviso in tre parti equivalenti colle rette P F e P G.

La risoluzione generale del quesito riducesi perciò a dividere il lato sul quale è dato il punto, nel rapporto in cui si vuole dividere il triangolo, e poscia operare in modo analogo a quello operato pel supposto caso.

27.° — *Trovare un punto nell'interno di un triangolo, tale che facendo partire tre rette ai suoi vertici la superficie ne sia divisa in un dato rapporto.*

(Vedi Tavola XXVII, Fig. 35).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo che si tratti di dividere in tre parti che stiano ad esempio nel rapporto di 2 : 2 : 3 col mezzo di rette condotte da un punto interno ai singoli vertici del triangolo.

Si divida la base A B nel rapporto 2 : 2 : 3 nei punti D ed E. Per il punto D si tiri una parallela al lato A C, e per il punto E una parallela al lato B C, che intersecherà la prima nel punto O. Da questo punto O si conducano tre rette ai singoli vertici del triangolo, le quali lo divideranno in tre parti che staranno tra di loro nel rapporto di 2 : 2 : 3.

Dimostrazione. — Se si tirano le rette C D, C E, si vedrà tosto che i tre triangoli A D C, D C E, E C B, stanno fra di loro come le loro basi, cioè nel rapporto di 2 : 2 : 3. Ora considerando il triangolo B O C, che ha la stessa base del triangolo C B E e la medesima altezza perchè il vertice su una medesima parallela, sono equivalenti, e per la stessa ragione sono equivalenti i due triangoli A O C, A D C.

Egli è quindi evidente che il terzo triangolo A O B dovrà essere di necessità eguale al terzo del triangolo D E C, e quindi le rette O A, O B, O C dividono la superficie del triangolo in tre parti di medesima area.

La risoluzione generale del quesito si ha perciò nel dividere un lato qualsiasi nel dato rapporto e poscia operando analogamente come venne operato pel supposto esempio.

28.° — *Dividere la superficie di un triangolo in un dato rapporto con rette partenti da un punto preso nel suo interno.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 36).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato, O il punto parimenti dato da cui si debbono tirare delle rette che dividano la superficie del triangolo ad esempio, in tre parti che stiano tra loro, nel rapporto di 1 : 2 : 3.

Si trasformi il triangolo A B C in un altro equivalente che abbia il vertice in O. Per ciò fare, si tirino le rette O A, O B, e pel vertice C si menino a queste delle parallele fino all' incontro del prolungamento del lato A B nei punti D ed E. Si tirino le rette O D, O E, ed il triangolo D O E sarà equivalente al triangolo A B C. Si divida la retta D E nel rapporto 1 : 2 : 3, e si tirino le rette O F, O G. Pel punto F si conduca una parallela alla O A fino all'incontro del lato A C nel punto H, e finalmente tirate le rette O H, O C, queste e la O G saranno le dividenti domandate.

Dimostrazione. — Se si pone mente al modo eseguito per trasformare il triangolo A B C nel triangolo D O E equivalente ed avente il vertice in O, si vedrà tosto che valse il solito metodo già visto per trasformare un poligono in un triangolo equivalente, e quindi con identico ragionamento si comincierebbe a dimostrare l' equivalenza dei triangoli C O D, C A D, e quindi l' equivalenza dei triangoli C O I e D I A, e così dall' altra parte.

Egli è poi chiaro che avendo diviso D E nel rapporto dato e tirate le rette O E ed O G, i triangoli D F O, F O G, G O E stanno nel rapporto di 1 : 2 : 3, e che facendo rientrare nel triangolo A B C la dividente O F che esce fuori, impiegando il solito metodo di trasformare, si viene ad ottenere la dividente O H; O G ed O C

essendo le altre due, il triangolo A B C è diviso in tre parti che stanno come 1 : 2 : 3, mediante le rette O G, O H, O C.

La risoluzione generale del quesito è evidente dopo il supposto esempio.

29.° — *Dividere la superficie di un triangolo con rette parallele ad un lato.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 37).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato che si tratti di dividere ad esempio in tre parti equivalenti con rette parallele al lato A B.

Si divida uno degli altri due lati B C, nel rapporto in cui si vuole dividere il triangolo, cioè in tre parti eguali nei punti D ed E, e sopra detto lato B C si descriva una semicirconferenza. Per i diversi punti D ed E si innalzino delle perpendicolari che taglieranno la semicirconferenza nei punti F e G; e si conducano in seguito le rette C F, C G, e si portino queste lunghezze sul lato C B. Per i punti I ed H si menino delle parallele alla A B che divideranno la superficie del triangolo in tre parti equivalenti.

Dimostrazione. — Essendo le rette I L, H N parallele alla base A B, i triangoli A B C, L I C, N H C sono simili, epperciò ha luogo la proporzione $ABC : LIC :: \overline{CB}^2 : \overline{CI}^2$. Essendo poi il triangolo C F B rettangolo, si ha in virtù del corollario del teorema di Pittagora che $\overline{CB}^2 : \overline{CF}^2 :: CB : CD$, ed essendo $CF = CI$, ne segue aversi $ABC : LIC :: CB : CD$, ma $CB : CD :: 3 : 1$, dunque anche $ABC : LIC :: 3 : 1$, cioè la superficie del triangolo L I C è la terza parte della superficie del triangolo A B C.

Con ragionamento analogo, stabilendo le seguenti proporzioni

$$ABC : NHC :: \overline{CB}^2 : \overline{CH}^2$$

$$\overline{CB}^2 : \overline{CG}^2 :: CB : CE$$

risulta

$$ABC : NHC :: CB : CE :: 3 : 2$$

ossia il triangolo N H C è i due terzi del triangolo A B C, epperciò le tracciate parallele divisero effettivamente la superficie del triangolo in tre parti equivalenti.

La risoluzione generale del problema è evidente dopo il supposto esempio.

30.° — *Dividere la superficie di un triangolo con rette perpendicolari ad un lato.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 38).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo a dividersi con rette perpendicolari al lato C B, ad esempio in due parti equivalenti.

Dal vertice A si abbassi sopra B C la perpendicolare A D, e sopra B C descrivasi una semicirconferenza. Dividasi il segmento D C in due parti eguali nel punto E, ed in questo punto si alzi una perpendicolare fino all'incontro della semicirconferenza nel punto F. Si tiri la retta C F e si porti C G = C F. Finalmente pel punto G si innalzi una perpendicolare G H, che dividerà la superficie del triangolo A B C in due parti equivalenti.

Dimostrazione. — Se si considerano i due triangoli A D C, H G C che sono rettangoli, hanno un angolo comune, epperciò sono simili, ha luogo la proporzione seguente A D : H G :: D C : G C. La retta C F = C G essendo media proporzionale tra tutto A B e C E, si ha A B : C G :: C G : C E, e moltiplicando questa ultima proporzione colla prima, termine a termine, si avrà che

$$AD \times AB : HG \times CG :: DC \times CG : GC \times CE$$

e dividendo i due primi termini di questa proporzione per due, ed i due ultimi per G C comune, si ha

$$\frac{AD \times AB}{2} : \frac{HG \times CG}{2} :: DC : CE.$$

I due primi termini, esprimendo il primo la superficie del triangolo A B C, ed il secondo la superficie del triangolo rettangolo H G C, ne segue che le due superficie stanno nel rapporto di D C a D E,

cioè nel rapporto di 2 : 1. La perpendicolare quindi G H divide effettivamente la superficie del dato triangolo per metà.

La risoluzione generale del quesito proposto è evidente perchè analoga a quella tracciata per l'indicato esempio.

31.° — *Dividere in un dato rapporto la superficie di un trapezio con rette partenti da un punto preso sulle basi parallele.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 39).

Risoluzione. — Sia A B C D il trapezio dato, e D il punto dato per cui si debbono tirare delle rette che dividano la superficie del trapezio, ad esempio nel rapporto 3 : 2 : 1.

Si divida il lato C B per metà nel punto E, e da questo punto E si meni una parallela alla A B, che dividerà A D pure per metà nel punto F. Si divida E F nello stesso rapporto in cui si vuole dividere la superficie del trapezio, e per i diversi punti di divisione si conducano delle rette al punto D, e saranno queste D P, D I, e siccome quest'ultima sorte fuori del trapezio, si farà rientrare tirando da I una parallela a D B che taglierà B C in L. Le rette quindi D P, D L divideranno il trapezio A B C D in tre parti che staranno nel dato rapporto.

Dimostrazione. — Essendosi condotta la retta E F parallela ad A B e per il punto E di mezzo di B C, la retta F E è eguale alla metà di A B + D C, e poichè la superficie di un trapezio è eguale al prodotto della retta che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli per l'altezza del trapezio, e quella di un triangolo eguale al prodotto della metà della base per l'altezza, che in questo caso è la medesima di quella del trapezio, ne segue che la superficie del trapezio starà alla superficie del triangolo A P D come F E : F G, epperciò D P è proprio una dividente.

Per le medesime ragioni D I è una dividente, e D L è la sua sostituita, che risolve il problema.

La risoluzione generale del problema è evidente perchè analoga a quella operata pel supposto esempio.

32.° — *Dividere la superficie di un trapezio con rette parallele alle basi parallele.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 40).

Risoluzione 1.ª — Sia A B C D il trapezio dato che si tratti di dividere, ad esempio in due parti equivalenti con una retta parallela alle basi parallele.

Si formi un triangolo C D E che sia la metà della superficie del trapezio, e quindi si prolunghino i lati non paralleli fino al loro incontro in O. Si descriva sulla retta O E una semicirconferenza, e nel punto C si innalzi una perpendicolare sino all'incontro di essa in F. Si tiri la retta O F, si porti $OG = OF$, e pel punto G si conduca una parallela ad A B, che sarà la dividente domandata.

Dimostrazione. — Essendo G H parallela a D C, ne segue che i due triangoli O D C, O H G sono simili e danno luogo alla proporzione

(1) $$OHG : ODC :: \overline{OG}^2 : \overline{OC}^2$$

ma i due triangoli O D E, O D C avendo la medesima altezza, stanno come le loro basi, e quindi la proporzione

(2) $$ODE : ODC :: OE : OC.$$

Essendo la superficie del triangolo D C E eguale per costruzione alla metà di quella del dato trapezio, si ha che deve essere O H G equivalente ad O D E. Così le due proporzioni (1) e (2) avendo il primo membro eguale, i secondi formano proporzione e si ha $\overline{OG}^2 : \overline{OC}^2 :: OE : OC$, ed ancora $\overline{OG}^2 \times OC = \overline{OC}^2 \times OE$, che si trasforma in $\overline{OG}^2 = OC \times OE$. Quest'ultima eguaglianza essendo appunto quella descritta coll'eseguita costruzione, prova che la retta G H divide effettivamente il trapezio in due parti equivalenti.

La risoluzione generale del problema è evidente dopo la spiegata costruzione.

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 41).

Risoluzione 2.ª — Sia A B C D il trapezio da dividersi ad esempio in due parti equivalenti con una retta parallela al lato A B.

Si prolunghino A D, B C fino al loro incontro in O, per il punto D si meni D E parallela a C B, che dividasi poi per metà in F, e per questo punto tirisi una parallela ad A B ed una retta al vertice A. Egli è chiaro che la retta A E G dividerà il trapezio in due parti equivalenti, poichè ne divide ciascuna parte in cui venne scomposto il trapezio. Trasformisi la retta spezzata A E G in una sola linea retta tirando la A G e pel punto F menando una parallela che intersecherà B C in H. La retta A H sarà la sostituita della spezzata A E G e dividerà perciò pure il trapezio in due parti equivalenti.

Si descriva sopra B O una semicirconferenza, e pel punto H si innalzi una perpendicolare sino all'incontro della semicirconferenza in I. Si tiri la retta O I, si porti O L = O I, e pel punto L si meni una parallela ad A B che sarà la dividente domandata.

Dimostrazione. — Essendosi tirata la retta N L parallela ad A B, i due triangoli A B O, O N L sono simili, e quindi ha luogo la proporzione seguente:

$$(1) \qquad OAB : ONL :: \overline{OB}^2 : \overline{OL}^2.$$

Considerando poi i due triangoli O A B, O A H che hanno la medesima altezza, e che perciò le basi sono proporzionali alla superficie, si ha

$$(2) \qquad OAB : OAH :: OB : OH.$$

Dovendo essere la superficie O N L equivalente alla superficie del triangolo O A H siccome composte del triangolo comune O D C e di una superficie metà del trapezio, si vede tosto che le proporzioni (1) e (2) hanno il primo membro eguale, epperciò si può scrivere l'altra proporzione O A B : O N L :: O B : O H. Colla eseguita costruzione essendosi fatto la proporzione $\overline{OB}^2 : \overline{OL}^2 ::$ $OB : OH$, la parallela L N divide quindi il dato trapezio in due parti equivalenti.

La risoluzione generale del quesito è evidente perchè analoga all'operato pel supposto esempio.

33.° — *Dividere la superficie di un dato poligono in un dato rapporto con rette partenti da un vertice.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 42).

Risoluzione. — Sia A B C D E il poligono dato che si tratti di dividere, ad esempio in tre parti equivalenti con rette partenti dal vertice D.

Si trasformi il dato poligono in un triangolo equivalente e che abbia il vertice in D, col mezzo indicato nel problema 14.°, e sia G F D il triangolo equivalente. Si divida la base G F in tre parti eguali nei punti H ed I. Si tirino le rette D H, D I che sono le dividenti del triangolo. Si faccia rientrare nel poligono la dividente D I tirando da I una retta I L parallela alla D B, e tirando la D L sarà la dividente sostituita. Quindi ne segue che le due rette D H, D L dividono il poligono in tre parti equivalenti.

Dimostrazione. — Una minuta analisi del modo proceduto per la trasformazione del poligono dato in un triangolo equivalente, farà tosto vedere che la dividente D H separa dal poligono un terzo della sua superficie. Come pure che la retta D I dà nella superficie H I D il terzo della superficie del poligono, e come facendo rientrare quella porzione di superficie non compresa nel poligono, si ha con un analogo ragionamento che D L è l' altra dividente cercata.

La risoluzione generale è evidente perchè analoga alla risoluzione operata pel supposto esempio.

34.° — *Dividere la superficie di un poligono con rette partenti da un punto preso sul suo perimetro.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 43).

Risoluzione. — Sia A B C D E il poligono dato che si tratti di dividere in parti che stiano tra loro nel rapporto ad esempio di 1 : 4 : 1, con rette partenti dal punto P preso sul lato A B.

Si trasformi il poligono dato in un triangolo equivalente che abbia la base sul lato A B su cui si trova il punto dato, e sia G D F il triangolo equivalente. Si operi quindi la costruzione in-

dicata per la risoluzione del problema 26.° per dividere il triangolo G D F in tre parti che stiano fra di loro nel rapporto 1 : 4 : 1 con rette partenti dal punto P, e siano le dividenti P S e P T. Si sostituisca a queste dividenti le rette P Q e P R, le quali saranno le dividenti domandate.

Dimostrazione. — Essendochè il triangolo G F D è equivalente al poligono dato A B C D E per la eseguita costruzione, ed essendochè si è diviso il triangolo G F D nel rapporto in cui si voleva dividere il poligono prima per mezzo delle rette D H e D I partenti dal vertice D, poscia col mezzo delle dividenti P S, P T partenti dal punto P preso sul lato, è chiaro che sostituendo alle linee spezzate P S D, P T B formate dalle dividenti del triangolo coi rispettivi lati, delle linee rette, si ottengono naturalmente le dividenti del poligono.

La risoluzione generale del problema è evidente dopo l'esempio citato.

35.° — *Dividere la superficie di un poligono con rette partenti da un punto preso nell' interno.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 44).

Risoluzione. — Sia A B C D E il poligono che si tratta di dividere ad esempio in tre parti equivalenti con rette partenti dal punto O preso nell' interno del poligono.

Si trasformi anzitutto il poligono A B C D E in un triangolo H O I che sia equivalente e che abbia il vertice nel punto dato O, e ciò per mezzo della risoluzione dei problemi 14.° e 28.°, cioè trasformando prima il poligono dato in un triangolo qualunque equivalente che abbia un vertice ad esempio in D, e trasformando il triangolo F D G in un altro equivalente che abbia il vertice in O. Si divida quest' ultimo triangolo H O I nel rapporto in cui si vuole dividere il poligono, cioè si divida la base H I in tre parti eguali nei punti 1 e 2, e si tirino le rette O 1, O 2. Siccome queste non cadono fuori del triangolo F G D, si facciano direttamente rientrare tirando per il punto 1 una parallela alla O A e pel punto 2 una parallela alla O B. Tirate infine le rette O P, O Q, O D, queste divideranno il poligono dato in tre parti equivalenti.

Dimostrazione. — Per la eseguita costruzione essendosi trasformato il poligono prima in un triangolo equivalente, poscia in un altro avente il vertice nel punto dato, è chiaro che le rette che dividono quest'ultimo triangolo in tre parti equivalenti separano una porzione di superficie precisamente eguale alla terza parte di quella del dato poligono, e che perciò facendo rientrare col solito metodo le dividenti, il poligono risulta effettivamente diviso nello stesso rapporto del triangolo e nel rapporto dato.

36.° — *Dividere la superficie di un quadrilatero con rette parallele ad un lato.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 45).

Risoluzione. — Sia A B C D il quadrilatero dato che si tratta di dividere ad esempio in due parti equivalenti con una retta parallela al lato A B.

Si prolunghino i due lati B C, A D fino al loro incontro in O, si tiri la retta D B, si divida questa per metà nel punto E, e si tirino le rette A E, C E. Si sostituisca alla spezzata A E C una linea retta A F; e pel punto F si innalzi ad O B una perpendicolare F G sino all' incontro della semicirconferenza descritta sopra B O. Si tiri la retta O G, si porti O G = O H, e pel punto H si meni una parallela ad A B che dividerà il dato quadrilatero in due parti equivalenti.

Dimostrazione. — Essendosi condotte le rette A E, E C alla metà della diagonale D B del quadrilatero, esse hanno diviso per metà la superficie del medesimo, ed essendosi sostituito la retta A F alla spezzata A E C, ne segue che essa ha diviso pure per metà il dato quadrilatero. Ora, considerando i due triangoli O A B, O I H che sono simili, e che danno la proporzione $OAB : OIH :: \overline{OB}^2 : \overline{OH}^2$, e considerando in seguito i due triangoli O A B, O A F che hanno la medesima altezza e che perciò danno l'altra $OAB : OAF :: OB : OF$, vedesi come per la fatta costruzione essendo $\overline{OB}^2 : \overline{OH}^2 :: OB : OF$, abbia luogo quest' altra proporzione, cioè: $OAB : OIH :: OAB : OAF$, in cui per l' eguaglianza degli antecedenti si ha che il triangolo O I H è equivalente al triangolo

O A F, e togliendo da ciascuno di questi il triangolo comune O D C, risulti che il quadrilatero A F C D è equivalente al quadrilatero I H C D, vale a dire come la retta I H ha diviso il quadrilatero dato per metà.

37.° — *Dividere la superficie di un circolo in otto parti equivalenti con sole tre linee.*

(Vedi Tavola XXVIII, Fig. 46).

Risoluzione. — Sia il circolo di raggio O A che si tratti di dividere in otto parti equivalenti con sole tre linee.

Sul raggio O A si descriva una semicirconferenza, e pel centro di questa si innalzi la perpendicolare E F e si tiri O F. Con raggio O F facendo centro in O e descrivendo una circonferenza di circolo, questa sarà una linea che dividerà il dato circolo in due parti equivalenti. Si conducano in seguito due diametri perpendicolari, che divideranno la superficie del circolo dato in otto parti equivalenti.

Dimostrazione. — Siccome $OE = \frac{OA}{2}$, e siccome la superficie del circolo dato è eguale a $\pi \overline{OA}^2$, ne segue che $OF = OE\sqrt{2}$, ossia $OF = \frac{OA\sqrt{2}}{2}$, e la superficie del circolo di raggio O F avere l'espressione seguente, cioè

$$S = \pi \times \left(\frac{OA\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ossia $S = \pi \times \frac{2\,\overline{OA}^2}{4}$, ossia ancora $S = \frac{\pi\,\overline{OA}^2}{2}$, cioè il circolo descritto con raggio O F è di superficie la metà di quella del circolo dato. Ora egli è evidente che i due diametri perpendicolari dividendo il circolo dato in quattro parti eguali ed equivalenti, le tre linee, circonferenza O F, diametro A B, e diametro C D, dividono il circolo dato in otto parti equivalenti.

38.° — *Dividere la superficie di un circolo in tre parti equivalenti e di egual perimetro, col mezzo di semicirconferenze.*

(Vedi Tav. XXVIII, Fig. 47).

Risoluzione. — Sia il circolo di centro O quello dato che si tratta di dividere in tre parti equivalenti e di eguale perimetro per mezzo di semicirconferenze.

Si tiri il diametro A B e si divida in sei parti eguali A E = E D = D O = O C = C F = F B. Con centro in E ed in D e con raggi E A, D A, si descrivano superiormente due semicirconferenze, e con centro in F ed in C e con raggi F B, C B, si descrivano inferiormente altre due semicirconferenze. Queste quattro semicirconferenze unite due a due dividono il dato circolo in tre parti equivalenti e di eguale perimetro.

Dimostrazione. — Esaminando le tre parti in cui venne diviso il dato circolo, si vede che la 1.ª è compresa dalla semicirconferenza del circolo dato e le semicirconferenze descritte facendo centro in E ed in C, la 2.ª è compresa fra le quattro semicirconferenze descritte, la 3.ª è compresa fra l'altra semicirconferenza del circolo dato e le semicirconferenze descritte facendo centro in F ed in D.

Considerando la 1.ª parte, si vede che essa è formata dalla superficie del semicircolo descritto sopra A D, più la differenza dei due semicircoli descritti sopra A B, D B; per cui essendo la superficie del semicircolo descritto sopra A D eguale a $\frac{\pi \overline{AB}^2}{72}$, la superficie del semicircolo descritto sopra A B eguale a $\frac{\pi \overline{AB}^2}{8}$, quella del semicircolo descritto sopra D B eguale a $\frac{\pi \overline{AB}^2}{18}$, è per conseguenza la superficie della prima parte espressa da

$$\frac{\pi \overline{AB}^2}{72} + \left(\frac{\pi \overline{AB}^2}{8} - \frac{\pi \overline{AB}^2}{18} \right)$$

ossia

$$\frac{\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}+\frac{9\,\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}-\frac{4\,\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}=\frac{6\,\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}=\frac{\pi\,\overline{A\,B}^2}{12}$$

cioè la terza parte del circolo dato.

Considerando la 2.ª parte, si vede che essa è formata dal doppio della differenza delle due semicirconferenze descritte con raggio E D, D C, e che perciò essa è eguale a $2\left(\frac{\pi\,\overline{A\,B}^2}{18}-\frac{\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}\right)$ ossia a $\frac{6\,\pi\,\overline{A\,B}^2}{72}$, cioè a $\frac{\pi\,\overline{A\,B}^2}{12}$, che è la terza parte del circolo dato.

Le due prime parti essendo ciascuna eguale ad un terzo, l'ultima è di necessità pure un terzo, cosa che d'altronde non è difficile di dimostrare tenendo la via tenuta per la dimostrazione della 1.ª parte.

Le tre parti in cui venne diviso il dato circolo non solo sono equivalenti tra di loro ed equivalenti ad un terzo del dato circolo, ma esse sono pure di eguale perimetro, e basterà calcolare il valore delle diverse semicirconferenze descritte per vedere tosto che il perimetro di ciascuna delle parti è eguale alla circonferenza del dato circolo.

Infatti la semicirconferenza del circolo dato essendo eguale a $\frac{\pi\,A\,B}{2}$, la semicirconferenza descritta sopra A D eguale a $\frac{\pi\,A\,B}{6}$, e quella descritta sopra A C eguale a $\frac{\pi\,A\,B}{3}$, il perimetro della prima parte è

$$\frac{\pi\,A\,B}{6}+\frac{\pi\,A\,B}{2}+\frac{\pi\,A\,B}{3}=\pi\,A\,B$$

quello della seconda parte

$$\frac{\pi\,A\,B}{6}+\frac{\pi\,A\,B}{3}+\frac{\pi\,A\,B}{3}+\frac{\pi\,A\,B}{6}=\pi\,A\,B$$

e quello della terza parte

$$\frac{\pi A B}{3}+\frac{\pi A B}{2}+\frac{\pi A B}{6}=\pi A B$$

cioè eguale per tutti e tre, a π A B, cioè alla circonferenza di diametro A B.

39.° — *Per un punto tirare una retta in guisa che le distanze fra esso ed i punti in cui la retta tirata incontra due rette date stieno fra loro in un dato rapporto.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 48).

Risoluzione. — Siano C A, C B le rette date, e P il punto dal quale si debba tirare una secante a queste per modo che le distanze fra questo ed i punti in cui incontra le rette date stieno nel rapporto di 1 : 3.

Si unisca il punto dato P col punto C d'incontro delle due rette date, e si divida questa retta P C nel rapporto di 1 : 3 nel punto D, dal quale non si avrà che a menare un parallela alla retta C A, per ottenere il punto E, che unito col mezzo di una retta al punto P darà nella retta P F la secante domandata.

Dimostrazione. — Nel triangolo C P F la retta D E essendo parallela al lato C F e dividendo la retta C P nel rapporto di 1 : 3, divide pure la retta P F nello stesso rapporto, cioè è P E : P F :: 1 : 3.

40.° — *Essendo date due rette ed un punto, descrivere da questo come centro una circonferenza tale che tagli le due rette date in due punti tali che la corda riesca parallela ad una terza retta data.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 49).

Risoluzione. — Siano C A, C R le rette date, e P il punto da cui si tratti di descrivere una circonferenza che abbia a tagliare le rette date in punti tali che la corda riesca parallela alla retta data M N.

Dal punto dato P si meni una retta F G parallela alla retta data M N, e la si divida per metà nel punto H. Uniscasi il punto H col punto C incontro delle due rette date, e si prolunghi sino all' in-

contro I della perpendicolare abbassata dal punto P sulla retta M N. Per il punto I si tiri una parallela alla M N che taglierà le rette date nei punti D ed E. Con raggio eguale a P D e facendo centro in P descrivasi una circonferenza che sarà la domandata.

Dimostrazione. — Considerando dapprima i due triangoli C F G, C D E che sono simili per essere D E parallelo ad F G parallelo ad N N, ne segue che la retta C H che unisce il vertice C colla metà di F G, divide pure per metà D E in I ed è perciò D I = I E. Se ora si osserva che la retta P I è perpendicolare sulla metà di D E, si vede subito che P D = P E, cioè che con raggio P D descrivendo una circonferenza, essa viene a passare pel punto E, e la corda D E essendo parallela per costruzione alla retta M N, la circonferenza descritta risolve il problema.

41.° — *Date due rette ed un punto egualmente distante da queste, tracciare dal medesimo una secante alle rette date per modo che la lunghezza compresa fra esse sia eguale ad una lunghezza data.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 50).

Risoluzione. — Siano A B e C D le rette date, e P il punto da cui si debba tirare una secante alle due rette date, per modo che la lunghezza compresa fra di esse sia eguale alla retta data *l*.

Dal punto P si meni una parallela alla retta data A B e si innalzi una perpendicolare P R = *l*. Si descriva poscia una semicirconferenza facendo centro nel punto O con raggio eguale alla retta O R, e si descrivano in seguito sulle rette E P e P F altre due semicirconferenze che taglieranno la retta data A B nei quattro punti N, Q, L, I. Uniscasi ciascuno di questi punti col punto dato P, e si avranno quattro secanti che rispondono al problema.

Dimostrazione. — Il triangolo P I F siccome inscritto nel semicircolo è rettangolo, perciò dietro il teorema di Pittagora si ha

$$(1) \qquad \overline{PI}^2 + \overline{IF}^2 = \overline{PF}^2$$

ma essendo $PF = OF - OP$, $OF = OR$ ed $OR = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{PO}^2}$ si ha che

$$PF = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{PO}^2} - OP$$

e sostituendo questo valore di P F nell'equazione (1) si ha

$$\overline{PI}^2+\overline{IF}^2=\overline{PR}^2+\overline{PO}^2-2\,OP\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{PO}^2}+\overline{OP}^2$$

che ridotta dà

$$(2)\qquad \overline{PI}^2+\overline{IF}^2=\overline{PR}^2+2\,\overline{PO}^2-2\,PO\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{PO}^2}.$$

Ora, dalla considerazione che il triangolo P I F è rettangolo e che perciò $PI \times IF = PF \times SI$ per la ragione che il prodotto di una qualunque delle basi di un triangolo per la rispettiva altezza è costante, si ha pure che l'eguaglianza sussiste sempre moltiplicandone ambi i membri per 2, onde $2\,PI \times IF = 2\,SI \times PF$, ma S I essendo eguale a P O, ne segue che $2\,PI \times IF = 2\,PO \times PF$, e P F essendo eguale a $\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{PO}^2}-OP$, sostituendo questo valore nella eguaglianza precedente si ha

$$(3)\qquad 2\,PI \times IF = 2\,PO\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{PO}^2}-\overline{OP}^2.$$

Sommando poi le due equazioni (2), (3) si ha

$$\overline{PI}^2+\overline{IF}^2+2\,PI \times IF=\overline{PR}^2$$

ed estraendo la radice quadrata da ambedue i membri

$$(4)\qquad PI+IF=PR$$

ma I F essendo eguale a P G per essere i due triangoli rettangoli P G O, S I F eguali, come aventi $SI = PO$ per costruzione ed un angolo acuto eguale, risulta che l'equazione (4) si riduce a $PI + PG = PR$, ossia $GI = PR$, ma P R essendo eguale ad *l*, così anche la secante G I è eguale ad *l*, epperciò è la domandata.

Con ragionamento analogo si dimostra che anche H L, Q D, N Y, sono eguali alla retta data *l*.

42.° — Costruire un triangolo conoscendone la base, l'angolo opposto ed il rapporto degli altri due lati.

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 51).

Risoluzione. — Sia b la base data, ed H l'angolo opposto del triangolo da costruirsi, in cui il rapporto degli altri due lati deve essere come 2 : 3.

Si tiri una retta A B eguale alla base data b, e sopra questa retta si descriva un segmento di circolo capace dell'angolo dato H. (Vedi Problema 32.° del libro secondo). Si divida la retta A B nel rapporto 2 : 3 e l'arco A B per metà in E. Si tiri la retta D E e si prolunghi fino all' incontro C col segmento di circolo descritto, e per ultimo si conducano le rette C A, C B, ed il triangolo A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Il triangolo A B C ha la base A B $= b$ per costruzione, l'angolo C $=$ H siccome collocato sul segmento di circolo descritto capace dell'angolo H, e di più i due lati C B e C A stanno nel rapporto di 2 : 3, poichè essendo proprietà di teoria di geometria che la bisettrice dell'angolo di un triangolo divide il lato opposto in parti proporzionali, la retta C D che divide il lato A B per costruzione nel rapporto 2 : 3 e divide l' arco A B per metà, essa è bisettrice dell'angolo C, epperciò è C B : C A :: 2 : 3.

43.° — Costruire un triangolo conoscendone le tre altezze.

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 52).

Risoluzione. — Siano h, h' e h'' le tre altezze di un triangolo da costruirsi.

Si costruisca un triangolo A D E, in cui sia A D $= h$, D E $= h'$, A E $= h''$, e si abbassino le tre altezze E F, D C, A H, colle quali si costruisca in seguito un secondo triangolo A I L, per modo che sia A I $=$ E F, A L $=$ C D, L I $=$ A H. Si prolunghi A L ed A I, ed in un punto qualunque R si innalzi una perpendicolare R C $= h$, e pel punto C si tiri una parallela ad A I che taglierà A L nel punto C. Pel punto C si tiri una parallela alla L I, ed il triangolo risultante A B C sarà il domandato.

Dimostrazione. — Si chiami anzitutto E F con $h_,$, C D con $h'_,$, e A H con $h''_,$, e poscia rammentando che le altezze di un triangolo sono inversamente proporzionali alle basi, non si tarderà a comprendere come possa stabilirsi la seguente proporzione, prendendo in considerazione il triangolo A D E, cioè $h : h' : h'' :: \frac{1}{h_,} : \frac{1}{h'_,} : \frac{1}{h''_,}$; e come chiamando con x, y e z i tre lati del triangolo A B, A C, C B abbiasi la seguente altra proporzione colle tre altezze, cioè $h : h' : h'' :: \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$. Le due proporzioni stabilite avendo il primo membro eguale, i secondi formano proporzione e si ha $\frac{1}{h_,} : \frac{1}{h'_,} : \frac{1}{h''_,} :: \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$ ossia $h_, : h'_, : h''_, :: x : y : z$, per modo che il triangolo A I L che ha per lati A I $= h$, A L $= h'$, I L $= h''$, è simile al triangolo che si cerca, epperciò avendovi portato come si è fatto l'altezza omologa, è il triangolo A B C il domandato.

44.° — *Date tre rette, trovare un punto da cui tirando rette ai loro estremi si abbiano tre triangoli equivalenti.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 53).

Risoluzione. — Siano A B, C D, E F le tre rette date, alle quali si debba da un solo punto tirare delle rette agli estremi di esse per modo che abbiano a risultare tre triangoli equivalenti.

Nel punto A si innalzi una perpendicolare A L $=$ E F, nel punto E una perpendicolare E H $=$ A B. Per il punto L si meni una parallela alla A B e per il punto H una parallela alla E F, le quali parallele si incontreranno nel punto Q. Si tiri la retta M Q, essendo il punto M, punto d'incontro del prolungamento delle rette A B ed E F.

Nel punto C si innalzi una perpendicolare C I $=$ E F e si porti sulla perpendicolare E H una distanza E G $=$ C D. Per il punto I si conduca una parallela alla C D e pel punto G una parallela alla E F, le quali parallele si verranno ad incontrare in P. Dal punto R d'incontro del prolungamento delle rette C D ed E F si tiri la retta R P che taglierà la M Q nel punto O che sarà il punto cercato, cioè tale che tirando le rette O A, O B, O C, O D, O E, O F i triangoli A O B, C O D, E O F saranno equivalenti.

Dimostrazione. — In due triangoli equivalenti le basi essendo inversamente proporzionali alle altezze, ne segue che la retta M Q essendo tale che da essa abbassando le due perpendicolari Q T, Q V, queste sono rispettivamente eguali a E F ed A B, si ha che da qualunque punto O di detta retta Q M abbassando delle perpendicolari sopra AB ed EF, queste sono proporzionali alle perpendicolari Q T, Q V, epperciò inversamente proporzionali ai rispettivi lati A B, E F. Per le medesime ragioni la retta R P essendo tale che ogni punto di essa dista dalle due rette E F e C D nella proporzione delle due perpendicolari P U e P R, epperciò nella proporzione inversa delle rette E F, C D, il punto O d'intersezione delle due rette M Q e R P essendo perciò tale che esso dista dalle tre rette date A B, C D, E F in un rapporto ad esse inversamente proporzionale, i tre triangoli A O B, C O D, E O F sono equivalenti.

45.° — *Dati i tre lati di un triangolo, calcolarne i quattro raggi dei circoli contemporaneamente tangenti ai tre lati.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 54).

Risoluzione. — Sia A B C il dato triangolo, in cui per brevità chiamisi il lato A B con c, A C con b, C B con a, e di cui si debba calcolare: 1.° il raggio del circolo inscritto, 2.° il raggio dei circoli ex-inscritti.

Dalla risoluzione grafica stata spiegata col problema 30.° relativo al libro secondo, risulta che essendo il circolo di centro O inscritto nel triangolo, abbassando dal centro tre perpendicolari sui rispettivi lati, esse sono eguali. Ora, se si pone mente che il triangolo A B C risulta scomposto dalle rette O A, O B, O C in tre triangoli A O B, A O C, C O B di medesima altezza, ed aventi per base i lati del dato triangolo, si vedrà tosto che chiamando per brevità S la superficie del triangolo e con r il raggio che si cerca, si abbia

$$S = r\left(\frac{a + b + c}{2}\right)$$

oppure

$$2\,S = r\,(a + b + c)$$

dalla quale ricavando il valore di r, risulta

$$r = \frac{2\,S}{a + b + c}$$

cioè: il raggio del circolo inscritto in un triangolo è eguale al quoziente del doppio della superficie del triangolo per la somma dei lati del triangolo.

Venendo ora a calcolare i raggi dei circoli ex-inscritti nel triangolo e che chiamaremo con r', r'', r''', si vedrà tosto che il triangolo A B C è equivalente al triangolo A O′ B più il triangolo A C O′ meno il triangolo C O′ B. Ora, calcolando la superficie di ciascuno dei triangoli, si vedrà che essi hanno eguale altezza perchè O′ D $=$ O′ F $=$ O′ E $= r'$, per cui avere luogo l'eguaglianza che segue

$$2\,S = r'\,(A\,B + A\,C - C\,B)$$

dalla quale si ricava

$$r' = \frac{2\,S}{c + b - a}.$$

Analoghe considerazioni facendo, si ricaverà

$$r' = \frac{2\,S}{a + b - c}$$

e

$$r'' = \frac{2\,S}{a + c - b}$$

cioè: il raggio di un circolo ex-inscritto in un dato triangolo è eguale al quoziente del doppio della superficie per la differenza fra la somma dei due lati del triangolo a cui il circolo viene ad essere tangente sul prolungamento, ed il terzo lato.

46.° — *Calcolare il raggio del circolo circoscritto ad un dato triangolo.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 55).

Risoluzione 1.ª — Sia A B C il triangolo dato. Egli è chiaro che se gli si immagina circoscritto un circolo, ed abbassata dal vertice C l'altezza C E, indi condotto il diametro A D e tirata la

retta C D, ne risultano due triangoli A C D, C E B, i quali sono rettangoli, il primo in C come inscritto nel semicircolo, il secondo per essere C E perpendicolare ad A B, ed hanno l' angolo C D A eguale all' angolo C B A siccome aventi per misura la metà dello stesso arco, epperciò i due triangoli A C D, C E B essere simili e dare per conseguenza la seguente proporzione:

$$AD : CB :: AC : CE$$

ma A D essendo il diametro del circolo circoscritto, si ricava

$$2R = \frac{CB \times AC}{CE}$$

e quindi

$$R = \frac{CB \times AC}{2\,CE}$$

cioè: il raggio del circolo circoscritto ad un dato triangolo è eguale al quoziente del prodotto di due lati del triangolo per il doppio dell'altezza abbassata sul terzo lato.

Risoluzione 2.ª — Si tiri la retta B D che risulterà un quadrilatero A B D C, il quale pel teorema stato dimostrato a pag. 274 darà l'eguaglianza

$$AC \times DB + CD \times AB = CB \times AD$$

nella quale badando essere A D il diametro del circolo circoscritto al triangolo, epperciò eguale a due volte il raggio, vedesi come per più semplicità chiamando con r il raggio del circolo, A B con c, A C con b, B C con a, si abbia l' eguaglianza

$$b \times DB + c \times CD = a \times 2r.$$

Il triangolo A C D essendo rettangolo, come lo è pure il triangolo A B D, ciascuno fornisce

$$DB = \sqrt{4r^2 - c^2}, \quad CD = \sqrt{4r^2 - b^2}$$

i quali valori di C D e di D B sostituiti nel valore di $a \times 2r$, danno

$$b\sqrt{4r^2 - c^2} + c\sqrt{4r^2 - b^2} = 2ra$$

espressione che può venire messa sotto l'altra forma

$$2\,r\,a - b\sqrt{4\,r^2 - c^2} = c\sqrt{4\,r^2 - b^2}$$

della quale elevandone i due membri al quadrato si ha

$$4\,r^2\,a^2 - 4\,r\,a\,b\sqrt{4\,r^2 - c^2} + 4\,r^2\,b^2 - c^2\,b^2 = 4\,r^2\,c^2 - c^2\,b^2$$

che riducendola dà

$$4\,r^2\,a^2 - 4\,r\,a\,b\sqrt{4\,r^2 - c^2} + 4\,r^2\,b^2 = 4\,r^2\,c^2$$

ossia

$$r^2\,a^2 - r\,a\,b\sqrt{4\,r^2 - c^2} + r^2\,b^2 = r^2\,c^2$$

e dividendola per r^2

$$a^2 - \frac{a\,b}{r}\sqrt{4\,r^2 - c^2} + b^2 = c^2$$

e portando il termine b^2 nel secondo membro

$$a^2 - \frac{a}{r}\sqrt{4\,r^2 - c^2}\,.\,b = c^2 - b^2$$

che moltiplicata per r dà

$$r\,(a^2 + b^2 - c^2) = a\,b\sqrt{4\,r^2 - c^2}$$

ed innalzando nuovamente i due membri di questa equazione al quadrato, si ha

$$r^2\,(a^2 + b^2 - c^2)^2 = 4\,r^2\,a^2\,b^2 - c^2\,a^2\,b^2$$

da cui ricavasi

$$c^2\,a^2\,b^2 = 4\,r^2\,a^2\,b^2 - r^2\,(a^2 + b^2 - c^2)^2$$

ossia

$$c^2\,a^2\,b^2 = r^2\,[4\,a^2\,b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2\,]$$

e quindi

$$r^2 = \frac{c^2\, a^2\, b^2}{4\, a^2\, b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

ed estraendo la radice

(¹) $$r = \frac{c\, a\, b}{\sqrt{4\, a^2\, b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}.$$

Qui osservando che se si computa col mezzo indicato nella teoria l'area del triangolo in funzione dei suoi tre lati, si arriva all'espressione

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4\, a^2\, b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

e quindi $\sqrt{4\, r^2\, a^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$ è eguale a 4 S, sostituendo questo valore nella equazione (¹) si ricava

$$r = \frac{c\, a\, b}{4\, S}$$

cioè: il raggio del circolo circoscritto ad un triangolo è eguale al quoziente che si ottiene dividendo il prodotto dei tre lati del dato triangolo pel quadruplo della superficie.

47.° — *Inscrivere in un dato triangolo un rettangolo conoscendo il rapporto dei lati.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 56).

Risoluzione. — Sia A B C il triangolo dato, nel quale si debba inscrivere un rettangolo il cui rapporto di lati sia ad esempio 2 : 3.

Dal vertice C si abbassi la perpendicolare C D alla base A B, e dallo stesso vertice C si meni una parallela alla A B; si prenda C E per modo che sia C E : C D :: 2 : 3, e si tiri la retta A E, chè dal punto in cui questa taglia il lato C B del triangolo dato abbassando una perpendicolare G L e formando il rettangolo L G H I, esso sarà il domandato.

Dimostrazione. — Se si immagina abbassata dal punto E la perpendicolare E F, si vedrà tosto che i due triangoli A F E, A L G sono simili, come pure simili sono i triangoli A C E, A H G, epperciò si possano stabilire le due proporzioni

$$A E : A G :: E F : G L$$

$$A E : A G :: C E : H G$$

le quali due proporzioni avendo il primo membro eguale, i secondi formano proporzione e si ha $E F : C E :: G L : H G$, nella quale essendo $E F = C D$ e $E F : C E :: 2 : 3$ per costruzione, il rapporto di $G L : H G$ è perciò pure di $2 : 3$, cioè il rettangolo H G L I è inscritto nel triangolo, ed i lati stanno nel dato rapporto.

Discussione. — Egli è chiaro che ove si volesse inscrivere in un triangolo un quadrato, sarebbe sufficiente di portare una distanza $C E = C D$, poichè i lati del quadrato sono eguali tra loro.

Volendo poi calcolare il lato del quadrato inscritto in funzione dei tre lati, basterà immaginare inscritto il quadrato nel triangolo e fare la supposizione che nella figura $H G = G L$, per vedere risultare due triangoli C A B, C H G, che essendo simili e che perciò avendo lati e linee omologhe proporzionali, danno luogo alla proporzione $A B : C D :: H G : C P$, che componendola dà $A B + C D : A B :: H G + C P : H G$; e siccome H G sarebbe il lato del quadrato che si cerca, epperciò eguale a P D, così chiamandolo X si ricava $A B + C D : A B :: C D : X$, onde $X = \frac{C D \times A B}{A B + C D}$.

Nella teoria essendosi svolto il modo di calcolare l'altezza di un triangolo in funzione dei tre lati, è quindi facile calcolare il lato del quadrato inscritto, sapendo che esso è eguale al quoziente del prodotto, colla somma della base colla rispettiva altezza.

48.° — *Date le due basi parallele di un trapezio e la sua altezza, trovare la superficie che si otterrebbe prolungandone i lati non paralleli.*

(Vedi Tav. XXIX, Fig. 57).

Risoluzione. — Sia A B C D il trapezio dato, di cui si tratta di calcolare la superficie del triangolo C D E formato dal prolungamento dei lati non paralleli A C e B D.

La figura A B C D essendo un trapezio, ed il lato A B essendo parallelo al lato C D, i due triangoli A B E, C D E sono simili e quindi danno luogo alla seguente proporzione, cioè A B : C D :: E G : E H, che divisa dà A B — C D : C D :: E G — E H : E H. Ma E G — E H = H G = C F, onde si ha $E\,H = \frac{C\,D \times C\,F}{A\,B - C\,D}$, e quindi moltiplicando E H per $\frac{C\,D}{2}$ si ottiene la superficie del triangolo C D E che si cerca, ossia $C\,D\,E = \frac{C\,D^2 \times C\,F}{2\,A\,B - 2\,C\,D}$, cioè eguale al quoziente che si ottiene dividendo il prodotto del quadrato della base più piccola con l'altezza del trapezio, per il doppio della differenza delle due basi parallele.

49.° — *Data la corda e la saetta di un arco circolare, calcolare la distanza di un punto dell' arco dalla corda, conoscendo i segmenti che fa su questa la proiezione del punto cercato.*

(Vedi Tav. XXIX, Fig. 58).

Risoluzione. — Sia A B la corda data che chiamisi con $2\,c$, C D la saetta pure data che chiamisi con m, e siano A F e F B i segmenti che si conoscono stati formati dalla proiezione del punto P sulla corda A B, e che chiaminsi il primo con a ed il secondo con b, e per ultimo P F la distanza che si tratta di calcolare e che si chiami con X.

Se si immaginano condotti i raggi O A, O P, e dal punto P tirato P Q parallelo ad A B, risulta che P F = Q C. Ora adunque, calcolando il raggio del circolo a cui la corda e saetta data appartengono, calcolando O C, O Q, si ricaverà tosto il valore di X.

Per calcolare: 1.° il raggio del circolo, basterà condurre le rette A D, A E e vedere che A D è media proporzionale fra D E il diametro e D C la saetta, per stabilire l' equazione $\overline{A\,D}^2 = 2\,r \times m$, dalla quale si ricava colla considerazione del triangolo A C D che $c^2 + m^2 = 2\,r\,m$, quindi $2\,r = \frac{c^2 + m^2}{m}$ ed $r = \frac{c^2 + m^2}{2\,m}$, cioè: il raggio del circolo è eguale al quoziente che si ottiene dividendo la somma dei quadrati della semicorda e della saetta, per il doppio della monta.

2.° O C, basterà fare la differenza fra il raggio e la saetta, e si avrà $OC = \frac{c^2 + m^2}{2m} - m$, ossia $OC = \frac{c^2 - m^2}{2m}$.

3.° O Q sarà eguale pella considerazione del triangolo rettangolo P O Q, alla radice quadrata della differenza fra il quadrato del raggio, ed F C, per cui si ha

$$OQ = \sqrt{\left(\frac{c^2 + m^2}{2m}\right)^2 - (b - c)^2}.$$

Facendo la differenza fra O Q ed O C, si ricava

$$X = \sqrt{\left(\frac{c^2 + m^2}{2m}\right)^2 - (b - c)^2} - \frac{c^2 - m^2}{2m}.$$

50.° — *Costruire un pentagono conoscendo i punti di mezzo dei lati.*

(Vedi Tavola XXIX, Fig. 59).

Risoluzione. — Siano A, B, C, D, E i punti di mezzo dei lati di un pentagono da costruirsi.

Si tirino le rette A B, B C, e si formi il parallelogramma A B C F, indi pel punto F si tiri una parallela alla retta D E, e si porti F G = F H = E D. I punti H e G saranno di già due vertici del pentagono a costruirsi. Per trovare gli altri tre, si tirino le rette H E e G D che si incontreranno nel vertice N, e si tiri in seguito la retta H A e si porti H A = A I, che in I si avrà un altro vertice, e finalmente si troverà l' ultimo tirando le rette G C ed I B che si incontreranno nel vertice L.

Il pentagono I L G N H sarà il domandato.

Dimostrazione. — Considerando il triangolo H G N, in cui la retta E D è parallela ad H G e questa è il doppio di E D, bisogna che sia E N = E H, D N = D G. Ora egli è evidente che essendo H, N e G tre vertici, ed i punti A, B e C i punti di mezzo degli altri lati, il pentagono descritto risolve il problema.

GEOMETRIA SOLIDA

La Geometria Solida ha per oggetto lo studio delle proprietà e la misura dei corpi. E poichè questi, come fu detto sino nei preliminari, sono determinati dalla natura della loro totale superficie, così l'esposizione di questa parte di Geometria è fatta considerando nel libro quinto i poliedri a faccie piane, e quindi nel libro sesto i tre principali corpi rotondi, quali il cilindro, il cono e la sfera.

Lo studio però, sia dei poliedri che dei corpi rotondi, facendosi coll'esame delle relazioni correnti fra i singoli elementi che li compongono, e fra questi essendovi i piani e le rette nascenti dall'intersezione di essi, e potendo due o più elementi di questa specie sussistere senza l'esistenza del corpo, così si fa precedere ai suddetti poliedri il libro quarto, che tratta dei rapporti delle rette coi piani, e dei piani tra di loro.

Oltracciò, il potente aiuto che nello studio dello spazio, dei corpi dei quali se ne deve scoprire tanto la misura quanto le sue proprietà, è l'avere una viva, materiale e piana immagine, farà trattare in forma di appendice al libro quarto delle proiezioni in genere, e di appendice al libro quinto specialmente della rinomata proiezione assonometrica.

LIBRO QUARTO

SULLE RETTE E PIANI TRA DI LORO.

Relazione della retta col piano. — Nella Geometria Piana si sono trattate le proprietà delle rette tra di loro, immaginandole tutte collocate su di un medesimo piano. Considerazione ben diversa è quella che si verrà facendo, dapprima di una retta ed in seguito di più rette, le quali non sono contenute in un dato piano, ma che solo occupano rispetto a questo una determinata posizione.

Facendosi dapprima a considerare una retta ed un piano, è facile il vedere come quella non possa avere che due posizioni distinte rispetto a questo, cioè o tale che essa od il suo prolungamento incontri il piano, oppure che non lo incontri. Infinite sono le posizioni che può avere una retta tanto nell'una quanto nell'altra posizione. Però, allorchè una retta è talmente collocata rispetto ad un piano che essa od il suo prolungamento incontra quest'ultimo, evidentemente sempre secondo un solo punto, due ben distinte possono essere le posizioni, cioè o la retta è perpendicolare al piano oppure è a questo obliqua.

Mentrechè nel caso in cui una retta è di posizione tale che non giungerà mai ad incontrare il piano, essa è a questo parallela.

Il punto d'intersezione od incontro della perpendicolare col piano addimandasi il *piede della perpendicolare,* e quello d'incontro coll'obliqua il *piede dell'obliqua.* Si verrà quindi esaminando quando sia che una retta è perpendicolare ad un piano e quando obliqua al medesimo.

Perpendicolare. — Una retta si dirà perpendicolare ad un piano allorchè essa è perpendicolare a tutte le rette condotte per

il suo piede nel piano. Così (Tav. XXX, Fig. 1) la retta A B che è perpendicolare alle diverse rette C C′, D D′, E E′, condotte per il piede B nel piano M N, si dirà perpendicolare al piano M N. È facile quindi il vedere che se una perpendicolare ad un piano è perpendicolare a tutte le rette condotte per il suo piede nel piano, la posizione di una retta determini il piano ad essa perpendicolare, e quindi come sia possibile da tale proprietà il vedere se un dato punto sia o no collocato su di un dato piano, bastando innalzare al piano dato una perpendicolare, unire il piede di questa col punto dato e vedere se questa retta è o no perpendicolare alla perpendicolare del piano dato.

Però per il piede di una perpendicolare essendo infinito il numero delle rette che si possono condurre nel piano, si verrà ad esaminare quante di queste rette sieno sufficienti per la determinazione del piano.

Se si osserva come immaginando due triangoli rettangoli E′ B A, C B A, tali che l'angolo retto coincida, come pure coincida il cateto A B, il cateto E′ B come il cateto C B sono collocati sul piano M N a causa che A B è perpendicolare ad E′ B e perpendicolare ancora a C B, si vede tosto il come non vi possa essere altra retta che contemporaneamente sia perpendicolare a B E′ e a B C.

La retta quindi A B è perpendicolare al piano M N, poichè ancora ove si immaginassero degli altri triangoli rettangoli disposti col vertice dell'angolo retto in B e con un cateto che coincida con A B, l'altro cateto riposerà sempre sul piano in vista della definizione stata data della perpendicolare. Si dirà perciò che: *due rette tirate da un medesimo punto determinano e la perpendicolare e il piano normale a questa.*

La verità di questa proposizione, cioè *la retta che è perpendicolare a due rette condotte per il suo piede nel piano è pure perpendicolare ad ogni altra qualunque retta tirata pel piede pure nel piano,* si addimostra ancora in altro modo, ed ecco come: sia la retta A B perpendicolare alle due rette B C, B E condotte nel piano M N, e sia a dimostrare che detta retta è ancora perpendicolare ad ogni altra qualunque retta B D tirata per il piede B nel piano M N. Immaginisi prolungate le rette C B ed E B e fatto B C = B C′, B E = B E′, tirate in seguito le rette C E e C′ E′; i due triangoli E B C, E′ B C′ sono eguali come aventi un angolo opposto al vertice eguale

compreso fra lati eguali, quindi C E = C′ E′ e l'angolo B E C = B E′ C′, siccomi opposti a lati eguali. È quindi evidente che prolungando D B, si ricaverà il punto D′ e che i due triangoli B D E e B E′ D′ sono eguali come aventi due angoli eguali, cioè l'angolo in E eguale a quello in E′ e l' altro angolo E B D = E′ B D′ siccome opposti al vertice, e di più il lato B E = B E′ per costruzione. È quindi B D = B D′ e D E = D′ E. Immaginando in seguito condotte le rette A E, A E′, A D, A D′, A C, A C′, e considerati i due triangoli C A E, C′ A E′, si vedrà che questi sono eguali per avere A C = A C′, A E = A E′, siccome ipotenuse di triangoli rettangoli eguali, ed infine da quanto già si era trovato C E = C′ E′. Essendo eguali i due triangoli A C E, A C′ E, è l'angolo A E C = A E′ C′ siccome opponentisi a lati eguali. L' eguaglianza di questi due ultimi angoli, l'eguaglianza E D = E′ D′, e quella ancora A E = A E′, dà che nei triangoli A D E, A D′ E′ il lato A D è eguale al lato A D′; cosicchè per ultimo, considerando i due triangoli D B A, D′ B A, i quali hanno il lato A B comune, il lato A D = A D′, B D = B D′, ed ancora il lato B D sul prolungamento di B D′, si vedrà ben tosto che eguali essendo i due angoli A B D, A B D′ siccome opponentisi a lati eguali A D, A D′, e la loro somma equivalendo a due angoli retti, che ciascuno è retto, e che quindi la retta A B è perpendicolare a B D, mentre essa era solo perpendicolare a B C e a B E.

Dimostrato per tal modo come due rette tirate da un medesimo punto in un piano determinano la perpendicolare, rimane per contro anche dimostrato come due rette nello spazio che abbiano un punto comune determinano un piano.

E poichè per determinare una retta occorrono due punti, per determinarne due ne occorrono quattro, in questo caso le due rette avendo un punto comune, bastano tre punti, e quindi si può conchiudere come la posizione di un piano venga determinata dalla posizione di tre punti nello spazio, a condizione però che essi non sieno collocati in linea retta, poichè in questo caso non determinerebbero che una retta, i tre punti non conterebbero che per due, e quindi sarebbe necessario sempre un terzo punto che non sia in linea retta cogli altri, cioè quello che unito con uno qualunqne dei dati, deve dare l' altra retta che determina il piano.

Due rette nello spazio ed aventi un punto comune, determinando un piano e determinando la normale al medesimo, ne segue che si può conchiudere: *una sola è la perpendicolare che si può innalzare ad un piano da un dato punto preso su di esso, ed al medesimo una sola è la perpendicolare che da un punto preso fuori di un piano gli si può abbassare.*

Se si osserva di poi come ogni qualunque retta A E condotta ad esempio da un punto A (Fig. 2) al piano M N, e diversa dalla perpendicolare A P abbassata da detto punto A al piano M N, è tale che se si unisce il piede P col punto E, risulta il triangolo E P A, che è rettangolo ed in cui la retta A E è l'ipotenusa, si scorgerà tosto come la perpendicolare abbassata da un dato punto ad un dato piano, sia la retta più breve che dal dato punto si possa condurre al piano. Ed in conseguenza di questa sua brevità, essa segni precisamente la distanza che da un dato punto esiste ad un dato piano.

Obliqua. — Una retta si dirà obliqua ad un dato piano, allorchè essa è solo perpendicolare ad una retta tirata per il suo piede nel piano, od in altro modo, obliqua ad un piano è quella retta che non è nè perpendicolare nè parallela al piano. Ogni retta quindi condotta da un dato punto ad un piano non perpendicolarmente, è un'obliqua. Così la retta A E della Fig. 2 è una obliqua al piano M N. Che poi l'obliqua ad un piano sia perpendicolare ad una sola retta condotta per il suo piede nel piano, eccone il perchè. Sia A B un'obliqua al piano M N, se dal punto A si immagina condotta od abbassata la perpendicolare A P, quindi tirata la retta P B nel piano M N, ed ancora nel medesimo una retta C D per il piede B dell' obliqua e perpendicolarmente alla P B, l'obliqua A B sarà perpendicolare alla retta C D. Infatti, se si fa B C = B D, se si tira P C, P D e si immaginano condotte le rette A C, A D nella considerazione dei triangoli rettangoli P B C, P B D, si ha che essendo P B comune e B D = B C, l'ipotenusa P C = P D, ed in seguito nella considerazione dei triangoli rettangoli A P C, A P D che hanno P A comune e P C = P D, l'ipotenusa A C è eguale all' ipotenusa A D. Considerando per ultimo l'eguaglianza dei due triangoli A B D, A B C che hanno A B comune, il lato A C = A D, quello B D = B C, ed in cui il lato B C è sul prolungamento di B D, ed in cui ancora i due angoli A B D =

A B C siccome opponentisi a lati eguali, si scorge tosto che la loro somma essendo eguale a due angoli retti, ciascuno sia retto, e quindi come l'obliqua A B sia perpendicolare alla retta C D condotta per il piede B nel piano M N e perpendicolarmente alla retta che unisce il piede dell'obliqua con quella della perpendicolare abbassata da un punto dell'obliqua; e volendo usare un'altra espressione si dirà, che *l'obliqua ad un piano è perpendicolare alla retta tirata per il suo piede nel piano e perpendicolarmente alla sua proiezione.*

La retta C D stata condotta nel piano M N, essendo perpendicolare ed all' obliqua A B ed alla sua proiezione B P, si dirà perpendicolare al piano A B P, poichè le due rette A B, P B determinano appunto il piano A B P.

Che una obliqua non sia perpendicolare a due rette tirate dal suo piede nel piano, è evidente, è questa la proprietà della perpendicolare ad un piano, e quindi l' obliqua che fosse perpendicolare a due rette condotte per il suo piede nel piano, non sarebbe più una obliqua, ma bensì una perpendicolare.

L'obliqua condotta da un dato punto ad un piano essendo perpendicolare ad una sola retta tirata per il suo piede nel piano, ed avendo perciò una sola normale, ne segue che *una obliqua è determinata appunto dall' angolo formato da essa e dalla sua proiezione sul piano.* Così l' obliqua A B (Fig. 2) è determinata dalla misura dell' angolo A B P.

Facendosi a studiare le relazioni che esistono fra due oblique condotte da un medesimo punto ad un piano, è facile il vedere, che ad esempio di due oblique A B, A E (Fig. 2) sia più lunga quella che dista o se vuolsi che più si allontana dalla perpendicolare. Infatti, se si unisce il piede delle due oblique con quello della perpendicolare abbassata dal punto A, e quindi si fa P E' = P E, i due triangoli rettangoli A P E, A P E' sono eguali, ed A E' = A E. Ora delle due oblique A B, A E', la più lunga è evidentemente A B, il cui piede B è più distante da P, che non sia il piede E', poichè basta d' altronde osservare il triangolo A E' B per vedere che il lato A B che si oppone all' angolo ottuso A E' B, sia maggiore del lato A E' che si oppone all' angolo acuto E' B A. Adunque, *due oblique condotte da un medesimo punto ad un medesimo piano sono eguali se eguali sono le loro proiezioni o i loro an-*

goli di misura, e di due oblique diseguali condotte da un medesimo punto ad un medesimo piano, è più lunga quella cui è maggiore la rispettiva proiezione, o cui è minore l'angolo di misura.

Essendo eguali quelle oblique condotte da un medesimo punto ad un medesimo piano, che hanno eguali le loro proiezioni, cioè, i cui piedi distano egualmente dal piede della perpendicolare abbassata dal medesimo punto da cui furono tirate le oblique, si può immediatamente dire che *il luogo geometrico dei piedi delle oblique eguali, condotte da un medesimo punto ad un medesimo piano, è una circonferenza di circolo il cui centro è appunto il piede della perpendicolare abbassata dallo stesso punto.* Sicchè se ad esempio è dato un punto A fuori di un piano, e si trattasse di abbassare sul piano M N una perpendicolare, basterà trovare i piedi di tre oblique eguali condotte da A, come B, C e D, e quindi trovare il centro del circolo che passa pei detti tre punti (come a pag. 110), per avere così in detto centro O il piede della perpendicolare che si voleva abbassare. E ciò è evidente, poichè le oblique eguali A B, A C, A D, tirate dal punto A, avendo i loro piedi sulla circonferenza di circolo descritto con centro in O, ed anche l'obliqua A E sarà eguale alle altre oblique. Medesimamente se si trattasse di innalzare nel punto O del piano M N, una perpendicolare, basterà descrivere un circolo con centro in O, scegliere tre punti della circonferenza come B, C e D, e quindi con tre lunghezze eguali riunite ad uno dei capi nei singoli punti ed assieme gli altri capi, si verrebbe ad avere il punto A, che unito con O darebbe la richiesta perpendicolare.

Dalle cose precedentemente dette si può quindi dire, che *il luogo geometrico dei punti egualmente distanti da due punti dati è un piano perpendicolare alla retta che unisce i due punti e passante per la metà di essa.* Così essendo A e B (Fig. 4) due punti, il luogo geometrico di quelli equidistanti dai medesimi è il piano M N condotto nel punto C medio di A B e perpendicolarmente alla retta A B. Infatti essendo A C perpendicolare ad M N, la distanza dal punto A al piano M N, è misurata dalla retta A C, e questa retta A C è eguale all'altra perpendicolare B C per costruzione. Di più, qualsivoglia punto D è tale che sarà sempre A D = D B, poichè le due oblique A D e D B sono eguali risguardandole come ipotenuse di triangoli rettangoli eguali D C A, D C B, epperciò tutti

i punti del piano M N sono tutti equidistanti dai due punti A e B, cioè sarà sempre A G = G B, A F = B F, A E = B E.

Parimenti, se si hanno due rette A B, C D (Fig. 5), le quali sieno parallele e contenute in un medesimo piano e che l'una sia perpendicolare al piano M N, è facile di vedere che anche la sua parallela è perpendicolare al piano M N. Infatti, se per il piede B si tira la retta B D, questa retta è perpendicolare ad A B e sarà pure perpendicolare alla D C. Ora tirando la retta A D e pel punto D la retta E F perpendicolare a D B, siccome questa retta E F è perpendicolare, in virtù del teorema precedente, ad A D e a D B come al piano B D A, così E F è perpendicolare pure alla retta D C contenuta nel medesimo piano, ed infine è evidente che essendo D C perpendicolare a D B ed a E F, questa retta D C è pure perpendicolare al piano M N.

Parallela. — Una retta dicesi parallela ad un piano allora-quando essa nè il suo prolungamento viene ad incontrare quel piano. Ma perchè ciò possa avere luogo conviene che la retta si mantenga sempre nel suo prolungamento equidistante dal piano; onde la retta A B (Fig. 6), essendo tale che di essa prendendo due punti come A e B ed abbassando sul piano M N due perpendicolari, dette perpendicolari A C e B D sono eguali, si dirà parallela al piano M N. E poichè unendo i due punti C e D, la retta C D è parallela alla A B, si può quindi anche dire che *una retta è parallela ad un piano quando essa è parallela ad una retta contenuta nel piano.* Così la retta A B, che è parallela alle rette C' D', E F, contenute nel piano M N, è parallela a detto piano, poichè basta immaginare tirate le rette A C', B D', A E e B F, per vedere che ad esempio per il piano C' D' A B essendo A B parallelo a C' D', la retta A B non verrà mai ad incontrare il piano M N; e medesimamente per il piano A B E F, che essendo A B parallelo ad E F, la retta A B anche prolungata, non incontrerà giammai il piano M N. Si può perciò conchiudere che *ogni piano che contenga una retta parallela ad un piano e che incontri questo, lo incontra sempre secondo una parallela alla retta data.*

La retta che è parallela ad un piano è perpendicolare alla perpendicolare del piano, poichè essendo la prima parallela alla sua proiezione, ed ogni perpendicolare al piano essendo perpendicolare a detta proiezione, è pure perpendicolare alla retta data.

Infatti, A B (Fig. 6) essendo una retta parallela al piano M N, essa è parallela alla sua proiezione C D, ed essendo C A perpendicolare al piano M N, è perpendicolare a C D, e quindi anche perpendicolare alla sua parallela A B.

Per un punto preso al di fuori di un piano si possono condurre un' infinità di rette parallele al piano, e perciò basterà dal punto dato abbassare una perpendicolare al piano dato, e quindi per il punto dato tirare tante perpendicolari a questa perpendicolare. Egli è perciò facile lo scorgere come le perpendicolari tirate dal punto dato determinino un piano, e quindi come tutte le rette che tirare si possono da un punto dato e parallele ad un piano dato, sieno contenute in un piano parallelo al piano dato. Così se P è il punto dato (Fig. 7), basta abbassare la perpendicolare P P' al piano M N e quindi tirare le rette A B, C D, E F che tutte passino per P e sieno perpendicolari a P P', perchè dette rette sieno parallele al piano M N dato. Ed infatti, se si fanno le proiezioni delle singole rette, si vede che A B è parallelo ed eguale ad A' B', C D a C' D', E F ad E' F', e quindi che le diverse rette tirate sono tutte parallele al piano M N. Si può infine conchiudere che *le proiezioni delle rette parallele stanno nell' identico rapporto delle lunghezze che si proiettano.* Risulta ancora che da un dato punto si potrà condurre una retta parallela ad un dato piano, ed una perpendicolare o parallela ad una data retta, quando questa retta sia contenuta nel piano che è parallelo al piano dato, e che passa pel punto dato oppure parallelo a questo. Per un punto poi è possibile il condurre una infinità di piani paralleli ad una retta data, purchè essi contengano una parallela alla retta data e condotta dal punto dato. Tirato quindi dal punto dato una parallela alla retta data, e per questa parallela facendo passare dei piani, essi saranno sempre paralleli alle rette date.

Relazione delle rette nello spazio. — Considerando due rette nello spazio, o esse od il loro prolungamento hanno un punto comune, ed in allora determinano un piano, oppure sono parallele e tutte contenute in un piano, nei quali casi nulla rimane ad aggiungere essendosi tal materia svolta appunto nella Geometria Piana, od infine possono essere tali da non essere comprensibili in un piano, ed è appunto di questo caso che si vuole fermare in ora l' attenzione.

Due rette non collocate in un medesimo piano possono avere due posizioni distintissime, cioè od essere perpendicolari tra di loro, oppure essere inclinate, ma giammai parallele, poichè per essere tali esse sarebbero in un medesimo piano. Nè pure dovrassi intendere che due rette nello spazio siano perpendicolari od oblique ed abbiano punti comuni tra di loro, inquantochè esse sono a distanza l'una dall'altra, per cui quantunque esse sieno tali che malgrado ogni esteso loro prolungamento non vengano mai ad incontrarsi, esse non sono parallele, ma appunto solo possono essere o perpendicolari tra di loro, oppure inclinate in modo diseguale tra di loro. Determinato in tal modo come siano due rette nello spazio perpendicolari, si include tosto l'idea come alla loro determinazione sia necessario un elemento, ossia la loro distanza, e come due sieno gli elementi necessari per la determinazione di due rette nello spazio disegualmente inclinate tra loro, cioè la distanza e l'angolo di inclinazione da esse formate. Nella Fig. 5 e nelle rette EF ed AB si ha l'esempio di due rette non contenute in un medesimo piano e tali che malgrado il loro prolungamento non verranno mai ad incontrarsi, e che sono perpendicolari tra loro, poichè se nel piano M N si tira una retta parallela ad E F, questa retta E' F' è perpendicolare alla A B siccome tirata per il piede B nel piano M N. La posizione quindi delle due rette perpendicolari A B ed E F è determinata dalla loro distanza, ovvero dalla misura della retta più breve che fra le due rette date può condursi, e poichè questa è sempre la perpendicolare comune, così la retta B D, che è perpendicolare alla A B e alla E F, esprime appunto la distanza delle due rette; e ciò che si fa maggiormente palese osservando come ogni altra retta ad esempio B E sia più lunga di B D, poichè essendo il triangolo B D E un triangolo rettangolo, è conseguentemente l'ipotenusa B E maggiore di ciascuno dei due cateti.

Nella Fig. 7 e nelle rette A B e C' D', si ha l'esempio di due rette non collocate in un medesimo piano, che malgrado prolungate sino all'indefinito non s'incontrano mai, senza essere parallele, e sono comunquemente disposte. Non è però difficile il vedere la determinazione di dette due rette. Se infatti per una delle rette, ad esempio C' D', si immagina un piano M N che tutta la contenga ed il qual piano sia parallelo all'altra retta A B, cioè tale che contenga una retta A' B' parallela alla A B, ciò che è sempre

possibile, mentrechè non sarebbe possibile di condurre per una retta un piano perpendicolare ad un'altra retta, indi un piano che passando per l'altra retta A B sia perpendicolare al piano M N, la posizione delle due rette date nello spazio è precisamente determinata da due elementi, cioè dalla distanza A A' oppure la sua eguale B B', e dall'angolo A' P' D' formato dalla proiezione della retta A B colla retta C' D'. Ne segue perciò che essendovi per due rette collocate nello spazio gli angoli tanto retti quanto acuti quanto ottusi, vi sono pure i supplementari, come ad esempio è l'angolo A' P' C' formato delle due rette A B, C' D'. Però gli angoli che si misurano, avendo due lati di cui uno è una delle rette date, così chiamasi lato supplementare quello che risulta dalla proiezione dell'altra retta data. Il luogo geometrico dei punti equidistanti da due rette comunquemente collocate nello spazio, è perciò una retta collocata a metà distanza delle due date e che divide per metà l'angolo da esse formato.

Relazione fra due piani. — Due piani possono essere tra di loro disposti in modo che succeda incontro, oppure che non succeda, cioè che siano paralleli.

Piani non paralleli. — Due piani tali che s'intersechino, o possono essere inclinati disegualmente fra di loro, oppure inclinati egualmente, cioè perpendicolari tra di loro. Due piani disposti a modo che essi od i loro prolungamenti si incontrino, l'incontro ha sempre luogo secondo una retta, poichè diversamente non può essere, per la ragione che se l'incontro avesse luogo secondo tre punti, questi determinando, come già si disse, un piano, non succederebbe incontro, ma coincidenza dei piani tra di loro. Così i due piani M N e P Q (Fig. 8) si incontrano secondo la linea retta A B, ed i due piani dividono lo spazio in quattro spazj angolari, attorno ad una medesima retta A B, e tali che gli opposti sono eguali tra di loro, e supplementari gli adiacenti. *Angolo diedro* dimandasi appunto l'angolo formato da due piani o faccie che si incontrano secondo una linea retta che chiamasi il *vertice* o *spigolo dell'angolo diedro*. Così si dirà che i due piani M N e P Q danno origine a quattro angoli diedri aventi un medesimo vertice o spigolo, cioè Q A B N = M A B P, Q A B M = N A B P, usando l'avvertenza di collocare nella lettura di un angolo diedro, nel mezzo le lettere che corrispondono allo spigolo d'intersezione, ad ecce-

zione del caso in cui detto spigolo non è comune ad altri angoli diedri, nel quale si legge semplicemente nominando le due lettere situate agli estremi del vertice dell'angolo diedro. L'incontro di due piani è quindi determinato dall'angolo diedro, ossia dallo spazio compreso fra due piani che sempre si debbono supporre prolungati indefinitamente. L'angolo diedro poi è misurato da un angolo piano formato con due perpendicolari condotte nelle faccie di un angolo diedro, e da un medesimo punto preso sullo spigolo. Così l'angolo diedro N A B Q è misurato dall'angolo piano E C D formato dalle due perpendicolari C E, C D innalzate dal punto C preso sullo spigolo A B ed alle faccie A B Q, A B N. Ed essendo C D perpendicolare ad A B, e C E pure perpendicolare ad A B, il piano E C D è un piano perpendicolare ad A B. Epperciò può ancora dirsi *essere un angolo diedro misurato dall'angolo piano prodotto dall'intersezione di un piano perpendicolare allo spigolo colle due faccie.* Un angolo diedro sarà ottuso, se l'angolo piano che lo misura è ottuso, sarà acuto un angolo diedro se acuto è l'angolo di misura, ed infine sarà retto un angolo diedro quando l'angolo di misura è retto. E quando un angolo diedro è retto, i due piani o faccie sono perpendicolari l'uno all'altro. I due piani M N ed A Q (Fig. 9) essendo perpendicolari tra di loro, ne risulta che l'angolo piano E C D formato dalle due perpendicolari C D, C E condotte nei piani M N, A Q dal medesimo punto C dello spigolo, è un angolo retto. Che poi tutti indistintamente siano eguali gli angoli piani che si ottengono coll'innalzare delle perpendicolari da diversi punti dello spigolo, è evidente, poichè i lati di questi angoli essendo perpendicolari ad una medesima retta, essi sono paralleli, e quindi eguali gli angoli formati. Non già che eguali sieno tutti gli angoli diedri che sono misurati da angoli piani aventi i lati rispettivamente paralleli, ma occorre ancora che la loro apertura sia rivolta ad una medesima direzione, poichè come è facile di vedere, l'angolo E' C' D' (Fig. 8) non è eguale all'angolo E C D, quantunque abbi i lati paralleli, ma l'angolo E' C' D' è solo eguale all'angolo E C D'' avente i lati paralleli e l'apertura rivolta nel medesimo senso. Ed essendo l'angolo E C D il supplemento dell'angolo E C D'', ne consegue che E C D è il supplemento di E' C' D', ed ancora come si possa dire, del pari che nella Geometria Piana, come eguali sieno quegli angoli diedri che sono misurati da angoli piani di lati rispettivamente paralleli e di

apertura rivolta nel medesimo verso, ed in ultimo come supplementari sieno quegli angoli diedri misurati da angoli piani aventi i lati paralleli, ma l'apertura rivolta in senso contrario.

Piani paralleli. — È già stato detto come due piani disposti per cotal guisa che non s'incontrino, si addimandassero piani paralleli, si verrà perciò ora a dire quali sieno le condizioni perchè due piani sieno paralleli tra loro. Due piani paralleli, o meglio perchè due piani sieno paralleli, conviene che tanto essi quanto i loro prolungamenti si mantengano equidistanti. Ora, un piano essendo determinato da tre punti, e la distanza di un punto ad un piano misurandosi colla perpendicolare abbassata da quello su questo, basterà scegliere tre punti su uno dei due piani e abbassare sull'altro tre perpendicolari, perchè sulla o non eguaglianza di queste tre perpendicolari, si abbia o non l'esistenza del parallelismo nei piani considerati. Così M N e P Q (Fig. 10) essendo due piani tali che le tre perpendicolari A D, B E, C F abbassate sul piano M N da tre punti A, B, C scelti sul piano P Q sono eguali, detti piani M N e P Q sono paralleli fra loro. E poichè, se si tirano le rette A B, B C, D E, E F, si vede che essendo A D, B E, C F tre rette perpendicolari al medesimo piano M N, esse sono parallele e di più eguali, e quindi come A B sia parallela a D E, e B C parallela ad E F, si può ancora dire che *due piani sono paralleli se contengono ciascuno due rette rispettivamente parallele.* I due piani M N e P Q (Fig. 10) essendo tali che due rette tirate nel primo, cioè E D, E F, sono rispettivamente parallele alle rette B A, B C tirate nel secondo, si diranno piani paralleli. Non importa che le due rette tirate in un piano abbiano ad avere un punto comune, ma se ad esempio le rette A B e G H tirate nel piano P Q hanno le loro parallele contenute nel piano M N, come D E, G' H', si dirà del parallelismo dei due piani. Solo che, due piani che avessero una sola retta parallela, essi non sarebbero paralleli, potendosi per due rette parallele far passare una infinità di piani non paralleli. Generalizzando l'essere dei piani paralleli, si diranno tali che condotta ogni retta in uno di essi è parallela all'altro piano.

Se si osserva di poi come la retta B E stata condotta perpendicolarmente al piano M N è perpendicolare alle due rette E D, E F, e che per essere B A parallelo a D E, B C parallelo ad E F, detta retta B E è pure perpendicolare alle due rette B C, B A, e queste

rette sono entrambe contenute nel piano P Q, si conchiuderà col dire che la retta B E perpendicolare al piano M N è pure perpendicolare al piano P Q suo parallelo, e che quindi *i piani paralleli hanno le perpendicolari comuni*, ciò che ancora si fa palese pensando che se diversamente fosse, i piani non più sarebbero paralleli, ma s'incontrerebbero col loro prolungamento, poichè in allora A B non sarebbe più perpendicolare ad A D, ma intersecherebbe la D E col loro prolungamento, originando un triangolo, e giungendo la retta A B ad avere un punto sul piano M N, essa accennerebbe al non essere il piano P Q parallelo a quello M N.

Piani perpendicolari. — Trattando di due piani perpendicolari, si disse che questi erano determinati dall'angolo retto formato dalle due perpendicolari innalzate da un punto qualunque dello spigolo d'intersezione nelle faccie. Se ora si immagina essere P Q (Fig. 11) un piano perpendicolare al piano M N, è evidente che innalzando in un punto qualunque B dell'intersezione una perpendicolare allo spigolo e nel piano P Q e nel piano M N, si ottenga l'angolo A B S che è certamente retto, e come B A è perpendicolare a P B, e B S perpendicolare a B A, si può direttamente conchiudere che è *un piano che sia perpendicolare ad un altro è capace di contenere la perpendicolare innalzata su questo da un punto qualunque dell' intersezione.*

Il piano quindi S R che contiene la retta A B, che è perpendicolare al piano M N, è esso pure perpendicolare a detto piano M N, e poichè ancora l'intersezione di due piani perpendicolari ad un terzo ha luogo secondo una perpendicolare a questo, si dirà che due piani che s'intersechino e che sieno perpendicolari ad un terzo piano, la linea d'intersezione è una perpendicolare a quest' ultimo piano.

Osservando per ultimo che ancora i due piani P Q ed S R sono stati condotti perpendicolarmente tra di loro, e perpendicolarmente a quello M N, si ha occasione di vedere tre rette, quali sono B P, B S, B A, incontrantisi tutte in un sol punto, e che sono l'una perpendicolare all' altra, e ciascuna perpendicolare al piano determinato dalle altre due, cioè B P perpendicolare a B A ed a B S e perpendicolare al piano S R, la retta B S perpendicolare alla retta B A e alla B P ed al piano P Q, ed infine la retta B A perpendicolare alla retta B P e a B S ed al piano M N.

Determinazione di un piano. — Le proprietà studiate conducono a trovare il modo di determinare un piano che occupi una posizione qualunque nello spazio. Questo problema, che così di frequente si presenta a risolvere, ad esempio allorchè si tratta di materia qualunque disposta pianamente appunto per la formazione delle carte geologiche, è quanto si spiega colla Fig. 12. Il piano M N essendo il piano a determinarsi e comunquemente collocato, si deve sempre immaginare un piano che sia orizzontale e che intersechi il piano a determinare come il piano P Q. È evidente come l'intersezione A B dei due piani sia una retta orizzontale, poichè collocata in un piano orizzontale qual'è il piano P Q. Se quindi si misura l'angolo diedro formato dai due piani e rappresentato dall'angolo piano E C D formato dalle due perpendicolari C D, C E, si avrà in detta misura la posizione del piano M N rispetto a quello orizzontale. Ma la reale posizione del piano M N nello spazio è determinata dalla posizione della retta orizzontale A B e dall'angolo D C E. Ora è evidente, che se si prende la linea del meridiano magnetico ad esempio per base, non si avrà che a cercare per mezzo di un regolo e di una livelletta una retta nel piano M N che sia orizzontale, misurare quindi col mezzo ad esempio di una bussola l'angolo B C N, e quindi con un eclimetro l'angolo D C E, perchè colle dette due misure sia determinato il piano.

Si può perciò conchiudere che la posizione di un piano comunquemente collocato nello spazio è determinata con due angoli, l'uno contenuto in un piano orizzontale, l'altro in un piano verticale. I lati del primo sono una retta qualunque orizzontale appartenente al piano dato, ed una retta fissa quale il meridiano vero o magnetico, e quelli del secondo sono una retta orizzontale ed una retta contenuta nel piano dato, ed entrambe perpendicolari ad una retta orizzontale contenuta nel piano dato.

Luoghi geometrici. — Dopo trattato delle proprietà della perpendicolare e dell'obliqua ad un piano, venne trovato il luogo geometrico dei punti equidistanti da due dati; si vedrà ora di trovare il luogo geometrico dei punti egualmente distanti da tre punti dati. Siano A, B, C (Tavola XXXI, Fig. 13), i tre punti dati, di cui se ne vuole trovare il luogo geometrico dei punti equidistanti da essi. Si uniscano i punti A e B, ed A e C fra di loro, quindi per il punto O di mezzo della retta A B si conduca un piano perpendicolare a tale

retta, e parimenti per il punto S di mezzo della retta A C si conduca un altro piano, perpendicolare a detta retta A C, il quale incontrerà il primo secondo la retta L T, che sarà perpendicolare al piano determinato dai tre dati punti, ed appunto il luogo geometrico che si cerca. Infatti, qualunque punto P si scelga di detta retta L T, e si congiunga coi punti A, B, C mediante le rette P B, P A, P C, queste tre rette saranno sempre eguali tra di loro, poichè esse saranno sempre ipotenuse di triangoli rettangoli eguali, per la ragione che P O sarà sempre perpendicolare ad A B, perchè condotta nel piano per costruzione perpendicolare a tale retta, e del pari perchè P S sarà sempre perpendicolare ad A C, inquantochè contenuta in un piano stato condotto per costruzione perpendicolare alla retta A C; ed infine, essendo O A = O B, S A = S C, O P comune, P S comune, è P B = P A, P A = P C, e due cose eguali ad una terza essendo eguali tra di loro, ne segue che P B = P A = P C, e quindi la retta L T il luogo geometrico richiesto.

Quando poi si volesse il luogo geometrico dei punti egualmente distanti da due piani dati, basterebbe condurre il piano bisettore, cioè quello che divide in due parti eguali l'angolo diedro o spazio compreso; e nel caso di due piani paralleli, quello che è contenuto a metà distanza ed è parallelo ai due dati. Se M L, T F (Fig. 14) sono due piani, di cui si cerca il luogo geometrico dei punti equidistanti da detti due piani, basterà segnare sui due piani l' angolo piano che misura l' angolo diedro, come S P Q, quindi tracciare la bisettrice P R, e per detta retta e per lo spigolo L T fare passare un piano, che esso sarà il luogo geometrico richiesto. Infatti, se su di esso piano si prende un punto qualunque O, e da detto punto si misurano le distanze ai due piani M L, T F, abbassando delle perpendicolari O A, O B ai medesimi, si troverà essere sempre O A = O B, poichè ambedue i triangoli O P A, O P B sono rettangoli, perchè P A perpendicolare ad O A, P B perpendicolare a B O, a causa che sono rette condotte in piani perpendicolari, il primo a O A, il secondo ad O B; sono eguali perchè l' angolo O P B = O P A e perchè l' ipotenusa O P comune, quindi i cateti o distanze O A, O B sono esse pure eguali.

Relazione di tre piani. — Immaginando collocati nello spazio tre piani, essi possono essere, due soli paralleli ed il terzo

no, oppure tutti e tre paralleli tra loro, od infine tutti e tre disposti a modo che si abbiano ad intersecare vicendevolmente. Si considereranno perciò distintamente ciascuno di questi casi.

Sieno M N e P Q (Fig. 15) due piani paralleli tra di loro, ed S R un piano che incontri gli altri due, il 1.° secondo la retta A B, il 2.° secondo la retta C D; e vedasi il rapporto di questi tre piani fra di loro. Anzitutto le due rette A B e C D d' intersezione del piano R S coi due piani paralleli M N, P Q, sono parallele, poichè entrambe collocate in un medesimo piano e comprese in piani paralleli; in seguito dall' intersezione del piano R S coi due piani paralleli M N e P Q, hanno origine otto angoli diedri, quattro attorno allo spigolo A B e quattro attorno allo spigolo C D. Questi otto angoli diedri considerati due a due prendono nomi analoghi a quelli che si era visto assumere nella geometria piana gli angoli formati da due rette parallele tagliate da una terza; i due angoli diedri S A B Q, M C D R si chiamano *alterni esterni*, gli angoli diedri P A B D, N C D A *alterni interni*, gli angoli diedri S A B P, S D C M *corrispondenti*, S A B Q, N C D R *esterni dalla stessa parte*, ed infine Q A B C, N C D A *interni dalla stessa parte*. Gli angoli alterni interni, gli angoli alterni esterni, gli angoli corrispondenti, sono tutti eguali tra di loro, e il loro nome dipende esplicitamente dalla loro posizione; mentre gli angoli interni dalla stessa parte ed esterni dalla stessa parte, sono l'uno supplementario dell' altro, poichè l' apertura rivolta in senso contrario e formati da piani paralleli. Dalla considerazione di due piani paralleli tagliati da un terzo comunque collocato, risulta ancora che, se nel piano R S e fra i due piani M N e P Q sono collocate due rette parallele, dette rette sono eguali, poichè essendo A B parallela a C D, la figura A B C D è un parallelogramma, e quindi sendo eguali i lati opposti è A C = B D.

Prendendo ora in esame tre piani che siano tutti e tre paralleli tra loro, è facile l' arguire come essi sono tali che se su di uno di essi si scelgono tre punti, e quindi si abbassano delle perpendicolari agli altri due, non solo esse saranno perpendicolari a tutti e tre i piani, ma essi saranno due a due equidistanti. Così se i piani M N, P Q, R S (Fig. 16) sono tre piani paralleli, essi sono tali che da tre punti come A, B, C del piano R S abbassando delle perpendicolari agli altri piani, risulta A D = B E = C F, A G = B H = C L.

Tre piani paralleli tra di loro essendo paralleli due a due, le proprietà di tre piani paralleli sono identiche a quelle di due soli piani paralleli. Si considererà quindi soltanto il modo o rapporto in cui vengono divise dal piano P Q (Fig. 17) due rette A C e B D collocate fra i due piani M N ed R S paralleli tra loro e paralleli al piano P Q. Se le due rette A C e B D fossero perpendicolari ai piani, esse sarebbero divise in parti eguali, ma non essendo perpendicolari, sieno G ed F i punti d'intersezione delle due rette A C e B D col piano P Q, e sia immaginata collocata un'altra retta A D che intersechi il piano P Q in E, nonchè tirate le rette A B, G E, E F, C D. Risulterà che G E è parallela a C D, E F parallela ad A B, e considerando dapprima i triangoli A C D, A G E che sono simili, la proporzione A E : E D :: A G : G C, ed in seguito considerando i due triangoli A D B, E D F pure simili, l'altra proporzione A E : E D :: B F : F D, che paragonata alla prima, avendo l'eguaglianza nei primi termini, ha luogo la proporzionalità dei secondi membri, e quindi la proporzione A G : G C :: B F : F D, cioè le due rette date A C e B D sono divise in parti tutt'affatto proporzionali dal piano P Q.

Prendendo ad esaminare tre piani tali che non se ne riscontrino due che sieno paralleli, si scorge che due possono essere le posizioni che possono avere i tre piani, cioè od essere tali che uno di essi sia parallelo all'intersezione degli altri due, oppure non esserlo. Null'altra considerazione è possibile di fare di tre piani, di cui uno sia parallelo all'intersezione degli altri, ad eccezione di dire, che essi s'incontrano secondo tre rette tutte parallele, come è facile il rendersi ragione dopo ciò che si disse circa a quei piani che passano per una retta parallela ad un piano.

Considerando per ultimo il caso in cui tre piani occupino una posizione qualsiasi nello spazio diversa dalle tre indicate posizioni, si ha che essi od i loro prolungamenti vengono ad incontrarsi in un sol punto, incontrandosi però dapprima secondo linee rette, e queste venendo a congiungersi in un sol punto.

Le proprietà che risultano da una cosiffatta disposizione di tre piani essendo analoghe a quelle che risultano da più piani disposti analogamente, così una tale disposizione non trovandovi altra considerazione, viene posto fine a questo libro col capitolo che segue.

Angolo solido. — Lo spazio racchiuso da tre piani che si

incontrano in un sol punto, chiamasi *angolo solido triedro;* i piani che determinano così l'angolo solido si chiamano le rispettive *faccie;* il punto d'incontro chiamasi il *vertice* dell'angolo solido. La Fig. 18 rappresenta appunto un angolo solido triedro, il cui vertice è S e formato dalle tre faccie A S B, A S C, C S B. Se si osserva la figura delle singole faccie, è facile di vedere come esse sieno tanti angoli piani.

L'angolo solido S, perchè formato da tre faccie o angoli piani, si chiama angolo solido triedro, come si è visto chiamarsi diedro quello di due. — L'angolo solido S rappresentato alla Fig. 19 è un angolo solido tetraedro, poichè determinato da quattro faccie. — L'angolo solido S, di cui alla Fig. 20, si dirà angolo solido pentaedro, poichè terminato da cinque faccie, e così di seguito, la parola che va annessa ad angolo solido esprimendo precisamente quante sieno le faccie che concorrono a determinarlo.

Per poco esame che si faccia ad un angolo solido triedro, è facile il vedere come vi concorrono alla sua essenza sei elementi, cioè tre angoli piani che sono le faccie dell'angolo solido, e tre angoli diedri determinati dall'incontro di due a due delle faccie dell'angolo solido. Così all'essenza dell'angolo solido triedro S (Fig. 18) vi concorrono i tre angoli piani A S B, A S C, B S C, ed i tre diedri S A, S B, S C.

Per un angolo solido tetraedro concorrono otto elementi, cioè quattro angoli piani e quattro diedri; e per un angolo solido pentaedro ne concorrono dieci elementi, cioè cinque angoli piani e cinque angoli diedri. Il numero quindi degli elementi che esistono in un angolo solido sono espressi dal doppio del numero delle faccie, e metà degli elementi sono angoli piani, e l'altra metà angoli diedri, ad eccezione però del caso in cui un angolo solido avesse angoli diedri rientranti. È inutile il parlare degli angoli solidi aventi angoli diedri rientranti, poichè essi si possono sempre facilmente scomporre in angoli solidi convessi, anzi si debbono considerare come un aggruppamento di angoli solidi poliedri convessi a spigoli salienti.

Occupandosi dapprima esclusivamente dell'angolo solido triedro, si considereranno le relazioni esistenti fra gli angoli piani tra loro, e quindi quelle cogli angoli diedri.

Relazioni degli angoli piani tra loro. — Prendendo ad

esaminare ad esempio, i tre angoli piani A S B, A S C, B S C dell'angolo solido S (Fig. 18), si vedrà: *essere necessario che ognuno degli angoli piani sia minore della somma degli altri due e maggiore della differenza, perchè l'angolo solido triedro possa esistere.* Questa necessità, oltre al dimostrarsi visibile pel caso di tre angoli piani eguali, è dimostrabile anche pel caso di scambievole diseguaglianza. Infatti, immaginando che l'angolo piano A S B sia il maggiore, e che perciò su di esso si possa fare l'angolo A S G = A S C, e quindi il triangolo D S G = D S E, prolungando D G in F e tirando E F, per essere D E + E F > D F e D G = D E, sottraendo dal primo membro D E e dal secondo l'eguale D G, rimane E F > G F. I due triangoli quindi S G F, S E F, avendo S F comune, S E = S G, ma E F > G F, l'angolo E S F è maggiore di G S F, e quindi l'angolo A S B è minore della somma degli altri due; ma se A S B è minore della somma degli altri due, con più forte ragione lo sono gli altri due, che sono minori ciascuno di A S B. Che poi ogni angolo piano sia maggiore della differenza degli altri due, si ricava semplicemente dall'ineguaglianza già dimostrata A S B < A S C + C S B, e col trasportare un termine da un membro all'altro e cangiandogli il rispettivo segno, per avere A S B — A S C < C S B, A S B — C S B < A S C. Ed in ultimo C S B — A S C < A S B, per la ragione che A S B è il più grande dei tre angoli.

Questa condizione degli angoli piani in un angolo solido triedro perchè possa esistere, è analoga a quella necessaria per l'esistenza di un triangolo per rapporto però ai lati.

La condizione *che ogni angolo piano sia minore della somma degli altri due perchè l'angolo solido triedro sussista, è pure necessaria per ogni angolo solido poliedro.* Così perchè l'angolo solido tetraedro S (Fig. 19) possa sussistere, è pure necessario che ogni suo angolo piano sia minore della somma degli altri tre, poichè se immaginasi condotto per i due spigoli S B e S D un piano, l'angolo solido tetraedro rimane scomposto in due angoli solidi triedri, da uno di essi si ha che ad esempio l'angolo piano A S B < A S D + D S B e dall'altro che D S B < D S C + C S B, onde con più forte ragione si può dire che A S B < A S D + D S C + C S B. Parimenti si dirà dell'angolo solido pentaedro S Fig. 20), che ogni angolo piano A S B < A S E + E S D + D S C +

C S B, cioè minore della somma di tutti gli altri. Questa condizione è quindi applicabile a tutti gli angoli piani per tutti gli angoli solidi poliedri.

Il rapporto esistente tra gli angoli piani di un angolo solido poliedro, conduce immediatamente ad osservare che se si conduce un piano qualunque D E F (Fig. 18) che chiuda un angolo solido triedro, si formano quattro triangoli, tre sulle faccie ed il quarto sul piano condotto. Sapendo che la somma degli angoli dei diversi triangoli D S E, D S F, E S F è eguale a sei retti, è evidente che se da essi si toglie la somma dei diversi angoli $DES + EDS + SEF + SFE + SFD + SDF$, si avrà la somma degli angoli piani dell'angolo solido triedro S. Ora, se osservasi che per l'angolo triedro E formato dalle tre faccie S E F, S E D, F E D, si ha che $DEF < SEF + SED$, e per l'angolo triedro D si ha $EDF < SDE + SDF$, ed infine per l'angolo triedro F che $DFE < DFS + SFE$, si avrà nella somma, che $DEF + EDF + DFE < SEF + SED + SDE + SDF + DFS + SFE$. Essendo però $DEF + EDF + DFE = 2$ retti, togliendo dai sei retti due retti, risultando quattro retti, si potrà conchiudere che *la somma degli angoli piani di un angolo solido triedro è sempre minore di quattro angoli retti.*

Ma la somma degli angoli piani di un angolo solido è essa pure sempre minore di quattro angoli retti; e ciò puossi dimostrare ad esempio sull'angolo solido pentaedro rappresentato alla Fig. 20, immaginando chiuso l'angolo solido con un piano F G H I L, e scelto un punto qualunque O su di esso e tirate le rette O F, O G, O H, O I, O L. Risulterà tosto che ottenendo in tal modo tanti triangoli quante sono le faccie, la somma degli angoli di questi è eguale alla somma degli angoli dei triangoli formati sulle faccie. Ma essendo ciascun angolo L F G al perimetro del poligono F G H I L minore della somma dei due angoli S F L, S F G, ne segue che la somma degli angoli attorno al punto O è maggiore della somma degli angoli piani dell'angolo pentaedro, e poichè quelli fatti attorno al punto O sono eguali a quattro retti, così si può conchiudere che *in ogni angolo solido poliedro, la somma degli angoli piani è minore di quattro angoli retti.*

Ecco così esposte le condizioni a cui è necessario soddisfino angoli piani, perchè abbia luogo l'esistenza di un angolo solido po-

liedro. È quindi facile il vedere dietro tali condizioni, come sia possibile ad esempio un angolo triedro i cui angoli piani sieno eguali tra loro ed eguali a 60°, come eguali tra loro ed eguali a 90°, ed ancora eguali tra loro ed eguali a 108°, poichè in tutti questi casi la somma dei tre angoli piani non giunge a formare 360°. Infiniti sono gli angoli triedri che si possono formare. Ma non si potrà formare un angolo triedro i cui angoli piani fossero ciascuno ad esempio di 120°, poichè la loro somma farebbe 360°, ovvero quattro angoli retti. Non sarà neppure possibile un angolo triedro i cui angoli piani sieno 120°, 60° e 50°, poichè l'angolo piano di 120° sarebbe maggiore della somma degli altri due. Si potrà formare un angolo tetraedro i cui angoli piani sieno ciascuno eguali a 60°. Sarà possibile un angolo tetraedro i cui angoli piani sieno di 80° cadauno. Sarà possibile un angolo pentaedro i cui angoli piani sieno cadauno di 60°, poichè in tutti questi diversi casi la somma di tutti gli angoli piani non viene ad essere eguale a 360°, e ciascun angolo è sempre minore della somma degli altri due. Ma non sarà possibile un angolo esaedro i cui angoli piani fossero di 60°, poichè la loro somma farebbe precisamente quattro retti.

Relazioni fra gli angoli piani e gli angoli diedri. — Facendosi ora a studiare le relazioni che esistono fra gli angoli diedri e gli angoli piani di un angolo solido, partasi da quello triedro e sia S un angolo triedro (Fig. 21), i cui angoli diedri sono S R, S Q S P, ed i cui angoli piani sieno R S P, R S Q, Q S P. Se per un punto, qualunque Q dello spigolo S Q si conduce un piano perpendicolare a detto spigolo, questo piano incontrerà la faccia Q S P secondo Q B perpendicolare a Q S, ed incontrerà la faccia Q S R secondo la retta Q A perpendicolare pure a Q S, e l'angolo A Q B misurerà l'angolo diedro S Q. Se in seguito per un punto P dello spigolo S P si conduce un piano perpendicolare a detto spigolo, questo piano incontrerà la faccia P S Q secondo la retta P B perpendicolare a P S, e la faccia P S R secondo la retta P C perpendicolare pure a P S; ed i due piani poi stati condotti, l'uno da Q e l'altro da P, si intersecheranno secondo la retta B O perpendicolare al piano Q S P, e quindi anche alle rette B P, B Q. L'angolo quindi B P C risultante è l'angolo piano che misura l'angolo diedro P S. Finalmente, per un punto qualunque R dello spigolo S R conducendo un piano perpendicolare a detto spigolo, taglierà la faccia R S P

secondo la retta R C perpendicolare ad R S, e la faccia R S Q secondo la retta R A pure perpendicolare ad R S, e l'angolo C R A esprimerà l'angolo diedro R S, ed il piano stato condotto dal punto R intersecherà i piani stati condotti da Q e da P, il primo secondo la retta A O perpendicolare alla faccia R S Q, epperciò alle rette A Q, A R, il secondo dietro la retta O C perpendicolare alla faccia R S P, epperciò alle rette C P, C R; e si è formato così un angolo triedro in O, i cui angoli diedri O A = Q A R, l'angolo diedro O B = Q B P, l'angolo diedro O C = R C P. Ora se si osserva che il quadrilatero A R S Q ha due angoli retti, l'uno in Q, l'altro in R, si vede tosto che l'angolo R A Q è il supplemento di R S Q, e che quindi l'angolo diedro O A dell'angolo triedro O è il supplemento dell'angolo piano R S Q dell'angolo triedro S. Parimenti, se si considera il quadrilatero Q S P B, si vede che ha due angoli retti, l'uno in Q, l'altro in P, che perciò l'angolo Q B P è il supplemento dell'angolo Q S P, e che perciò si dirà essere l'angolo diedro O B dell'angolo triedro O, eguale al supplemento dell'angolo piano Q S P dell'angolo triedro S. Finalmente, osservando il quadrilatero R S P C, si vede che esso ha due angoli retti, l'uno in R, l'altro in P, che quindi l'angolo R C P è il supplemento dell'angolo R S P, e che perciò l'angolo diedro O C dell'angolo triedro O, è eguale al supplemento dell'angolo piano R S P dell'angolo triedro S.

Si può quindi conchiudere che *tre piani condotti perpendicolarmente agli spigoli di un angolo triedro si incontrano originando un angolo triedro, che chiamasi supplementare, poichè i suoi angoli diedri sono i supplementi degli angoli piani dell'angolo triedro dato.* Ma non solo gli angoli diedri dell'angolo solido supplementare sono i supplementi degli angoli piani dell'angolo solido dato, ma ancora *gli angoli piani dell'angolo solido supplementare sono i supplementi degli angoli diedri dell'angolo triedro dato*, poichè basta osservare le tre faccie A Q B O, A O C R, C O B P, per vedere che sono quadrilateri tali che ciascuno ha due angoli retti, che quindi in ciascuno un angolo è supplementare dell'altro, e che perciò l'angolo piano A O B dell'angolo triedro O è il supplemento dell'angolo diedro S Q dell'angolo triedro S, che l'angolo piano A O C dell'angolo triedro O è il supplemento dell'angolo diedro S R dell'angolo triedro S, e che infine l'angolo piano C O B dell'angolo triedro O è il supplemento dell'angolo diedro S P dell'angolo trie-

dro S. Questa proprietà nell'angolo solido triedro dell'angolo triedro supplementare è comune a tutti gli angoli solidi poliedri.

La relazione che corre fra gli angoli diedri di un angolo triedro ed i piani dell'angolo triedro supplementare, e quella degli angoli piani di un angolo triedro coi diedri dell'angolo triedro supplementare, permette di stabilire entro quali limiti conviene che sieno gli angoli diedri di un angolo triedro, perchè esso possa sussistere.

Infatti, se si osserva che ogni angolo diedro è compreso tra 0° e 180°, ossia tra 0° e 2 retti, si vede che conviene che la somma degli angoli diedri sia maggiore di 0° e minore di 6 angoli retti per l'angolo triedro, e per un angolo poliedro come la somma degli angoli diedri debba essere compresa fra 0° e tante volte 2 retti quanti sono gli spigoli dell' angolo poliedro. Ora, siccome l'angolo triedro supplementare ha gli angoli piani che sono i supplementi degli angoli diedri dell'angolo triedro dato, e perchè esso sia possibile occorrendo che la somma degli angoli piani sia minore di quattro angoli retti, così si conchiuderà col dire che la somma dei supplementi degli angoli diedri di un angolo triedro deve essere minore di quattro retti. La somma quindi degli angoli diedri di un angolo triedro sarà sempre maggiore di 6 retti meno 4 retti, ossia di 2 retti, e sempre minore di 6 retti. Si potrà quindi conchiudere che: *perchè un angolo poliedro sia possibile, conviene che la somma degli angoli diedri sia compresa fra tante volte 2 retti quanti ne sono gli spigoli, ed un tal numero di retti diminuito di 4.* Così si dirà che la somma degli angoli diedri di ogni angolo tetraedro ad esempio è compresa fra 8 retti ed 8 retti meno 4 retti, ossia 4 retti.

Gli angoli diedri di un angolo solido triedro essendo i supplementi degli angoli piani dell'angolo triedro supplementare, si potrà pure dire che dovendo essere i supplementi degli angoli diedri di un angolo triedro tali che ognuno sia minore della somma degli altri due, epperciò anche maggiore della differenza perchè possa sussistere l'angolo triedro supplementare, così anche gli angoli diedri di un angolo triedro debbono essere tali che l'uno nè sia eguale o maggiore della somma degli altri due, nè minore od eguale alla differenza degli altri due.

Ecco così determinato tanto l' essere di ciascun angolo piano o diedro di un angolo poliedro rispetto agli altri, come il limite della loro somma.

Eguaglianza di angoli solidi. — Venendo ad esaminare quanti sieno gli elementi necessari perchè un angolo poliedro sia determinato, si parta dall'angolo triedro, e si considerino due angoli solidi triedri come S ed S' (Fig. 22), tali che essi abbiano gli angoli piani rispettivamente eguali, cioè l' angolo piano A S C = A' S' C', A S B = A' S' B', C S B = C' S' B'. Se i due angoli triedri saranno eguali, è evidente che non solo avranno gli angoli piani rispettivamente eguali, ma ancora gli angoli diedri rispettivamente eguali.

Se si prende ad esempio sullo spigolo S B un punto qualunque E, e da esso ed a S B si conducono due perpendicolari, l'una nella faccia B S C, l'altra nella faccia B S A, l'angolo F E D formato da tali perpendicolari segnerà la misura dell'angolo diedro S B. Se di poi sullo spigolo S' B' si prende un punto E' e per questo si traccino le due rette E' F', F' D', entrambe perpendicolari ad S' B, e l'una nella faccia B' S' C' e l' altra nella faccia B' S' A', l' angolo F' E' D' sarà l' angolo piano che misura l' angolo diedro B' S'. Se quindi i due angoli triedri S e S' sono eguali, eguali saranno anche i due angoli diedri S B, S' B, cioè i loro rispettivi angoli di misura D E F = D' E' F'.

Ma che questi angoli D E F, D' E' F' siano eguali, è facile il convincersene, facendo S E = S' E' e tirando le rette D F, D' F', perchè risulterà: 1.° D E = D' E', poichè i triangoli D S E, D' S' E' hanno l'angolo D S E = D' S' E', sono rettangoli l'uno in E, l'altro in E', ed hanno S E = S' E'; 2.° F E = F' E', perchè pure sono rettangoli i due triangoli F S E, F' S' E', ed hanno l'angolo F S E = F' S' E' ed il lato S E = S' E', e quindi S F = S' F'; 3.° D F = D' F', poichè i due triangoli D S F = D' S' F' sono eguali come aventi l' angolo D S F = D' S' F', il lato S D = S' D' ed il lato S F = S' F'; 4.° che i due triangoli D E F, D' E' F' sono eguali come aventi tutti e tre i lati eguali. Una considerazione tutt' affatto analoga eseguita per gli altri due angoli diedri S A, S C, si vedrà essere ciascuno rispettivamente eguale ad S' A e S' C'.

Adunque a determinare un angolo triedro, basta la conoscenza degli angoli piani perchè esso sia determinato.

Gli angoli piani essendo tre, vedesi come la metà degli elementi che costituiscono un angolo triedro sieno sufficienti per la sua determinazione.

E questo fatto si farà maggiormente palese ove si osservi come

in virtù dell'angolo solido supplementare, ove fossero dati gli angoli diedri di un angolo triedro, del pari esso sarebbe determinato, poichè gli angoli diedri determinerebbero gli angoli piani dell'angolo supplementare, ed i diedri di questo determinerebbero alla loro volta coi loro supplementi i piani dell'angolo triedro, di cui solo sarebbero dati i diedri.

Avendo visto come due angoli triedri che abbino eguali gli angoli piani, hanno pure eguali gli angoli diedri, e che perciò sono eguali, sarà facile il convincersi come, sovrapponendo ad esempio l'angolo triedro S sull'angolo triedro S', questi due angoli triedri abbiano a coincidere esattamente in tutte le loro parti. Ed infatti, se si dispone la faccia A' S' B' sulla faccia A S B, in modo che il vertice S' cada in S, lo spigolo S' A' su S A, quello S' B' su S B, la faccia C' S' A' essendo egualmente inclinata sulla faccia B' S' A come la C S A sulla A S B, esse si disporranno l'una sull'altra, ed essendo quindi l'angolo piano A' S' C' eguale a quello A S C, lo spigolo S' C' coinciderà con quello S C, ed in allora coinciderà pure la faccia B' S' C' con la B S C.

Ma se si osserva come, ad esempio, le due faccie B S A, C S A e la loro inclinazione determinano l'angolo triedro, è quindi facile il conchiudere come *la conoscenza di due angoli piani e dell'angolo diedro compreso, determina l'angolo triedro.*

Parimenti, ove si consideri come data la faccia B S A e l'inclinazione delle altre due faccie B S C, A S C, l'angolo triedro sia determinato di posizione, si potrà ancora conchiudere come *un angolo triedro è determinato colla conoscenza di un angolo piano e dei due angoli diedri adiacenti.*

Due angoli triedri eguali non sempre sono sovrapponibili, ed infatti in S ed S' (Fig. 23) si hanno due angoli triedri disposti in posizione diversa da quella occupata da quelli che si sono considerati dapprima, e che non sono sovrapponibili, poichè i singoli spigoli non sono rispettivamente paralleli, ma essi sono simmetricamente disposti rispetto ad un piano M N perpendicolare in sulla metà di una retta che congiunge due vertici omologhi. A distinguere perciò la posizione di due angoli triedri eguali tra di loro, aggiungasi secondo il caso la parola *sovrapponibili* o quella di *simmetrici.*

La sovrapponibilità di due angoli triedri non influendo sulla loro

eguaglianza, si può quindi ritenere, come già si disse, che il numero degli elementi necessarii per la determinazione di un angolo triedro sia tre.

Un angolo poliedro essendo scomponibile in angoli triedri, si può quindi stabilire come, per la determinazione di un angolo poliedro occorrono tanti elementi quanti sono gli spigoli o faccie. Gli angoli poliedri, del pari che gli angoli triedri, possono essere o sovrapponibili o simmetrici, secondochè gli spigoli omologhi corrono o no in direzione parallela.

Tre elementi determinando l'angolo triedro, egli è appunto nei seguenti nove problemi che trovasi indicato il modo di valutare gli altri elementi di un angolo triedro in funzione di tre dati. Detti nove problemi sono a ritenersi sufficienti, perchè collo studio della risoluzione di essi sia facile il rintracciare la via della risoluzione per ogni altro caso che analogamente possa venire proposto.

PROBLEMI.

1.° — *Misurare gli angoli diedri di un angolo triedro, di cui si conosce il valore degli angoli piani e si sanno essere acuti.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 1).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba cercare il valore degli angoli diedri, conoscendo quello degli angoli piani A S B, B S C, D S C che si sanno essere tutti e tre acuti.

L'angolo diedro S B essendo misurato dall'angolo piano R P Q formato dalle due rette P R, P Q condotte nelle faccie e perpendicolarmente allo spigolo S B da un punto qualunque P, e le rette P R, P Q incontrando, la prima lo spigolo S A in R, la seconda lo spigolo S C in Q, a causa che gli angoli piani B S A, B S C che sono acuti, è facile il vedere come l'angolo diedro S B sia eguale all'angolo piano R P Q del triangolo P Q R che si ottiene conducendo nella terza faccia A S C la retta R Q. Ora è evidente che, conoscendo il valore degli angoli piani dell'angolo triedro dato, facendo tali angoli col mezzo di un rapportatore e nel modo che ad esempio vedesi disposto nella Fig. 1 *bis,* in cui le singole faccie A S B, B S C, A S C dell'angolo triedro dato sono rappresentate dagli angoli A S B, B S C e C S A', scegliendo un punto qualunque P su di S B e per esso tirando a questa una perpendicolare che incontrerà S C in Q ed S A in R, e per ultimo facendo S R' = S R e tirando la retta R' Q, si abbino le tre rette P Q, P R, Q R', tali che con esse costruendo il triangolo Q P' R', l'angolo piano Q P' R' che può misurarsi col rapportatore, esprime il valore o misura dell'angolo diedro S B. Una operazione del tutto analoga ripetendo sugli altri spigoli S A ed S C, permetterà di misurare e quindi determinare il valore dei rispettivi angoli diedri S A ed S C.

2.° — *Misurare gli angoli diedri di un angolo triedro, di cui si conosce il valore degli angoli piani e si sanno essere due acuti ed il terzo retto.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 2).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba cercare il valore degli angoli diedri, conoscendo quello degli angoli piani, che si sanno essere i due A S B, B S C acuti ed il terzo A S C retto.

L'angolo diedro S B essendo compreso fra due faccie i cui angoli piani sono tutti e due acuti, basterà applicare la risoluzione precedente per averne la sua misura. E qui si indicherà perciò solo il modo di misurare gli altri due angoli diedri compresi ciascuno fra due faccie i cui angoli piani sono l'uno acuto, l'altro retto, cioè i due angoli diedri S A ed S C. Se si prende un punto qualunque P sullo spigolo S A, e per esso si conduce un piano perpendicolare a detto spigolo, si osserverà come detto piano incontri la faccia A S B secondo P Q e la faccia A S C secondo P O, come l'angolo Q P O sia la misura dell'angolo diedro S A, come la retta P Q perpendicolare ad S A incontri lo spigolo S B in Q a causa che l'angolo piano A S B è acuto, come infine la retta P O perpendicolare ad S A sia parallela ad S C a causa che l' angolo piano A S C è retto. Se di poi pel punto Q si conduce un piano che sia perpendicolare allo spigolo S C, si osserverà pure come detto piano incontri la faccia B S C secondo la retta Q R e la faccia A S C secondo la retta R O, come l'angolo Q R O sia la misura dell'angolo diedro S C, come la retta R O perpendicolare ad S C sia parallela ad S A a causa che l'angolo piano A S C è retto, come i due piani condotti, il primo per P, il secondo per Q, si incontrino secondo la retta Q O perpendicolare alla faccia A S C, come infine i due triangoli Q P O, Q R O sono ambedue rettangoli in O.

Considerando per ultimo i due triangoli rettangoli Q P O, Q R O, nei quali R O = S P, P O = S R, è facile il vedere come costruendo detti due triangoli rettangoli, si possa avere nel primo e nell' angolo Q P O l' angolo diedro S A, nel secondo e nell' angolo Q R O l' angolo diedro S C.

Volendo effettuare l' operazione descritta, si formino col mezzo, da esempio, di un rapportatore grafico e nel modo ad esempio di-

sposto alla Fig. 2 *bis*, gli angoli A S B, A S C, C S B', che siano eguali agli angoli piani dati dell'angolo triedro dato, cioè l'angolo A S C retto, l'angolo A S B = A S B e C S B' = C S B tutti acuti.

Si scelga il punto P sulla retta S A, si innalzi per questo una perpendicolare, che incontrerà S B in Q. Si faccia S Q' = S Q, e pel punto Q' si abbassi una perpendicolare ad S C, che incontrerà S C in R e la perpendicolare stata tirata da P nel punto O. Ottenute in tal modo le lunghezze Q' R, Q P, S R ed S P, è facile il costrurre i due triangoli rettangoli Q P O, Q R O (Fig. 2), facendo centro in P (Fig. 2 *bis*) con raggio P Q descrivendo un arco che taglierà O Q' in Q'', e facendo centro di poi in R e con raggio R Q' descrivendo un arco che taglierà O Q in Q'''. Tirate le rette P Q'', R Q''', si avranno due triangoli rettangoli P O Q'', R O Q''', nel primo dei quali misurando col rapportatore l'angolo Q'' P O, il risultato della misura sarà il valore dell'angolo diedro S A, nel secondo misurando l'angolo Q''' R O, si avrà il valore dell'angolo diedro S C.

3.° — *Misurare gli angoli diedri di un angolo triedro, di cui si conosce il valore degli angoli piani e si sanno essere due acuti ed il terzo ottuso.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 3)

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba misurare gli angoli diedri, conoscendo il valore di quelli piani e sapendo essere i due A S B, B S C acuti ed il terzo A S C ottuso.

L'angolo diedro S B essendo compreso fra due faccie i cui angoli piani sono acuti, la sua misura si ricaverà colla risoluzione additata nel 1.° problema di questa serie. E qui non si espone perciò che la via per conseguire la misura degli altri due angoli diedri, cioè S A ed S C.

Si scelga un punto qualunque P sullo spigolo S A, e per esso si conduca un piano perpendicolare a detto spigolo, che incontrerà la faccia A S B secondo P R e la faccia A S C secondo P O, e darà nell' angolo R P O la misura dell' angolo diedro S A. Osservando come l' angolo piano A S B è acuto, si vedrà che la retta P R perpendicolare ad S A incontrerà lo spigolo S B in R, parimenti come essendo l' angolo piano A S C ottuso, la retta P O perpendicolare ad S A non incontrerà lo spigolo S C che

sul suo prolungamento in Q. Se si immagina di poi condotto pel punto R un piano perpendicolare allo spigolo S C che incontrerà la faccia B S C secondo R T e la faccia A S C secondo T O, si vedrà come l'angolo R T O segni la misura dell'angolo diedro S C, come i due piani condotti, il primo per P, il secondo per R, si incontrino secondo la retta R O perpendicolare alla faccia A S C, come infine risultino i due triangoli rettangoli in O, cioè R T O, R P O, tali che l'angolo R T O del primo triangolo è l'angolo diedro S C, e l'angolo R P O del secondo triangolo è l'angolo diedro S A. I due triangoli R P O, R T O essendo determinati, ne nasce essere determinata la via per conseguire la misura dei relativi angoli diedri S A ed S C.

Volendo effettuare l'indicata operazione, si formino ad esempio col mezzo del rapportatore e nel modo ad esempio disposto nella Fig. 3 *bis*, gli angoli A S B, A S C, C S B', che ognuno corrisponda al valore degli angoli piani dati e sia A S C quello ottuso. Si scelga il punto P su di S A, e per esso si conduca una perpendicolare a tale retta che incontrerà S B in R, S C in Q. Si faccia S R' = S R, e dal punto R' si abbassi una perpendicolare ad S C, che incontrerà questa in T ed incontrerà la perpendicolare stata tirata dapprima per P, nel punto O. Avendo così le lunghezze R' T, T O, P R, P O, è possibile la costruzione dei due triangoli rettangoli R P O, R T O (Fig. 3), e tali triangoli facendo nella Fig. 3 *bis*, si ha che pel triangolo rettangolo P O R'', misurando l'angolo R'' P O, si ha in esso il valore dell'angolo diedro S A, come si ha il valore dell'angolo diedro S C, misurando l'angolo R''' T O del triangolo rettangolo T O R'''.

4.° — Misurare gli angoli diedri di un angolo triedro, di cui si conosce il valore degli angoli piani e si sanno essere due ottusi ed il terzo acuto.

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 4).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S di cui si debba misurare i rispettivi tre angoli diedri, conoscendo il valore dei tre angoli piani e sapendo che i due A S B, A S C sono ottusi ed il terzo B S C è acuto.

L'angolo diedro S B, del pari che l'angolo diedro S C, essendo compresi fra due faccie i cui angoli piani sono l'uno acuto e l'al-

tro ottuso, la misura di essi si otterrà appunto col procedimento indicato nel precedente problema 3.° Si indicherà quindi qui soltanto la via per giungere a misurare l'angolo diedro S A compreso fra due faccie i cui angoli piani sono tutti e due ottusi.

Si scelga sullo spigolo S A un punto qualunque P, e per esso si conduca un piano perpendicolare appunto ad S A. Questo piano taglierà la faccia A S B e la faccia A S C secondo due rette entrambi perpendicolari ad S A, ma però tali che non incontreranno nè lo spigolo S B, nè quello S C, a causa dell'ottusità degli angoli piani A S B, A S C, incontreranno però i loro prolungamenti in Q ed in R. Il piano Q P R condotto dal punto P intersecherà la faccia B S C secondo la retta Q R, e darà nell'angolo Q P R quello che segna la misura dell'angolo diedro S A, inquantochè Q P R non è che opposto al vertice e quindi eguale del diedro S A. Potendo in tal modo determinare S R e S Q, a mezzo dell'angolo R S Q = C S B si può conoscere Q R, e quindi con Q P e P R determinare il triangolo Q P R, ed ottenere in tal guisa l'angolo Q P R che si cerca, cioè il diedro S A. Una tale operazione è appunto eseguita nella Fig. 4 *bis*, in cui si sono fatti tre angoli C S A, A S B, B S C' eguali al valore dato degli angoli piani, in cui si è preso su S A il punto P, e per esso tirato R Q perpendicolare ad S A, che incontra S B sul prolungamento in R, ed S C sul prolungamento in Q; ed in cui per ultimo dopo prolungato C' S di S Q' = S Q, e tirata la retta R Q', colle tre rette R Q', P R, P Q costrutto il triangolo R P' Q', nel quale l'angolo che si oppone al lato R Q' è l'angolo R P' Q', che appunto misurato dà nel risultato il valore dell'angolo diedro S A.

5.° — *Misurare gli angoli diedri di un angolo triedro, di cui si conosce il valore degli angoli piani e si sanno essere l'uno retto, l'altro acuto ed il terzo ottuso.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 5).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba misurare gli angoli diedri, conoscendo il valore degli angoli piani e sapendo che l'angolo A S B è retto, quello B S C acuto, ed il terzo A S C ottuso.

La misura dell'angolo diedro S B che è compreso fra due faccie i cui angoli piani sono l'uno acuto e l'altro retto, non presenterà più alcuna difficoltà, essendosi di ciò trattato nella risoluzione del problema 2.° di questa serie. Si cercherà perciò qui soltanto la misura degli angoli diedri S A ed S C.

Se per lo spigolo S B si conduce un piano che sia perpendicolare allo spigolo S A, ciò che è possibile inquantochè a causa dell'essere l'angolo piano A S B retto, gli spigoli S B ed S A sono perpendicolari tra loro, detto piano incontrerà la faccia A S C secondo la retta S Q perpendicolare ad S A, e l'angolo B S Q segnerà la misura dell'angolo diedro S A. Se quindi per un punto qualunque P dello spigolo S C si conduce a questo un piano perpendicolare, detto piano incontrerà la faccia B S C secondo R P perpendicolare ad S C, la faccia A S C secondo la retta P Q perpendicolare ad S C.

Se si osserva: 1.° che l'angolo piano B S C è acuto, si vede come la retta P R incontri lo spigolo S B in R; 2.° che l'angolo Q S C è pure acuto perchè la differenza fra un ottuso ed un retto, si vede la retta P Q incontrare la S Q in Q; 3.° che i due piani condotti, il primo per lo spigolo S B, il secondo per il punto P, s'incontrano secondo la retta R Q che è perpendicolare alla faccia A S C, si vedrà come i due triangoli R P Q, R S Q sieno rettangoli, e come l'angolo che si oppone ad un medesimo lato R Q esprima nel primo l'angolo diedro S C e nel secondo l'angolo diedro S A.

Effettuando l'indicata operazione, si formeranno tre angoli che ognuno sia eguale agli angoli piani dati, e si disporranno nel modo come alla Fig. 5 *bis*, in cui l'angolo A S B è il retto, A S C l'ottuso e C S B' l'acuto.

Si prende un punto qualunque P su di S C, e si innalza una perpendicolare a detta retta che incontrerà il prolungamento di S B, che rappresenta il piano che si era fatto passare per lo spigolo S B nel punto Q, e la retta S B' nel punto R. Si formano quindi colle rette $R\,P^{ipot.}$, $P\,Q^{cat.}$, $R\,S^{ipot.}$, $S\,Q^{cat.}$, due triangoli rettangoli, nei quali misurando l'angolo R'' P Q del triangolo rettangolo R'' Q P, si ha il valore dell'angolo diedro S C, e misurando l'angolo S S' Q del triangolo rettangolo S' S Q, si ha il valore dell'angolo diedro S A.

6.° — *Conoscendo il valore di due angoli piani e dell'angolo diedro compreso appartenenti ad un angolo triedro, misurare gli altri due angoli diedri ed il terzo angolo piano, sapendo essere tutti e tre acuti gli angoli dati.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 6).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba misurare i due angoli driedri S A ed S C e l'angolo piano A S C, conoscendo il valore degli angoli piani A S B, B S C e dell'angolo diedro S B.

L'angolo diedro S B essendo misurato dall'angolo piano R P Q formato da due perpendicolari innalzate da un punto qualunque P allo spigolo S B e nelle faccie B S A, B S C, ne consegue che immaginando nella terza faccia dell'angolo triedro S tirata la retta R Q, l'angolo piano A S C risulterà dalla misura eseguita di detto angolo su un triangolo costrutto colle tre rette S R, S Q, R Q.

Volendo effettuare l'operazione, basterà il disporre come alla Fig. 6 *bis*, due angoli A S B, B S C, che sieno eguali agli angoli piani dati, quindi da un punto P di S B innalzare a questa una perpendicolare che incontrerà S A nel punto R ed S C nel punto Q. Formare in P un angolo R P Q' eguale all'angolo diedro dato, fare P Q' = P Q, tirare R Q', e formare in ultimo un triangolo R S' Q' con R S' = R S, Q' S' = Q S. Misurando col rapportatore l'angolo R S' Q', il risultato di questa misura esprimerà il valore dell'angolo piano A S C dell'angolo triedro.

Conoscendo per tal modo i tre angoli piani dell'angolo triedro S, non si avrà che ad applicare la risoluzione dei problemi precedenti per misurare gli altri due angoli diedri S A ed S C.

7.° — *Conoscendo due angoli diedri ed un angolo piano appartenenti ad un angolo triedro, misurare il terzo angolo diedro ed i rimanenti due angoli piani.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 7).

Risoluzione. — Sia dell' angolo triedro S che si voglia la misura dell' angolo diedro S B e degli angoli piani A S B, B S C,

conoscendo il valore degli angoli diedri S A ed S C e dell' angolo piano A S C.

Nella teoria del libro quarto essendosi dimostrato come l'angolo triedro abbia un angolo triedro supplementare, cioè tale che gli angoli driedri del primo sono i supplementi degli angoli piani del secondo, e che i piani del primo sono i supplementi dei diedri del secondo, ne consegue che conoscendo il valore di due angoli diedri di un angolo triedro, si conoscerà facendo i supplementi di detti angoli, il valore di due angoli piani dell'angolo triedro supplementare, e facendo poi il supplemento dell' angolo piano dell'angolo triedro dato, si avrà il valore di un angolo diedro dell'angolo triedro supplementare.

Ora, il problema precedente indicando il modo di determinare il terzo angolo piano di un angolo triedro in funzione di due angoli piani e di un angolo diedro, così applicando detta risoluzione all'angolo triedro supplementare, si avrà il mezzo di conoscere il terzo angolo piano dell' angolo triedro supplementare, nonchè i rispettivi angoli diedri, e facendone di poi i supplementi, avere tanto gli angoli piani quanto l' angolo diedro che si cerca appunto in questo quesito.

Tale risoluzione è messa in evidenza coll'osservare la Figura 7, in cui i due piani condotti, il primo perpendicolare ad S C, il secondo perpendicolare ad S A, ed ambedue perpendicolari alla faccia A S C, si incontrano secondo una retta R O perpendicolare alla faccia A S C e perpendicolare ad O Q e ad O P. L'angolo R Q O è l'angolo diedro S C dato, l'angolo R P O è l'angolo diedro S A dato, l'angolo P O Q il diedro di R O ed il supplemento di A S C dato, poichè nel quadrilatero P S Q O vi sono due angoli opposti, l'uno in P, l'altro in Q, che sono retti. Ora, se immaginasi condotto per lo spigolo S B un piano perpendicolare a detto spigolo, l'angolo O' P' O'' è il diedro che si cerca, e risulta l'angolo solido supplementare Q', tale che l'angolo piano O'' Q' O è il supplemento dell'angolo diedro S C, cioè O'' Q O, l'angolo piano O' Q' O il supplemento dell'angolo diedro S A, cioè R P O, ed il terzo angolo piano O' Q' O'' è il supplemento dell'angolo diedro S B che si cerca, cioè O' P' O''.

Col mezzo del problema precedente misurando l' angolo piano O' Q' O'', basterà farne il supplemento della misura per avere l'an-

golo diedro S B. Col mezzo poi dei precedenti problemi misurando gli angoli diedri Q′ O′, Q′ O″, si avrà nei supplementi di dette misure il valore degli angoli piani A S B, B S C.

8.° — *Conoscendo il valore di due angoli piani ed uno diedro appartenenti ad un angolo triedro, misurare il terzo angolo piano e gli altri due angoli diedri, sapendo essere i due angoli piani dati l'uno retto e l'altro acuto.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 8).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba misurare l'angolo piano A S B ed i due driedri S A ed S B, conoscendo il valore degli angoli piani A S C, B S C, che si sanno essere il primo retto ed il secondo acuto.

Se si sceglie un punto qualunque Q sullo spigolo S C, e per questo punto si traccia un piano perpendicolare al medesimo, questo piano incontrerà la faccia B S C secondo la retta Q R, e la faccia A S C secondo una retta parallela ad A S. Se in seguito pel punto P si traccia un altro piano che sia perpendicolare ad A S, questo piano incontrerà la faccia B S A secondo R P e la faccia A S C secondo una parallela ad S C. I due piani così tracciati si taglieranno secondo la retta R O, che sarà perpendicolare alla faccia A S C ed alle rette O P ed O Q, per cui i triangoli R O Q, R O P sono quindi entrambi rettangoli. Conoscendo l'angolo R Q O che è l'angolo diedro S C, conoscendo R Q dal triangolo R Q S che è rettangolo e di cui è conosciuto l'angolo R S Q ed il lato S Q, il triangolo R Q O è costruibile, e con esso si otterrà la lunghezza di Q O che è eguale a P S. Costruendo in seguito il triangolo R P O, che è pure rettangolo e di cui si conoscono i due cateti P O = S Q ed R O, si otterrà l'ipotenusa P R. Per ultimo costruendo un triangolo colle tre rette P S, S R, P R, l'angolo opposto alla retta P R sarà eguale all'angolo piano A S B che si cerca.

Conoscendo in tal modo i tre angoli piani dell'angolo triedro S, per trovare la misura degli angoli diedri S A, S B, basterà applicare le risoluzioni dei primi problemi di questa serie.

9.° — *Conoscendo il valore di due angoli piani e di un angolo diedro appartenenti ad un angolo triedro, misurare il terzo angolo piano e gli altri due diedri, sapendo che i due angoli piani dati sono l'uno ottuso, l'altro acuto.*

(Vedi Tavola XXXII, Fig. 9).

Risoluzione. — Sia dell'angolo triedro S che si debba misurare l'angolo piano A S B ed i due angoli diedri S A, S B, sapendo che l'angolo piano A S C è ottuso e quello B S C è acuto, e conoscendo oltre al valore di detti due angoli, quello dell'angolo diedro S C.

Se per un punto qualunque P dello spigolo S C si innalza una perpendicolare sulla faccia B S C, l'angolo piano B S C essendo acuto, detta perpendicolare incontrerà lo spigolo S B nel punto O; e se per lo stesso punto P si innalza una perpendicolare nella faccia A S C, l'angolo piano A S C essendo ottuso, detta perpendicolare incontrerà lo spigolo S A sul suo prolungamento in R. Ora, conoscendo l'angolo diedro S C, cioè O P T, si conoscerà anche il supplementare O P R. Il triangolo O P R è quindi costruibile per la conoscenza di P O, P R e dell'angolo O P R; e darà per risultato la lunghezza di O R. Costruendo per ultimo un triangolo colle tre rette S R, S O, O R, l'angolo opposto al lato O R sarà il supplemento dell'angolo piano che si cerca, cioè O S R, il supplemento di A S B angolo piano dell'angolo solido S.

Qui, come nel problema precedente, conoscendo i tre angoli piani dell'angolo triedro S, basterà fare applicazione dei già esposti problemi per ottenere la misura degli angoli diedri S A ed S B.

APPENDICE AL LIBRO QUARTO

SULLE PROIEZIONI.

Proiezioni. — Tutti sanno di quanta importanza sia il disegno, cioè il rappresentare sopra un piano qualunque, ad esempio quello di un foglio di carta, un corpo qualunque somministrato sia dalla natura quanto dall'arte. Questa rappresentazione, quanto più parlerà efficacemente ai nostri sensi, quanto più essa produrrà allo spettatore una sensazione vicina a quella che proverebbe all'avere a sè dinnanzi gli oggetti rappresentati, tanto più si dirà della bontà del disegno, tanto più se ne intenderà l'utilità. Il disegno è necessario quanto il sapere scrivere, poichè con esso si ha il mezzo di dare allo spettatore in un sol colpo d'occhio l'idea e della forma e della posizione di un corpo, ciò che non è solo difficile, ma taluna volta impossibile il potere eseguire col mezzo sia della parola che di una descrizione. Questa necessità nel disegno, che venne sentita fin dai primi momenti in cui si incominciò lo studio della geometria, è ora reso di molta maggiore importanza nel momento in cui si sta per entrare ad occuparsi dello studio di corpi, nei quali non sono comprese due sole dimensioni, ma bensì tre dimensioni.

Allorquando un disegno prende a rappresentare tanto delle figure di geometria, quanto qualsiasi corpo con procedimenti geometrici, esso si chiama *disegno geometrico*. Però, allorchè esso si occupa o di sole figure di geometria piana o di altre figure nella loro realtà tutte contenute in un medesimo piano, esso si chiama *disegno geometrico lineare;* e quando prende a rappresentare un corpo, e che nel medesimo tempo lo determina, chiamasi *proiezione*. Nella geometria piana, al libro terzo di questo trattato, si è fatto menzione di questa parola per abbreviare una dicitura, e si era

detto chiamarsi proiezione di una retta sopra un'altra retta, quella porzione di retta che era risultante e compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi della retta data.

In questa appendice, in cui si tratta in particolare delle proiezioni, si avrà campo di vedere e il modo di rappresentare su di un piano un corpo nello spazio, e il modo di determinare detto corpo.

Ogni corpo, sia egli terminato da una superficie uniforme, come da diverse superficie, essendo sempre determinato dalla determinazione di un numero infinito di punti presi sulla sua superficie, così qui si indicherà dapprima il modo di determinare un punto collocato su di un dato piano e di punto comunquemente collocato nello spazio, indi dei modi di rappresentare detti punti sopra di un piano, che poi convenientemente riuniti, debbono rappresentare l'idea di un dato corpo. Il risultato di questa rappresentazione è ciò che chiamasi proiezione, e di proiezioni se ne tratterà qui di quattro specie, cioè della proiezione quotata, di quella descrittiva, della prospettiva e dell'assonometrica.

Determinazione di un punto collocato in un piano. — Nella geometria piana essendosi detto come due rette fra di loro perpendicolari hanno una sola posizione, vale a dire che per un dato punto su di una retta non è possibile innalzare che una sola perpendicolare, è facile il vedere che se ad esempio (Tav. XXXIII, Fig. 1) si ha un punto M, come la posizione di detto punto sia perfettamente determinata allorchè si conosca la lunghezza delle rette M P, M Q condotte perpendicolarmente del punto M alle due rette perpendicolari tra loro O X, O Y, rispetto alle quali si riferisce il punto. Ed infatti, ove si conducono due rette fra loro perpendicolari, e che su di una di esse a partire dal punto d'incontro si porti una distanza O Q = M P e sull'altra una distanza O P = M Q, che quindi per Q si meni una parallela ad O Y e per P una parallela ad O X, l'incontro di dette due parallele fornirà immediatamente il punto M.

Il punto Q è la proiezione di M sulla retta O X, il punto P la proiezione di M sulla retta O Y. Le due rette O X, O Y perpendicolari tra loro, ed alle quali si riferisce ogni punto collocato sul piano contenuto da dette due rette, si chiamano ***assi delle coordinate***, e per distinguere l'uno dall'altro detti due assi, così dicesi ad esempio ad O X l'***asse delle ascisse***, oppure l'asse delle X, e ad

O Y l'*asse delle ordinate*, oppure l'asse delle Y. Il punto poi d'incontro di detti due assi di coordinate chiamasi l'*origine delle coordinate*. Chiamansi poi *coordinate* di un punto le distanze di esso dagli assi, così le rette M P, M Q sono le coordinate del punto M.

Però, onde distinguere l'una dall'altra coordinata, dicesi ***ascissa*** quella che è parallela all'asse delle ascisse, ed ***ordinata*** quella che è parallela all'asse delle ordinate. Così M P è l'ascissa, M Q l'ordinata del punto M.

Siccome, ove si immaginino prolungati gli assi O X, O Y, in X' ed Y', risultano quattro spazi angolari, in ciascuno dei quali può stare un punto di coordinate date, così onde distinguere in quale di detti spazi si trovi un dato punto, è necessario il fare precedere il valore delle coordinate dal segno + o —, secondochè dette coordinate si trovano collocate o dall' una o dall'altra parte dell'origine, o meglio secondochè si trovano o sugli assi o sui loro prolungamenti. È così facile il vedere come il punto M', le cui coordinate sono M' P, M' R, cioè M' P ascissa ed M' R ordinata, epperciò l'ascissa sul prolungamento dell'asse delle X e la ordinata sull'asse delle Y, sia perfettamente determinato colla conoscenza del valore delle coordinate, e sapendo essere negativa l'ascissa e positiva la ordinata.

Parimenti si vedrà come il punto M'' abbia l'ascissa negativa, e negativa pure l'ordinata, ed infine come il punto M''' abbia positiva l'ascissa e negativa l'ordinata.

Un triangolo quindi è determinato di posizione, se si conoscerà il valore delle coordinate dei singoli suoi vertici.

E diffatti, se ad esempio si sa che le coordinate di un vertice sono $+ 9^{mm}$ e $+ 4^{mm}$, quelle d'un altro vertice $— 6^{mm}$ e $— 5^{mm}, 8$, e quelle del terzo vertice $— 8^{mm}, 5$ e $+ 8^{mm}$, il triangolo sarà pienamente determinato, poichè dopo condotti gli assi delle coordinate (Fig. 2) X X', Y Y', basterà portare dall'origine O verso X una distanza $O A = 9^{mm}$, indi verso Y una distanza $O E = 4^{mm}$, per A tirare una parallela a Y Y', e per E una parallela ad X X', che dette due parallele si incontreranno in un punto P che sarà un vertice; portare in seguito da O verso X' una distanza $O C = 6^{mm}$, verso O Y' una distanza $O D = 5^{mm}, 8$, tirare per C una parallela a Y Y', e per D una parallela a X X', che dette due parallele si incontre-

ranno in un punto O, che sarà un altro vertice; per ultimo portare da O verso X' una distanza O B $= 8^{mm}, 5$, e verso O Y una distanza O F $= 8^{mm}$, tirare per B una parallela a Y Y', e per F una parallela ad X X', le quali due parallele si incrocieranno nel punto R, che sarà il terzo vertice. Tirando le rette P Q, P R e Q R, il triangolo P Q R così risultante è il solo i cui vertici abbiano per coordinate le coordinate date.

Del pari di ogni altra qualunque figura piana, essa sarà determinata colla conoscenza delle coordinate di ogni suo vertice e di ogni punto che esprima l'andamento di una qualunque linea.

Determinazione di un punto collocato nello spazio. — La determinazione di un punto comunquemente nello spazio, è analoga a quella testè indicata di un punto collocato in un piano. E difatti, essendosi detto al libro quarto come la perpendicolare abbassata da un dato punto su di un dato piano, esprima nella sua lunghezza la distanza che esiste dal punto al piano, e che il piede di tale perpendicolare è la proiezione del punto dato sul piano dato, è facile il vedere che se è determinabile col mezzo delle coordinate il piede della perpendicolare abbassata da un dato punto ad un dato piano, colla conoscenza ancora della lunghezza di tale perpendicolare, il punto sia perfettamente determinato.

Se quindi si immaginano tre piani indefiniti perpendicolari tra loro, e che per conseguenza le rispettive intersezioni siano pure perpendicolari tra loro, come già si ebbe occasione di vedere altra volta, la posizione di un punto collocato nello spazio sarà determinata dalla lunghezza delle perpendicolari abbassate da detto punto su ciascuno dei tre piani. Se (Fig. 3) O X, O Y, O Z sono le intersezioni di tre piani perpendicolari tra loro, se P è un punto qualunque collocato nello spazio, esso sarà perfettamente determinato colla conoscenza delle tre rette P B, P L, P U, abbassate, la prima dal punto P perpendicolarmente al piano X O Y, la seconda dal punto P perpendicolarmente al piano Y O Z, la terza dal punto P perpendicolarmente al piano X O Z. Ed infatti, se si fa O A $=$ P L, se si tira per A nel piano X O Y una parallela ad O Y, e si fa A B $=$ P U, ed infine se pel punto B si innalza una perpendicolare B P $=$ B P, il punto P sarà così tosto trovato. I tre piani X O Y, Y O Z, X O Z si chiamano i piani delle coordinate, le rette O X, O Y, O Z d'intersezione di detti piani si chiamano gli assi delle coordinate, ed

il punto d'intersezione di detti assi si chiama l'origine delle coordinate. Le perpendicolari poi abbassate da un dato punto sui piani delle coordinate, si chiamano le coordinate del punto, ed i piedi di tali perpendicolari, le proiezioni del punto.

Siccome poi immaginando indefinitamente prolungati ed in ogni senso i piani delle coordinate, risultano formati intorno all'origine di detti piani otto spazi angolari indefiniti, così onde rimanga determinato in quale di detti spazi angolari si trovi un punto, è necessario che i valori delle coordinate siano preceduti dal segno $+$ o $-$, secondochè dette coordinate si trovano parallele o agli assi delle coordinate, oppure ai loro prolungamenti.

Il prolungamento indefinito dei piani delle coordinate, è evidente che produrrà delle intersezioni, che saranno i prolungamenti degli assi delle coordinate. Si vedrà in tal modo come il punto P' ha l'ordinata $P'H$ positiva, come pure positiva l'ordinata $P'N$, inquantochè la prima è misurata nella direzione HP' parallelamente all'asse delle Z, e la seconda misurata nella direzione NP' parallelamente all'asse delle X, e l'ordinata $P'U$ negativa, inquantochè essa è misurata nella direzione UP' parallelamente al prolungamento dell'asse delle Y. Il punto P'' ha le ordinate $P''Q$, $P''V$ positive, e la terza $P''B$ negativa. Il punto P''' ha le ordinate $P'''I$, $P'''D$ positive, e la terza $P'''L$ negativa. Il punto P^{IV} ha le ordinate $P^{IV}Q$, $P^{IV}D$ negative, e la terza $P^{IV}M$ positiva. Il punto P^{V} ha le ordinate $P^{V}I$, $P^{V}N$ negative, e la terza $P^{V}F$ positiva. Il punto P^{VI} ha le coordinate $P^{VI}R$, $P^{VI}M$, $P^{VI}F$ negative. Ed infine il punto P^{VII} ha le ordinate $P^{VII}V$, $P^{VII}H$ negative, e la terza $P^{VII}R$ positiva.

Visto così il modo di determinare la posizione di un punto collocato nello spazio relativamente a tre piani di coordinate, colla conoscenza del valore, sia desso positivo che negativo, delle coordinate, sarà facile il convincersi come la posizione di un corpo è pienamente determinata colla conoscenza del valore delle coordinate di ciascun punto preso sulla superficie del corpo, e tale che abbia ciascuno a caratterizzare il corpo, poichè come già si disse, basterà raccordare convenientemente tra loro tali punti, perchè abbia a risultare il dato corpo. Del pari, se ad esempio si ha un triangolo e del quale si conoscano le coordinate di ciascun vertice, esso è perfettamente determinato. Ed infatti, se si suppone che le coordinate di un vertice sieno $+10^{mm}$, $+9^{mm}$ e $+14^{mm}$, quelle

d'un altro vertice sieno — 7^{mm}, — 7^{mm} e + 6^{mm}, ed infine quelle del terzo vertice sieno — 10^{mm}, + 12^{mm} e — 7^{mm}, la posizione del triangolo è pienamente determinata, poichè sapendo che la prima quota si riferisce all' asse delle X, la seconda all' asse delle Y, la terza all'asse delle Z, basta portare a partire dell'origine O (Fig. 4) e sulle rette X X', Y Y', Z Z' perpendicolari nello spazio tra loro, una distanza O A = 10^{mm}, pel punto A tirare una parallela ad O Y e fare A B = 9^{mm}, indi pel punto B tirare una parallela ad O Z e fare B P = 14^{mm}, che il punto P sarà così un vertice del triangolo; fare in seguito O C = 7^{mm}, per C tirare una parallela ad O Y' e fare C D = 7^{mm}, e per ultimo tirare da D una parallela ad O Z e fare D Q = 6^{mm}, che il punto Q sarà un altro vertice del triangolo; infine, facendo O E = 10^{mm}, per E tirando una parallela ad O Y, facendo E F = 12^{mm}, ed in ultimo per F tirando una parallela ad O Z' e facendo F R = 7^{mm}, che il punto R sarà il terzo vertice. Egli è quindi evidente che tirando le rette P Q, P R, Q R, il triangolo P Q R è il solo i cui vertici abbino le coordinate date.

Se si è fatta attenzione alla determinazione di questo triangolo, si è visto appunto che le quote positive furono misurate nel senso degli assi, e come le quote negative furono misurate nel senso opposto, cioè in quello dei loro prolungamenti.

Essendo tre le quote necessarie per la determinazione di un punto collocato nello spazio, siano esse queste quote positive o negative, resta a vedersi il modo di rappresentare dette quote su di un piano, per modo che dallo sguardo rivolto alle medesime sia possibile il distinguere, il farsi il concetto, della posizione di un punto.

Proiezione quotata. — Se si hanno tre punti, come ad esempio (Fig. 5) P, Q ed R, dei quali si conoscano le coordinate, e si sappia perciò essere le coordinate del primo + 0,80, + 1,10, + 0,35, le coordinate del secondo — 0,25, + 1,40, + 1, 50, e quelle del terzo — 1,60, — 1 e — 0,83, la posizione dei tre punti P, Q ed R è pienamente determinata, poichè facendo O A = 0,80, A B = 1,10, B P = 0,35 si ha il punto P, facendo O C = 0,25, C D = 1,40 e D Q = 1,50 si ha il punto Q, ed infine facendo O F = 1,60, F E = 1 ed E R = 0,83 si avrebbe il punto R. Per rappresentare poi detti punti su di un piano, è facile il comprendere che tirando due rette perpendicolari tra loro, come X X', Y Y', che s'incrocino nel punto O, e quindi facendo O A = 0,80 ed A P = 1,10,

basta lo scrivere vicino a questo punto P la terza quota 0,35, perchè la posizione del punto P nello spazio sia determinata, e perchè se ne possa formare il concetto. Del pari, facendo O C = 0,25, C Q = 1,40, e scrivendo accanto a questo punto la terza quota 1,50, la posizione nello spazio del punto Q è parimenti determinata. E per ultimo facendo O F = 1,60, F R = 1, e scrivendo accanto al punto R la terza quota — 0,83, è pure determinata la posizione del punto R. Si ha per tal modo un piano sul quale sono segnati tre punti, ed a ciascuno dei quali è unito una cifra, che esprime il valore della lunghezza di una retta perpendicolare al piano in quel punto, e secondochè la cifra è positiva o negativa, essa esprime se la perpendicolare deve misurarsi o in un senso o nel senso opposto. Questo piano è ciò che chiamasi *piano quotato*, e poichè un piano quotato non è altro che la proiezione di dati punti collocati nello spazio, e fatta su di esso piano con numeri esprimenti il valore delle perpendicolari che sempre si devono immaginare innalzate per quei punti, così la rappresentazione grafica fatta in tale modo di un punto o di una linea o di un corpo qualunque, chiamasi la *proiezione quotata*. Che una proiezione quotata fornisca una idea esatta del corpo che si proietta, accade di raro, quantunque si uniscano convenientemente i punti di proiezione, poichè è difficile il formarsi in un medesimo istante l'idea di più punti aventi quote diverse. Quindi è che l'impiego della proiezione quotata non è adottato che ad esempio, per la rappresentazione di certe operazioni di livellazione, in cui è sufficiente la posizione e le quote dei punti per i risultati a cui si mira. Un piano quotato determinando esattamente la posizione di punti collocati nello spazio, è quindi con esso permesso il calcolo tanto di rette nello spazio, quanto di superficie e di corpi.

Proiezione descrittiva. — Chiamasi proiezione descrittiva, e volgarmente geometria descrittiva, la proiezione di un punto, di una linea o di un corpo, fatta sopra un piano sul quale sta tracciata una linea detta *linea di terra*, ed attorno alla quale si deve immaginare che una parte del piano debba girare in guisa da disporsi generalmente in senso perpendicolare all'altra parte, formando così due piani normali tra loro, tali che l'incontro delle rispettive perpendicolari innalzate nei punti di proiezione determinino l'oggetto proiettato.

Così (Fig. 6) il piano A B C' D' contiene la proiezione descrittiva di una retta M N, poichè in esso è segnata una retta L T tale che ove si immagini la parte C' L T D' girare attorno a tale retta e prendere la posizione L T C D, perpendicolare alla parte L A B T, le perpendicolari rispettive innalzate dai singoli punti di proiezione danno nel loro incontro la retta nella sua posizione reale.

Chiaro quindi emerge che la proiezione descrittiva è la proiezione fatta su due piani tra loro normali, che poi si immaginano ridotti ad un solo dopo il movimento di un angolo di 90°, fatto da uno di essi attorno alla linea di terra.

E poichè nell'eseguire una proiezione descrittiva suolsi sempre immaginare uno dei piani in senso orizzontale, e quindi necessariamente l'altro in senso verticale, così ne deriva che la proiezione descrittiva fatta sul piano orizzontale chiamasi la proiezione orizzontale, e proiezione verticale quella fatta sul piano verticale. A seconda poi dell'oggetto che forma la proiezione, dette proiezioni ricevono ancora nome diverso; così trattandosi della proiezione di un edificio, la proiezione orizzontale viene chiamata col nome volgare di pianta od icnografia, e la proiezione verticale col nome di elevazione, prospetto, alzata, ortografia; se trattasi di un terreno, la proiezione orizzontale col nome di piano o mappa, a seconda che si limita alla rappresentazione di vasti contrade oppure di piccole regioni, e la proiezione verticale col nome di profilo od altimetria.

Due essendo le proiezioni, cioè la proiezione orizzontale e quella verticale, che concorrono in una proiezione descrittiva, separate l'una dall'altra col mezzo della linea di terra, è facile vedere come la proiezione descrittiva sia una proiezione che in rapporto alla proiezione quotata non differenzi in altro che colla sostituzione di una proiezione alle quote in numeri del piano quotato, che cioè la proiezione verticale di una proiezione descrittiva altro non è che l'espressione delle cifre, che in un piano quotato si apporrebbero ai diversi punti di proiezione. Questa relazione che corre fra i due generi di proiezione, quella descrittiva e di quella quotata, pone in evidenza le relazioni che legano la proiezione orizzontale colla proiezione verticale di una proiezione descrittiva. Infatti, essendo L A B T il piano orizzontale, L C D T il piano verticale, ed M N la retta data nello spazio a proiettarsi, è evidente come la retta *m n* formata dai piedi

delle perpendicolari abbassate dagli estremi della retta data M N sul piano orizzontale L A B T, sia la proiezione orizzontale, e come la retta *m' n'* formata dai piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi della retta data M N sul piano verticale L C D T, sia la proiezione verticale. Ora, ove si consideri che le due perpendicolari M *m*, M *m'* determinano un piano perpendicolare ai due piani di proiezione, e quindi perpendicolare alla loro comune intersezione L T, ne risulta tosto come *m* P è perpendicolare a L T, e come a questa pure sia perpendicolare *m'* P, epperciò come il piano L C D T, dopo avere girato di 90° attorno alla linea L T ed avere presa la posizione L C' D' T, la retta P *m'* sia sul prolungamento della retta P *m*, poichè entrambe in un medesimo piano e perpendicolari in un medesimo punto ad una medesima retta. Per le medesime ragioni anche Q *n'* sarà sul prolungamento di Q *n* e perpendicolare alla linea di terra.

Ogni punto quindi in una proiezione orizzontale ha il suo corrispondente nella proiezione verticale collocato su di una linea, che da esso partendo è perpendicolare alla linea di terra. Così il punto *m* ha il suo corrispondente in *m'* collocato sulla retta *m m'*, che partendo dal punto *m* è perpendicolare in P colla linea di terra; ed il punto *n* ha il suo corrispondente in *n'* collocato sulla retta *n n'*, che partendo dal punto *n* è perpendicolare in Q colla linea di terra.

Questa relazione fornisce direttamente il mezzo di tracciare una proiezione verticale quando sia data la proiezione orizzontale quotata, bastando tracciare sul piano quotato una retta che rappresenti la linea di terra, ed abbassare su questa e dai singoli punti di proiezione, delle perpendicolari, sulle quali portare nel voluto senso ed a partire dal punto d' incontro di esse colla linea di terra delle distanze relative alla cifra o quota del rispettivo punto di proiezione.

La proiezione quotata, come si è visto, esprime i corpi con disegni e cifre, in modo cioè misto; la proiezione descrittiva avvece li esprime con soli disegni; ma ciò nonostante, anche a chi è abituato alla proiezione descrittiva di formarsi innanzi un' immagine vera del corpo rappresentato, tuttavia non essendo sempre possibile a causa dell' impossibilità che si incontra soventi, di potere fare figurare in una sola proiezione descrittiva le parti di un corpo,

che per la loro disposizione siano coperte da altre parti, così ad avere una esatta cognizione d' un oggetto proiettato occorre il dovere talora avere innanzi a sè più proiezioni descrittive fatte, talora il supporre tagliato il corpo con dei piani generalmente paralleli ai piani di proiezione.

Una proiezione descrittiva rappresentando però la esatta posizione di punti collocati nello spazio, è quindi con essa permesso tutte quelle costruzioni grafiche che conducono e alla conoscenza delle reali distanze tra loro e allo studio delle proprietà di quei corpi, cui l' assieme di quei punti conformano. Rimandasi per ciò il lettore che volesse addentrarsi in questa parte, ai trattati di geometria descrittiva, di cui v' ha dovizia.

Proiezione prospettiva. — La proiezione prospettiva, detta volgarmente solo prospettiva, è la proiezione fatta su un piano e in modo tale che lo spettatore il quale la guardi provi una sensazione più vicina possibile a quella che proverebbe ove avesse realmente innanzi a sè gli oggetti rappresentati.

Ove si immagini ammesso in O (Fig. 7) un occhio dello spettatore, questo proverà nell' osservare la figura tracciata sul quadro M N, la medesima sensazione che proverebbe osservando direttamente il corpo A B C D E F G H, poichè i raggi luminosi che partono dai singoli punti del corpo ed arrivano all'occhio posto in O, incontrano il piano M N in punti tali, che sono in linea retta coll'occhio e coi loro omologhi, ciascuno facendo provare all'occhio una sensazione identica a quella d'osservazione sull'omologo del corpo; epperciò il conveniente raccordamento di quei punti non può a meno di fare provare l' effetto che per lo appunto si propone di dare la proiezione prospettica.

Per eseguire quindi la proiezione prospettica o prospettiva di un corpo, conviene fissare la posizione e dell' occhio e del piano relativamente al corpo, indi determinare sul piano i punti d' incontro delle visuali, che partendo dall' occhio vanno ai diversi punti che caratterizzano il corpo, e poscia unire convenientemente fra di loro detti punti stati segnati sul piano.

Nelle ordinarie prospettive, il piano di prospettiva assumendosi pressochè sempre verticale, nell'osservare una prospettiva non occorre che di conoscere la posizione dell' occhio, perchè da tal punto osservata se ne possa sentire tutto l' effetto, e sia pur possibile il

giungere a conoscenza della distanza che separa il corpo dal quadro di prospettiva, inquantochè in una prospettiva essendo facile il riscontrare qualche retta verticale, epperciò parallela al quadro di prospettiva, si potrà colla conoscenza della lunghezza di essa, di quella omologa e della distanza dell'occhio dal quadro, lo stabilire una conveniente proporzione, in cui il quarto termine sia appunto la distanza fra il quadro e il corpo, come ad esempio si avrebbe colla proporzione *a g* : A G — *a g* :: O *p* : *p* P, in *p* P la distanza fra il corpo ed il quadro di prospettiva M N nella Fig. 7.

Ora bene, la posizione dell' occhio, o meglio il punto dal quale deve essere guardata una prospettiva, è su di una perpendicolare innalzata al piano di prospettiva nel punto di vista e ad una distanza eguale alla distanza fra il punto di vista ed il punto di distanza.

Infatti, suppongasi (Fig. 8) che M N sia il piano di prospettiva e verticale, che O sia la posizione dell' occhio dell'osservatore che osserva il punto P collocato nello spazio, il punto *p* d' intersezione del raggio O P col piano M N essendo la prospettiva del punto P, nasce che se *b* P è l' ordinata del punto P, il raggio O P è contenuto in un piano perpendicolare al piano M N, e che lo taglia secondo la retta O′ *b*, epperciò la prospettiva *p* del punto P è collocata su di una retta che partendo dal punto di vista O′, che è il piede della perpendicolare abbassata dall' occhio al quadro di prospettiva, va al piede *b* della ordinata *b* P, che è la proiezione del punto P sul piano di prospettiva. Considerando poi che ove si immaginino condotte pei punti O′ e *b* nel piano di prospettiva due perpendicolari, che facendo *b c* = *b* P, O′ D = O′ O, la retta che unisce i due punti C e D passa pel punto *p* a causa della proporzione O′ O : *b* P :: O′ *p* : *p b* :: O′ D : *b c*, stabilita per la similitudine dei triangoli O O′ *p*, *b* P *p* e O′ D *p*, *b p c*, risulta chiaro trovarsi la prospettiva di un punto, su di una retta che parte da un punto D collocato su di una retta orizzontale condotta nel piano di prospettiva dal punto di vista ed alla distanza O′ D = O′ O, ossia alla distanza dell' occhio dal piano di prospettiva; e va ad un punto C collocato pure su di una retta orizzontale, condotta nel piano di prospettiva dal punto di proiezione del punto dato e ad una distanza *b c* = *b* P, ossia alla distanza del punto dato dalla sua proiezione.

Sicchè, data la prospettiva p di un punto, e dati il punto di vista O′ ed il punto di distanza D, sarà conosciuta la posizione dell'occhio, bastando immaginare innalzata una perpendicolare nel punto di vista O′ lunga quanto la distanza fra i due punti di vista e di distanza, che l'estremo di tale perpendicolare sarà la posizione dell'occhio.

Dalle cose sopradette nasce chiaro il modo di eseguire la prospettiva di un corpo, cioè basta il fissare due punti, l'uno quello di vista, l'altro quello di distanza, collocati amendue su di una retta parallela alla linea di terra, ossia a quella retta che nella prospettiva vuolsi ritenere per orizzontale, indi fissare nel piano le proiezioni dei singoli punti che valgono a caratterizzare la figura del corpo, per detti punti tracciare delle rette parallele alla linea di terra ed in una lunghezza eguale alla ordinata di ciascun punto, e per ultimo tirare delle rette dal punto di vista ai singoli punti di proiezione, e dal punto di distanza agli altri estremi delle rette condotte dai punti di proiezione; che l'intersezione di queste rette forniranno i punti di prospettiva dei diversi punti del corpo. L'unione conveniente dei punti di prospettiva tra loro, daranno la prospettiva vera del corpo rappresentato.

Nell'eseguire la prospettiva di un corpo col mezzo sovraccennato, essendosi ritenuto per base l'effetto che deriva allo sguardo dello spettatore quando questi si valga di un solo occhio, risulta evidente come la prospettiva sovradescritta non sia identica a quella che si otterrebbe quando si fosse tenuto conto dei due occhi, cioè di quella prospettiva che risulta dall'assieme delle intersezioni dei raggi, che partendo dai due occhi vanno ad un medesimo punto. La distanza dei due occhi in un uomo, paragonata alla distanza degli oggetti di cui se ne fa generalmente la prospettiva, essendo piccolissima, così si possono ritenere paralleli i diversi raggi che partono dai due occhi e vanno ad uno stesso punto del corpo, epperciò la prospettiva di un corpo eseguita tenendo calcolo di un occhio, potendo dirsi pressochè eguale alla prospettiva dello stesso corpo tenendo calcolo dell'altro occhio, la prospettiva di un corpo eseguita tenendo calcolo di un solo occhio, può produrre un effetto pari a quello che si osserverebbe quando vi fossero due prospettive convenienti a ciascun occhio, e che ciascun occhio vedesse sul quadro la sola prospettiva che gli conviene.

Tuttavia, osservando una prospettiva, onde sentirne il massimo effetto, è bene l'osservarla con un solo occhio posto in quel punto dal quale il disegnatore suppose il proprio occhio nell'eseguire quella prospettiva.

L'effetto indicato di due prospettive in un medesimo quadro conveniente ciascuna per ciascun' occhio è raggiunto per eccellenza nello Stereoscopio tanto di Wheatstone, quanto in quello di Brewster, apparecchi volgarmente conosciuti e d'altronde descritti in tutti i trattati di fisica, ai quali applicando gli occhi a due tubi in cui sta un congegno di lenti, e guardando le due proiezioni o d'un corpo geometrico o d'una veduta o d'un ritratto disegnate su di un cartone che si dispone nell'apparecchio, si vede in rilievo una immagine sola, che è quella del corpo geometrico, della veduta o del ritratto.

Prospettiva parallela. — Allorachè i raggi che partono dai singoli punti di un corpo e vanno ad attraversare un quadro di prospettiva, si mantengono paralleli, in allora la prospettiva risultante prende il nome di prospettiva parallela.

Il vantaggio di questa prospettiva è per mantenere il parallelismo in quelle rette che sono parallele nel corpo, mentre che nell'altra prospettiva si mantengono parallele nella prospettiva solo quelle rette che sono parallele al piano di prospettiva. L'esecuzione di una prospettiva parallela ha luogo in modo molto analogo a quello indicato per la prospettiva non parallela. Basta cioè il determinare sul quadro la direzione dei raggi di luce e quelli di distanza, perchè coll'intersezione delle rette condotte parallelamente alla direzione dei raggi di luce dai singoli punti di proiezione colle rette condotte parallelamente alla linea di distanza dai punti ottenuti con rette parallele alla linea di terra tirate dai punti di proiezione e di lunghezza eguale all'ordinata dei punti che rappresentano.

Nasce quindi evidente come la prospettiva parallela di rette parallele al piano di prospettiva, sia eguale alla lunghezza reale di dette rette.

Ed allorachè i raggi di luce si supporranno perpendicolari al piano di prospettiva, in allora la prospettiva parallela non è altro che una proiezione verticale.

Proiezione assonometrica. — Chiamasi proiezione assonome-

trica la proiezione fatta sopra un piano che non è nè orizzontale nè verticale.

Da questa definizione vedesi tosto come la proiezione assonometrica non sia altro che una prospettiva parallela a raggi perpendicolari al piano di prospettiva.

Se M N (Fig. 9, Tav. XXXIII) è un piano, se O X, O Y, O Z sono tre rette nello spazio perpendicolari tra loro, le rette O *x*, O *y*, O *z* condotte nel piano dal punto O comune alle rette date ed al piano, ai piedi *a*, *b*, *c* delle perpendicolari abbassate da punti qualunque A, B, C scelti sulle tre rette date ortogonali, sono la proiezione assonometrica delle tre rette date, le rette poi O *a*, O *b*, O *c* sono la proiezione assonometrica delle rette O A, O B, O C.

Ora bene, risulterà chiaro che, conosciuto il rapporto delle lunghezze O A : O *a*, O B : O *b*, O C : O *c*, sarà possibile la proiezione assonometrica di un corpo quando si conoscano le ordinate del corpo relativamente alle tre rette O X, O Y, O Z, poichè sarà determinata la posizione di ciascun punto del corpo.

E poichè tre rette O X, O Y, O Z ortogonali possono, mantenendo fermo il loro punto d'incontro od origine O nel piano, occupare infinite posizioni, così ne segue che volendo tracciare una proiezione assonometrica, occorre anzitutto fissare nel piano del disegno tre rette, che sieno la proiezione assonometrica delle tre rette od assi O X, O Y, O Z, ed inoltre su tali rette O *x*, O *y*, O *z*, fissare tre punti *a*, *b*, *c* che corrispondano alla proiezione di tre lunghezze eguali misurate sugli assi O X, O Y, O Z a partire dalla loro origine O.

Per ogni posizione che abbiano i tre assi O X, O Y, O Z, prendendo su di essi una distanza qualunque O A = O B = O C, la proiezione dei tre punti A, B, C, cioè *a*, *b*, *c* uniti col punto O, dando per risultato la retta di posizione determinata, ne segue che i tre assi O X, O Y, O Z non possono occupare due posizioni differenti e proiettarsi secondo rette O *x*, O *y*, O *z* egualmente disposte fra di loro, epperciò risulta come la posizione dei tre assi O X, O Y, O Z sia perfettamente determinata dal rapporto delle lunghezze proiettate da una lunghezza eguale misurata sugli assi a partire dalla loro origine.

La proiezione quindi dei tre assi al piano essendo determinata da tre numeri, che esprimono il rapporto delle proiezioni tra loro

di una lunghezza eguale misurata sugli assi a partire dalla loro origine, per tracciare una proiezione assonometrica occorre perciò dapprima lo stabilire tre numeri che valgano alla determinazione dei tre assi, ed in base a questi tre numeri tracciare sul disegno tre rette, sulle quali poi portando tre lunghezze nel rapporto dei tre numeri, stabilire così l'unità di misura corrispondente a ciascun asse.

Allorchè due dei tre numeri sono eguali, la proiezione chiamasi monodimetrica, quando sono tutti e tre eguali i numeri chiamasi isometrica, ed infine chiamasi assonometrica quando i tre numeri sono tutti diseguali.

Il problema quindi del disegno assonometrico è quello di conoscere entro quali limiti debbono essere scelti i tre numeri, e dati questi, tracciare sul foglio del disegno la proiezione dei tre assi. Ora bene, se si immagina prolungato il piano determinato dei due assi O X ed O Y sino all'incontro del piano M N, si vedrà tosto che l'intersezione ha luogo secondo una retta $x' y'$ perpendicolare alla proiezione dell'asse O Z, e si vedrà del pari che la posizione delle due proiezioni $O x$, $O y$ dipenda dalla conoscenza della lunghezza delle due perpendicolari P Q e P' Q', tirate dai due punti P e P' alla retta $x' y'$, e ad una distanza O P $=$ O P'. La lunghezza di queste perpendicolari P Q e P' Q' si ottiene dalle formole seguenti:

$$P Q = P O \times \frac{P' Q'}{P' O} \times \frac{S - m^2}{S - n^2}$$

$$P' Q' = P' O \sqrt{\frac{(S - p^2)(S - n^2)}{S (S - m^2)}}$$

nelle quali $S = \frac{m^2 + n^2 + p^2}{2}$, ed m, n e p sono i tre numeri.

Queste formole si dimostreranno nell'appendice del libro seguente, essendochè per la loro derivazione è necessaria la conoscenza dei teoremi che appunto nel citato libro si svolgeranno. E sarà poi facile altresì il vedere come, perchè sia possibile collocare tre assi nello spazio, in modo che l'unità di misura portata sovra ciascuno di essi sia proiettata sopra il piano del disegno, in modo che le lunghezze delle sue tre proiezioni stieno tra loro come tre numeri

qualunque, è necessario che il quadrato di un numero sia minore della somma dei quadrati degli altri due e maggiore della differenza dei medesimi quadrati.

Onde concretizzare l'esposto, suppongasi che si abbia a fare la proiezione assonometrica nel rapporto 3 : 1 : 3 di tre punti A, B, C, di cui si conoscono le ordinate, sapendo essere quelle di A, + 5, + 6, + 9, quelle di B, 0, + 9, — 11, quelle di C, — 7, — 9, + 12.

Tracciate due rette (Fig. 10) S R e Z Z' perpendicolari tra loro, si porti una distanza O P = O P' = 1; condotte per P e P' due perpendicolari ad S R, si faccia P Q = 0,0556 e P' Q' = 0,9459, e per il punto O si conducano le rette O Q ed O Q', che le tre rette X X', Y Y', Z Z' saranno la proiezione assonometrica dei tre assi. Ciò posto, per fissare la proiezione assonometrica di A, basterà portare una lunghezza O *a* = 5, indi pel punto *a* tirare una parallela all'asse delle Y, che sia *a a'* la terza parte di 6, ed infine pel punto *a'* tirare una parallela all'asse delle Z che sia *a'* A = 9. Analogamente, pel punto B essendo O l'ordinata per l'asse delle X, basterà fare O *b* = 3 e pel punto *b* tirare una parallela all'asse delle Z, che sia *b* B = 11, essendo questa negativa. Il punto C sarà fissato facendo O *c* = 7, *c c'* parallelo all'asse delle Y ed eguale a 3, ed infine *c'* C parallelo all'asse delle Z ed eguale a 12. Insomma, non si avranno nel portare le quote che ad osservare di portare quelle negative sul prolungamento dei rispettivi assi, e di ridurre le distanze che si debbono portare a seconda del rapporto delle proiezioni, come si è visto per questo caso concreto, in cui il rapporto era 3 : 1 : 3, cioè una proiezione monodimetrica, si sono portate le distanze sull'asse delle Y un terzo di quello che si sarebbero portate quando avessero appartenuto agli altri due assi. Ed appunto per maggiore comodità nel portare le distanze, si usano tracciare sul disegno tre scale, cioè la scala corrispondente a ciascun asse, sicchè dovendo portare una distanza su di un dato asse, non occorre che prenderla col compasso sulla scala di quell'asse e portarla, che così è eliminata ogni fatica di riduzione e di proporzione. Naturalmente che una sola scala è sufficiente per i disegni isometrici, come due scale sono sufficienti per le proiezioni monodimetriche.

Queste poche parole sulla proiezione assonometrica sono sufficienti, perchè chiunque possa accingersi alla proiezione assonometrica di un corpo qualunque, poichè chi sa fissare la posizione di

un punto, ne sa fissare la posizione di tutti quelli che caratterizzano un corpo, e che non vogliono altro che essere convenientemente raccordati, perchè abbia a risultare il desiderato effetto.

La proiezione assonometrica avendo il vantaggio su di tutte le altre proiezioni, di procurare assieme ad una sensazione naturale dei corpi rappresentati, l'esattezza, e quindi la via perchè sia reperibile ogni misura su di essa, come d'altronde è facile lo accorgersene, che per le dimensioni principali dei corpi rappresentati, parallele agli assi, si hanno direttamente su di essi quando sieno stati assunti detti assi, paralleli alla loro altezza, lunghezza e larghezza; e come per le altre dimensioni sia facile l'ottenerle col mezzo di una semplicissima costruzione geometrica.

Appunto perchè chi si dispone allo studio della geometria solida ha bisogno di rappresentare i solidi di cui si occupa, in modo che oltre all'effetto di verità che deve provare coll'osservazione, possa tracciare su di essi tutte quelle rette che sono del caso e che valgono allo studio delle proprietà di cui si occupa, così è motivo perchè in questa appendice si sia dato il sufficiente per essere nel caso di tracciare una proiezione assonometrica di un corpo; rimandando il lettore all'appendice del libro seguente, in cui è maggiormente svolto questo importante sistema di proiezioni, che data dal 1820 pel prof. inglese Farish William, e che giunse e venne propagato in Italia per opera dell'Ill. Prof. Q. Sella, autore di un ricercatissimo ed eruditissimo opuscolo col titolo: *Sui principj geometrici del disegno e specialmente dell' assonometrico*, 1856.

Oltre al detto opuscolo del Sig. Comm. Sella, un'opera di sommo pregio, e d'incontestabile aiuto a chi intende addentrarsi nello studio dell' assonometria, è quella stata pubblicata coi tipi della Tipografia Letteraria in Torino nel 1861, per cura e diligenza del noto Esimio e Chiariss. Prof. Ing. Cav. A. Cavallero, ed intitolato: *Corso teorico pratico ed elementare di disegno assonometrico applicato specialmente alle macchine.*

LIBRO QUINTO

SUI POLIEDRI A FACCIE PIANE.

Poliedri in generale. — Nel libro precedente si sono considerati più piani disposti nello spazio o parallelamente tra di loro, o in guisa che si intersecassero in un punto medesimo, originando per tal modo l'angolo solido poliedro. Argomento di questo libro è la considerazione del risultamento di piani disposti nello spazio in posizione diversa dalle due sopraccennate. E poichè il risultamento di piani cosiffattamente disposti è generalmente uno spazio racchiuso da detti piani, ossia il corpo la cui superficie totale è composta di superficie piane che si addimandano faccie, cioè i poliedri a faccie piane, come già si disse sin nei preliminari di questo trattato, pag. 6, così appunto lo studio delle proprietà geometriche e della misura geometrica dei poliedri è il soggetto di questo libro.

Analisi dei poliedri. — Assunto il concetto di ciò che è un poliedro, nasce immediatamente il bisogno di conoscere entro quali limiti sia possibile l'esistenza di esso, e quali sieno gli elementi che concorrono alla sua essenza.

Già si è visto come due piani comunquemente collocati fra di loro, non giungono a chiudere uno spazio, cioè come lo spazio compreso fra due piani, o meglio se vuolsi nell'angolo diedro, fosse infinito. Del pari si è pur visto come, qualunque sia la posizione che si dia ad un piano rispetto ad altri due che formino fra loro un angolo diedro tanto nel caso che sia parallelo ad uno di essi, quanto parallelo alla loro intersezione, quanto ancora disposto in modo da originare l'angolo triedro, che sempre lo spazio compreso fra tre piani è uno spazio infinito. Resta quindi a vedere

se con quattro piani sia possibile l'esistenza di un poliedro. Osservando che se si ha un angolo solido triedro D (Fig. 1, Tav. XXXIV) formato da tre piani A D C, A D B, B D C, ove se ne conduca un quarto A B C in guisa che tagli i tre spigoli D A, D B, D C, risulta il corpo o poliedro A B C D, cioè uno spazio limitato racchiuso da quattro piani, si viene immediatamente alla conclusione: che *un poliedro non può essere determinato con meno di quattro piani.*

Facendosi ad analizzare il poliedro a faccie piane A B C D, si vede tosto che alla sua essenza concorrono: 1.° i quattro piani o faccie piane del poliedro, le quali si incontrano a due a due secondo gli spigoli D A, D B, D C, A B, A C, B C, ed a tre a tre negli angoli solidi triedri A, B, C, D; 2.° gli angoli diedri D A, D B, D C, A B, A C e B C; 3.° gli angoli piani A D B, A D C, B D C, D A B, D A C, B A C, A B D, A B C, D B C, D C B, D C A e A C B.

In qualunque poliedro, come ad esempio quello rappresentato alla Fig. 2, e composto di quarantotto faccie, riscontrandosi oltre alle faccie, pure gli spigoli, come O B, O D, O E ecc. ecc., gli angoli solidi poliedri come O, D, B ecc. ecc., gli angoli diedri come A C, A D, O D ecc. ecc., e gli angoli piani come D O B, O D B, D B O. A D B ecc. ecc., si viene all'altra conclusione, che *alla costituzione di un poliedro qualunque concorrono le faccie, gli spigoli, gli angoli solidi poliedri, gli angoli solidi diedri e gli angoli piani.*

Specie di poliedri. — Dal numero, dalla natura e dalla disposizione dei singoli elementi che si riscontrano in un poliedro, hanno luogo denominazioni speciali che valgono a caratterizzarne il suo essere, così:

I. Secondochè un poliedro ha gli angoli solidi poliedri sporgenti oppure rientranti, appellasi *poliedro convesso* o *non convesso.* Ogni poliedro non convesso potendo scomporsi, o per dire meglio, venire considerato siccome l'assieme di più poliedri convessi, lo studio della proprietà e della misura dei poliedri non è che per i convessi.

II. Secondo è il numero delle faccie che si contano in un poliedro, esso ha denominazione particolare colla desinenza in *edro.* Il poliedro di quattro faccie appellasi *tetraedro*, quello di cinque *pentaedro*, quello di sei *esaedro*, quello di sette *ettaedro*, quello di otto *ottaedro*, quello di dieci *decaedro*, quello di dodici *dodecaedro*, quello di venti *icosaedro,* quello di ventiquattro *icositetraedro,* quello di quarantotto *esacisottaedro,* e così di seguito.

III. Secondochè tutte le faccie di un poliedro sono poligoni regolari eguali, od irregolari eguali o diseguali, il poliedro chiamasi *poliedro regolare*, oppure *poliedro irregolare*. Gli angoli solidi del poliedro regolare essendo formati da angoli piani appartenenti a poligoni regolari, ne risulta che essi non possono essere che o triedri, o tetraedri, o pentaedri, quando le faccie sieno il più semplice dei poligoni regolari cioè il triangolo equilatero, che non possono essere che triedri quando le faccie sieno quadrati o pentagoni regolari, e ciò per quanto si disse nella teoria del libro antecedente trattando dell'angolo solido, essere cioè la somma degli angoli piani che compongono un angolo solido, minore di quattro angoli retti.

Essendo così limitato il numero degli angoli solidi poliedri dei poliedri regolari, è pure ad esso, cioè a soli cinque, limitato il numero dei poliedri regolari, e sono: 1.° Il *tetraedro regolare*, le cui faccie sono triangoli equilateri e gli angoli solidi sono triedri, rappresentato in proiezione assonometrica nel rapporto 3 : 1 : 3 alla Fig. 3, nella quale A B D, A D C, A C B e D C B sono le faccie ed A, B, C e D gli angoli triedri. 2.° L'*ottaedro regolare*, le cui faccie sono pure triangoli equilateri e gli angoli solidi sono tetraedri, rappresentato pure in assonometria alla Fig. 4, nella quale A B D, A B E, B C D, B C E, C F D, C F E, F A D, F A E sono le faccie ed A, B, C, D, E, F gli angoli solidi tetraedri. 3.° L'*icosaedro regolare*, le cui faccie sono pure ancora triangoli equilateri e gli angoli solidi sono pentaedri, rappresentato alla Fig. 5, nella quale A E D, A E H, A D B, A H C, E D G, E F H, F E G, C B Q, Q P I, Q P L, P I G, P L F, F P G, A B C, D I B, D I G, H L C, H L F, Q C L e Q B I sono le faccie e A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, P e Q sono gli angoli solidi pentaedri. 4.° L'*esaedro regolare*, volgarmente detto cubo, le cui faccie sono quadrati e gli angoli solidi sono triedri, rappresentato alla Fig. 6, nella quale A B C D, B G E C, C E F D, G H E F, A H F D e A H G B sono le faccie e A, B, C, D, E, F, G e H gli angoli solidi triedri di un cubo. 5.° Il *dodecaedro regolare*, le cui faccie sono pentagoni regolari e gli angoli solidi sono triedri, rappresentato alla Fig. 7, nella quale le dodici faccie A B P L F, A F I O E, A B C D E, I F L H G, L H N Q P, O V X D E, P Q Y C B, G I O V T, G T S N H, X R S T V, Y R S N Q e X R Y C D sono pentagoni regolari, ed i venti angoli solidi A, B, C, D, E, F, G, H, I, L, N, O, P, Q, R, S, T, V, X, Y sono triedri.

Mentrechè cinque soli sono i poliedri che possono dirsi regolari, infinito è il numero dei poliedri irregolari.

IV. Secondochè sono fra di loro disposte le faccie piane di un poliedro a faccie piane, esso prende ancora denominazione speciale, così:

1.° Allorchè un poliedro ha due faccie piane opposte che sono eguali e parallele, e le rimanenti faccie piane conseguentemente tanti parallelogrammi quanti sono i lati di cui si compone ciascuna delle due sopradette faccie, chiamasi *prisma*. Le due faccie eguali e parallele si chiamano le ***basi del prisma***, l'assieme delle altre faccie chiamasi la ***superficie laterale o convessa del prisma***, le rette eguali che scompongono la superficie laterale si chiamano i ***lati del prisma***.

Dei prisma però ve ne sono di due specie: di quelli che per avere i diversi lati perpendicolari ai piani delle basi si chiamano ***prisma retti***, e di quelli che per avere i lati obliqui ai piani delle basi si chiamano ***prisma obliqui***.

La Fig. 8 rappresenta un prisma retto; la Fig. 9 rappresenta un prisma obliquo.

Nel prisma retto essendo i diversi lati A A', B B', C C', D D', E E' perpendicolari alle basi parallele A B C D E, A' B' C' D' E', ne segue che essi sono eguali tra loro, ed ognuno di essi lati misura la distanza fra le due basi del prisma, misurano ciò che si chiama l'***altezza del prisma***, che altro non è che una retta come P Q pella Fig. 8, C' H pella Fig. 9, abbassata la prima da un punto qualunque Q, la seconda da un punto qualunque C' della base superiore perpendicolarmente alla base inferiore. Di più, essendo le due basi del prisma due poligoni eguali tra loro, ne segue che il centro di figura di ciascuno di essi è eguale in entrambi, e quindi la retta che unisce questi due punti, cioè i centri di figura delle due basi del prisma e che si chiama ***asse del prisma***, è eguale al lato del prisma, e nel prisma retto è eguale pure all'altezza. Osservando ancora come nel prisma retto i lati, come A A', B B', sono perpendicolari alle due basi, epperciò ad ogni retta passante per il loro piede nel piano, risulta tosto essere le diverse faccie A B B' A', B C C' B', C D D' C', D E E' D', E A A' E' tanti parallelogrammi rettangoli, mentrechè nel prisma obliquo, e come d'altronde è agevole scorgerlo nella Fig. 9, le faccie A B B' A', B C C' B', C D D' C',

D E E' D', E F F' E', F A A' F' sono tanti parallelogrammi romboidi. Nel prisma obliquo essendo i diversi lati A A', B B', C C', D D', E E', F F' paralleli tra loro e compresi fra le due basi A B C D E F, A' B' C' D' E' F', che sono fra loro parallele, essi sono eguali, ed eguali pure all' asse P Q, ma non all'altezza C' H del prisma.

Un prisma qualunque essendo determinato dalla figura di base e dalla lunghezza e direzione di uno spigolo laterale qualunque, poichè così determinati tutti gli altri spigoli, quelli laterali essendo eguali, paralleli tra loro e passanti pei vertici della base, quelli della base superiore essendo l' unione consecutiva degli estremi degli spigoli laterali, ne segue: che se la figura di base e il lato sono sufficienti perchè un prisma retto sia determinato, per un prisma obliquo, oltre alla figura di base ed al lato, occorre la conoscenza del piede della perpendicolare abbassata da un vertice e della base superiore sulla base inferiore, od in altre parole, occorre oltre alla figura di base, e l'altezza oppure il lato, la proiezione di uno qualunque dei lati, proiezione che nel prisma retto è zero. Ove però si osservi che tutti gli angoli solidi del prisma sono triedri e tali che una faccia è costantemente la base del prisma, e le altre due faccie determinano nella loro intersezione la posizione di uno spigolo laterale, e quindi quella di tutti gli altri che sono ad esso paralleli, si vedrà perciò come *un prisma è determinato colla conoscenza delle faccie che formano un angolo solido qualsiasi.*

Un prisma dicesi regolare quando essendo retto, la figura delle basi è un poligono regolare. Il prisma rappresentato alla Fig. 8 essendo retto e le basi essendo due poligoni regolari, è un prisma regolare. Le faccie del prisma retto essendo, come si disse, tanti parallelogrammi rettangoli, le faccie del prisma regolare sono tanti parallelogrammi rettangoli eguali, poichè le basi essendo poligoni regolari, i lati di questi poligoni sono tutti eguali tra loro, cioè A B = A' B' = B C = B' C' = C D = C' D' = D E = D' E' = E A = E' A', e quindi le faccie A B B' A', B C C' B' ecc. ecc. eguali tra loro. Ora, un prisma retto qualunque essendo determinato colla conoscenza della figura di base e del lato, un prisma regolare è determinato colla conoscenza del numero di lati di base, della lunghezza del lato di base e del lato del prisma, e ciò perchè la co-

noscenza del lato di un dato poligono regolare è sufficiente perchè sia determinato.

I prisma tanto regolari che irregolari, tanto retti quanto obliqui, ricevono ancora particolare denominazione, secondo è la figura delle loro basi; così se le basi sono triangoli, il *prisma* dicesi *triangolare*, se quadrilateri *prisma quadrangolare*, se pentagoni *prisma pentagonale*, e così di seguito. Il prisma quindi rappresentato alla Fig. 8 è un prisma pentagonale regolare, e quello rappresentato alla Fig. 9 è un prisma esagonale obliquo.

Allorquando però le basi di un prisma sono due parallelogrammi, il prisma prende il nome di *parallelepipedo*. Il prisma rappresentato alla Fig. 10 avendo per basi due parallelogrammi, come A B C D, E F G H, è un parallelepipedo.

Il prisma pure rappresentato alla Fig. 11 avendo per basi due parallelogrammi, come A B C D, A' B' C' D', è un parallepipedo. Solo che, secondochè gli spigoli laterali del parallelepipedo sono o no perpendicolari alle basi, esso dicesi *parallelepipedo retto*, oppure *parallelepipedo obliquo*, in quel modo stesso che si disse dei prisma.

Il parallelepipedo retto assume la denominazione di *parallelepipedo rettangolo*, allorquando le sue basi sono due rettangoli; tale è il parallelepipedo rappresentato alla Fig. 10. Il parallelepipedo obliquo assume la denominazione di *romboedro* allorchè tutte le sue faccie sono rombi, e tale è il parallelepipedo rappresentato alla Fig. 12, in cui A F H B, A F E D, A H G D, F B C E, E C G D, H B C G sono sei rombi eguali e ad un tempo le faccie del romboedro.

Per poca analisi che si faccia ad un parallelepipedo, è facile il vedere come egli sia un poliedro terminato da sei faccie piane, cioè un esaedro, le cui faccie sono parallelogrammi ed a due a due opposte, eguali e parallele. Infatti, essendo esso un prisma, le due faccie A B C D ed E F G H (Fig. 10) sono di già eguali e parallele, ed essendo D C parallelo ad A B e D H parallelo ad A E, sono parallele pure le faccie che comprendono queste due rette, come parallele sono le due faccie B C F G, A D E H che comprendono ciascuna due rette, la prima B C, B F e la seconda D A, A E rispettivamente parallele.

Le faccie opposte del parallelepipedo essendo parallele, due qualunque di esse si possono considerare come basi.

Nel parallelepipedo rettangolo le sei faccie essendo sei parallelogrammi rettangoli, il cubo (Fig. 6) è un parallelepipedo rettangolo, inquantochè terminato da sei faccie che sono sei quadrati due a due opposti, eguali e paralleli.

Il parallelepipedo retto essendo un prisma retto, così la figura di base ed il lato sono pure sufficienti per la sua determinazione. Ma siccome la figura di base è o un parallelogramma romboide o un parallelogramma rettangolo, la figura di base è determinata con tre elementi pel primo caso, e con due elementi nel secondo, sicchè si può conchiudere: 1.° Che *il parallelepipedo retto è determinato colla conoscenza di quattro elementi, che sono ad esempio la diagonale di una faccia e la lunghezza di tre spigoli, niuno dei quali però sia parallelo a ciascuno degli altri due.* 2.° Che *il parallelepipedo rettangolo è determinato colla conoscenza di tre elementi che sono la lunghezza dei tre spigoli diversi che in esso si riscontrano.* E poichè nel cubo i tre spigoli che si riscontrano sono eguali tra loro, così *il cubo è determinato colla conoscenza di un solo elemento, cioè la lunghezza di uno qualunque dei suoi spigoli.*

Il parallelepipedo obliquo essendo un prisma obliquo, così la figura di base, il lato o l'altezza e la proiezione di un lato sono pure sufficienti per la sua determinazione. La natura però della figura di base fa sì che il parallelepipedo obliquo a base rettangola è determinato colla lunghezza dei tre spigoli diversi che vi si riscontrano e colla proiezione di uno di detti spigoli fatta sulla faccia determinata dagli altri due spigoli, mentrechè al parallelepipedo obliquo a base romboida occorre un elemento di più, cioè ad esempio la diagonale della faccia sulla quale si eseguì la proiezione.

In generale le faccie del parallelepipedo obliquangolo essendo tutte parallelogramma romboidi, ne avviene che ciascuna di esse per essere determinata ha bisogno della conoscenza dei lati e di una diagonale. Ora i lati dei parallelogramma che determinano il parallelepipedo sono i tre spigoli del medesimo, quindi detti tre spigoli e tre diagonali, cioè una diagonale per ogni diversa faccia che si incontra nel parallelepipedo, sono sufficienti per la sua determinazione.

Egli è poi cosa assai facile il darsi ragione come un parallelepipedo qualsiasi sia determinato colla conoscenza di sei elementi,

perchè supposto un parallelogramma per base, il quale di già occupa tre elementi, è visibile ben tosto come la conoscenza di tre rette, ad esempio A' D, A' A, A' B (Fig. 11), che si vengono a congiungere in un solo punto A' e che abbiano gli altri estremi collocati in tre vertici D, A, B del parallelogramma A B C D, che una sola e fissa è la posizione di tali rette, essendo un punto nello spazio determinato colla conoscenza di tre lunghezze correnti da esso a tre punti dati sul piano, vale a dire corrente da esso agli elementi indispensabili per la determinazione del piano. Onde in un parallelepipedo, determinata la base A B C D ed uno spigolo A A, essendo l' altra base A' B' C' D' parallela a quella data e gli altri spigoli paralleli e quello dato, il parallelepipedo è perfettamente determinato.

Poichè in virtù del teorema stato dimostrato a pag. 220, è possibile il computo di una diagonale di un parallelogramma colla conoscenza dell'altra diagonale e dei lati, e poichè non solo nel parallelepipedo le faccie laterali sono parallelogrammi, ma sono ancora tali nel prisma in generale, così è dato di conchiudere come: ***un prisma qualunque è determinato colla conoscenza della figura di base, di uno spigolo laterale e di due diagonali in due faccie laterali adiacenti.***

2.° Allorchè un poliedro ha delle faccie triangolari che concorrono coi loro vertici in un medesimo punto e che le basi di questi triangoli formano il perimetro della faccia che chiude il poliedro, esso chiamasi ***piramide.*** La faccia determinata nel perimetro dalle basi delle faccie triangolari chiamasi la ***base della piramide;*** il punto di concorso delle faccie triangolari chiamasi il ***vertice della piramide,*** e l'assieme delle faccie triangolari chiamasi la ***superficie convessa o laterale della piramide.*** Di piramidi ve ne sono di due specie, cioè di quelle in cui la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base cade nel centro di figura, e che si chiamano ***piramidi rette,*** e di quelle in cui la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base cade fuori del centro di figura, e che si chiamano ***piramidi oblique.*** La Fig. 13 della Tavola XXXV rappresenta una piramide retta, nella quale A B C D è la base, V è il vertice, ed in cui la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base cade nel centro O di figura della base, e nella lunghezza V O è misurata la distanza fra il vertice e la base, cioè l' altezza della piramide. La Fig. 14 rappresenta una piramide obliqua, obliqua poichè la per-

pendicolare abbassata dal vertice V sulla base A B C D E F cade fuori del centro di figura O, cioè cade in H, rappresentando in V H l'altezza di quella piramide, e nella retta V O che unisce il vertice col centro di figura della base, l'asse della piramide. L'asse quindi nella piramide retta si confonde coll'altezza.

Data la figura di base di una piramide retta e la sua altezza, essa è determinata, ma per la piramide obliqua, oltre alla figura di base ed all'altezza, occorre la conoscenza del piede dell'altezza.

Una piramide dicesi regolare, quando essendo retta, la figura di base è un poligono regolare. La piramide rappresentata alla Fig. 13 essendo retta ed avendo per base un poligono regolare, essa è una piramide regolare. Ed il centro di figura di un poligono regolare essendo il centro della circonferenza iscritta o circoscritta al medesimo, così ne risulta che i diversi vertici della base A, B, C, D sono egualmente distanti dal piede dell'altezza, e quindi sono eguali gli spigoli V A, V B, V C, V D, potendosi essi considerare come oblique egualmente distanti dalla perpendicolare condotta dal medesimo punto V, e quindi ancora eguali le faccie diverse della piramide, cioè A B V, B C V, A D V, D C V, per essere A B = B C = C D = D A siccome lati dello stesso poligono regolare. Si può quindi dire che *nella piramide regolare le faccie laterali sono tutte eguali tra loro.*

E poichè la lunghezza del lato di un dato poligono regolare è sufficiente perchè egli sia determinato, così la lunghezza del lato di un dato poligono regolare e l' altezza della piramide regolare sono sufficienti perchè questa sia determinata, come parimenti determinata sarebbe quando alla conoscenza dell'altezza fosse sostituita la conoscenza di uno spigolo, oppure la conoscenza dell'*apotema della piramide,* ch'è quella retta che esprime l' altezza comune delle diverse faccie, come V E.

La piramide, sia dessa regolare od irregolare, retta od obliqua, assume una denominazione speciale a seconda della sua figura di base. Così se la base di una piramide è un triangolo, si dirà *piramide triangolare,* se è un quadrilatero *piramide quadrangolare,* se è un pentagono *piramide pentagonale,* e così di seguito. La piramide rappresentata alla Fig. 13 è una piramide quadrangolare, quella rappresentata alla Fig. 14 è una piramide esagonale.

Una piramide essendo determinata dalla sua base e dalla posi-

zione del vertice, poichè tutti gli spigoli laterali non sono altro che rette partenti dal vertice e correnti ai vertici della base; e la posizione di un punto collocato fuori di un piano essendo determinata colla conoscenza di tre lunghezze che da esso corrono a tre punti del piano, oppure colla conoscenza dei due triangoli determinati col piano da dette tre rette, così è dato conchiudere che *una piramide qualunque è determinata colla conoscenza della figura di base e della lunghezza di tre spigoli laterali*, o ciò che torna lo stesso, *una piramide qualunque è determinata colla conoscenza delle tre faccie che concorrono in un angolo solido triedro alla base.*

La piramide triangolare avendo per base un triangolo, è la sola piramide che ogni qualunque delle sue faccie possa essere presa per base. E poichè il triangolo è determinato colla conoscenza di tre dei suoi elementi, la piramide triangolare è determinata colla conoscenza di sei elementi, dei quali, tre possono essere gli spigoli di base, e gli altri tre, gli altri tre spigoli della piramide, ovvero essere il quarto ed il quinto due altri lati qualunque della piramide, e il sesto la proiezione di uno di quest'ultimi due lati sulla base, proiezione che nella piramide triangolare retta risulta nella retta che unisce il centro di figura della base col rispettivo vertice, nel qual caso il numero degli elementi riducesi a quattro. Una piramide triangolare può però essere retta secondo una base ed obliqua secondo un'altra, ma la piramide triangolare retta, le cui faccie sono tutte eguali tra loro, è però tale che ogni qualunque sua faccia presa per base, essa è costantemente retta. La piramide poi triangolare e regolare, cioè quella che essendo retta la sua base è un triangolo equilatero, è tale che è determinata colla conoscenza di soli due elementi, cioè il lato di base ed il lato della piramide, o la sua altezza; e per la piramide triangolare regolare le cui faccie sono tutte eguali tra loro, è sufficiente un solo elemento, cioè il lato; ed in essa le diverse altezze che si ottengono sono tutte uguali tra loro, ed i vertici di questa piramide si possono considerare come quattro punti collocati nello spazio ad eguale distanza fra di loro, e poichè osservando ancora che quest' ultima piramide ha quattro faccie eguali che sono triangoli equilateri, si conchiude essere dessa un tetraedro regolare, epperciò è dato di dire che *il tetraedro regolare è determinato colla conoscenza di un solo elemento, cioè il lato.*

Esaminando l'ottaedro regolare rappresentato alla Fig. 15, si ha per risultato essere egli null'altro che l'accozzamento di due piramidi regolari quadrangolari eguali, fatta in guisa che di comune hanno la base A B C D e l'una il vertice in F e l'altra in E, la prima per altezza F O, la seconda per altezza E O, ciascuna cioè la metà della retta F E, ossia la metà di quella retta che unisce i vertici di due angoli solidi F ed E non adiacenti ad una stessa faccia, e che chiamasi *diagonale di un poliedro.* Ma poichè la retta F E è la diagonale del quadrato B F D E, ossia di un quadrato il cui lato è il lato dell'ottaedro, detta retta o diagonale F E è eguale al lato dell'ottaedro moltiplicato per la radice quadrata del numero due. L'altezza quindi di ciascuna delle due piramidi essendo $\frac{1}{2}$ A B $\sqrt{2}$, ne risulta che ciascuna delle due piramidi è perfettamente determinata colla conoscenza del lato dell' ottaedro, e conseguentemente anche l'*ottaedro regolare è determinato in funzione del solo suo lato,* essendo come si disse, detto poliedro, null'altro che l' assieme di due piramidi quadrangolari eguali.

In quanto all'esaedro regolare o cubo, già si è visto come il suo lato lo determini; in quanto poi all' icosaedro regolare ed al dodecaedro regolare, sarà facile il convincersi come parimenti essi sieno determinati colla conoscenza del solo loro lato, osservando non essere possibile una disposizione diversa di venti triangoli equilateri, eguali, e di dodici pentagoni regolari eguali, oppure bastando semplicemente considerarli siccome l'accozzamento nel primo di venti piramidi triangolari regolari eguali, nel secondo di dodici piramidi pentagonali regolari eguali, le quali abbiano comune il vertice e nel centro del poliedro. La base di ognuna di dette piramidi essendo determinata colla conoscenza della lunghezza del lato del rispettivo poliedro, l'altezza di ciascuna di esse è desumibile dalla semplicissima considerazione che in ognuno dei due poliedri in questione esistono faccie parallele, la distanza delle quali è la somma delle altezze di due delle piramidi eguali opposte, distanza poi che è ottenibile coll'immaginare una conveniente sezione perpendicolare ad una faccia qualunque, e con determinare il poligono di sezione.

Eguaglianza poliedrica. — Col vocabolo poliedro a faccie piane, intendendosi un corpo la cui superficie è terminata da delle faccie piane, e gli elementi che costituiscono il poliedro essendo

le faccie, gli spigoli, gli angoli solidi poliedri, gli angoli diedri e gli angoli piani, *due poliedri sono eguali se hanno nel numero, nella qualità e nella disposizione, eguali tutti i cinque elementi costitutivi* suddetti.

Due poliedri regolari saranno eguali, se eguali hanno un elemento, il lato ad esempio, poichè si è visto essere questo sufficiente perchè essi sieno determinati.

In generale tanti sono gli elementi necessari per determinare un dato poliedro, altrettanti sono gli elementi che avendo eguali due poliedri, stabilisce la loro eguaglianza. Infatti, due prisma sono eguali, se eguali hanno la base, eguale il lato e eguale l' inclinazione del lato sulla base. I due prisma retti A B C D E F, A' B' C' D' E' F' sono eguali tra loro per avere la base A B C = A' B' C' ed il lato A D = A' D'; poichè immaginandone la sovrapposizione, risulterà tosto che la base A' B' C' verrà a coincidere sulla base eguale A B C, ed essendo amendue i prisma, retti, gli spigoli A' D', C' E', B' F' verranno a coincidere cogli spigoli A D, C E, B F, ed essendo lo spigolo A' D' = A D, il vertice D' si confonderà col vertice D, e poichè le basi dei due prismi sono parallele fra loro, così la faccia D' E' F' disponendosi parallelamente alla faccia A B C e contenendo il punto D, essa coinciderà colla base D E F, ed i due prisma coincidendo in tutte le loro parti, sono eguali.

Può succedere però che nel dimostrare l'eguaglianza di due poliedri in base dei suoi elementi necessari, non sia possibile la sovrapposizione, cioè possano essere offerti due poliedri ad esempio di ventiquattro faccie, due icositetraedri (Fig. 17), eguali tra loro, ma disposti simmetricamente, in modo cioè che le rette che congiungono i vertici corrispondenti sieno divise per metà da un piano M N, che dicesi piano di simmetria.

In questo caso conviene immaginare uno dei poliedri compiere un giro di 180° attorno al piano di simmetria, ed in allora riescirà facile lo scorgere come la faccia C' verrà a coincidere con quella C, quella A' con quella A, quella B' con quella B, quella D' con quella D, quella E' con quella E, quella F' con quella F, e così di tutte le altre faccie.

Se per un poliedro regolare, per un prisma e per una piramide, è conosciuto il numero degli elementi necessari, perchè sia deternato e perchè essendo i detti eguali in due di essi, sia stabilita la

loro eguaglianza; per un poliedro irregolare qualunque, per un poliedro nel vero senso della parola, cioè non di un prisma, non di una piramide, ma di un corpo terminato da faccie diseguali tra loro e tra loro comunquemente disposte, è bensì maggiore il numero degli elementi, ma tuttavia esso è inferiore alla conoscenza del numero, della qualità e della disposizione dei cinque elementi costitutivi, imperocchè ogni poliedro potendo venire considerato siccome una riunione di altri poliedri, dei quali sia conosciuto il numero e la qualità degli elementi necessari alla loro determinazione, ne consegue che tanti saranno gli elementi comuni, di altrettante unità deve venire diminuito il numero degli elementi necessari alla determinazione di un poliedro qualunque, e ciò in quella guisa stessa che fu visto nella geometria piana pella determinazione di un poligono qualunque.

Due poliedri che sieno eguali, eguali hanno ancora tutte quelle rette che uniscono due a due i vertici omologhi adiacenti, e non adiacenti ad una medesima faccia, eguali cioè le diagonali delle faccie e le diagonali dei poliedri. Medesimamente, due poliedri che sieno eguali forniscono ciascuno coll' intersezione di un piano che passi per tre punti omologhi, una sezione eguale, vale a dire forniscono due poligoni eguali. Che nei poliedri eguali sieno eguali le diagonali omologhe, e le sezioni omologhe, si renderà evidente osservando come tanto le diagonali quanto le sezioni, esse sono determinabili in funzione degli elementi poliedrici conosciuti. Fu detto come la diagonale di un ottaedro regolare sia eguale al prodotto del lato pella radice quadrata del numero due. Ora bene è evidente che due o più ottaedri regolari che hanno eguale il lato, hanno pure eguali le diagonali, essendo queste un prodotto di due fattori, l'uno costante, fisso, l'altro eguale. Fu detto altresì che tre punti determinano un piano, adunque l'intersezione di un poliedro con un piano non può essere diversa a quella di altro poliedro con altro piano che contenga tre punti omologhi. Che dato un poliedro sieno determinate le sue diagonali, che dati tre punti in un poliedro sia determinato la sezione fatta al medesimo con un piano che passi per essi, è ciò che si avrà occasione di vedere trattando delle proprietà dei parallelepipedi, dei prisma, delle piramidi.

Proprietà dei poliedri. — I poliedri potendosi dividere in

due distinte categorie, quella cioè dei prisma e quella delle piramidi, essendo qualsiasi altro poliedro nulla più che un accozzamento di prisma o di piramidi, così le proprietà dei poliedri, che sono il risultato delle relazioni che corrono fra la loro essenza e nuovi elementi in essi introdotti, si riducono a quelle dei prisma e delle piramidi. I prisma poi presentando un caso speciale nel parallelepipedo, così di questo, dèi prisma e delle piramidi si esamineranno le relazioni correnti con piani in differenti posizioni e con altri poliedri, cioè cogli elementi considerabili in geometria solida, e da siffatte relazioni si vedrà risultare dell' esistenza di una specie di poliedri che chiamansi simili.

Proprietà dei parallelepipedi. — Due rette nello spazio che sieno parallele essendo contenibili in un medesimo piano, ne segue che per *ogni due spigoli paralleli di un parallelepipedo è possibile di fare passare un piano.*

Il piano che passerà per due spigoli paralleli adiacenti ad una medesima faccia coinciderà con detta faccia, ed il piano che passerà per due spigoli paralleli non adiacenti alla medesima faccia, cioè per due spigoli opposti, taglierà le due faccie alle quali non appartengono gli spigoli paralleli per cui passa il piano, e scomporrà il parallelepipedo in due solidi. Se ora si prende ad analizzare l' intersezione arrecata da un piano che passi per due spigoli paralleli opposti, colle due faccie alle quali non appartengono i due suddetti spigoli, è dato di vedere come una tale intersezione abbia luogo secondo una diagonale di quelle faccie, è dato di vedere come tali intersezioni essendo rette collocate in piani paralleli, esse sono tra loro parallele, e quindi *la figura di sezione in un parallelepipedo, fatta con un piano passante per due spigoli paralleli opposti, è sempre un parallelogramma, in cui due lati paralleli sono due spigoli paralleli del parallelepipedo, e gli altri due lati paralleli sono due diagonali delle faccie, alle quali non appartengono quegli spigoli, e che uniscono in esse gli estremi dei medesimi.* Così essendo A B C D E F G H (Fig. 18) un parallelepipedo retto, ogni piano passante per due spigoli paralleli opposti, come E B, C D, incontrerà le faccie A B C D, E F G H, che non contengono quegli spigoli, secondo le diagonali G E, D B delle medesime, originando nella sezione un parallelogramma D B E G, i cui due lati D G, B E sono spigoli del parallelepipedo, e gli altri

due lati D B, G E sono diagonali delle faccie A B C D, H E F G che non contengono gli spigoli D G, B E, e che uniscono gli estremi dei detti spigoli nelle suddette faccie. E medesimamente, essendo A B C D E F G H (Fig. 19) un parallelepipedo obliquo, si ha pure che il piano passante pegli spigoli paralleli B E, D G ad esempio, darà nella sezione un parallelogramma D B E G, che come nel parallelepipedo retto, ha per lati paralleli due spigoli paralleli del parallelepipedo, e per altri due lati due diagonali nelle faccie che non comprendono quegli spigoli, ma solo gli estremi dei medesimi, i quali estremi sono i vertici che determinano le sopra dette diagonali.

Ogni piano passante per due spigoli paralleli opposti di un parallelepipedo, tagliando le faccie opposte che non contengono detti spigoli secondo una diagonale di ciascuna di dette faccie, è dato di vedere come in ogni parallelogramma essendo possibile di tracciare due diagonali, due quindi sieno i piani che si possono fare passare pegli spigoli paralleli opposti di un parallelepipedo e che taglino due faccie opposte. È visibile tanto alla Fig. 18, quanto alla Fig. 19, come due soli sieno i piani che si possano condurre che taglino le faccie opposte, ad esempio A B C D, H E F G, i piani cioè D B E G, A C F H.

Nel parallelepipedo esistendovi sei faccie a due a due opposte e parallele, ne segue che nel parallelepipedo è possibile di condurre sei piani che passino per spigoli paralleli opposti.

Se si analizzano due a due i piani che nel suindicato modo si possono condurre, due e distinti sono i casi d'intersezione che si presentano. Alloraquando i due piani passanti per spigoli paralleli opposti intersecano le medesime faccie opposte, l'intersezione ha luogo secondo una parallela agli spigoli paralleli, per i quali vennero condotti i piani; ed alloraquando i due piani passanti per spigoli paralleli opposti non intersecano le medesime faccie opposte, l'intersezione ha luogo secondo una diagonale del parallelepipedo, cioè secondo una retta che unisce due vertici del parallelepipedo non collocati in una medesima faccia, e che sono i vertici comuni ai due piani condotti.

A rendersi ragione che se in un parallelepipedo A B C D E F G H (Fig. 10 o Fig. 11) si conducono due piani, come D B E G, A C F H, passanti, il primo per gli spigoli paralleli opposti B E, D G, il secondo

per gli spigoli paralleli opposti A H, C F, ed amendue taglianti le medesime faccie opposte A B C D, E F G H, che l'intersezione dei sopra detti piani abbia luogo secondo una retta P Q parallela agli spigoli B E, D G, A H, C F, per i quali vennero condotti i piani, egli è sufficiente di badare che le diagonali condotte in un parallelogramma qualsiasi dividendosi reciprocamente per metà, le rette d'intersezione dei piani condotti, colle faccie A B C D, E F G H, tagliandosi reciprocamente per metà nei punti P e Q, la retta P Q sarà parallela agli spigoli A H, B E, C F, D G, perchè le faccie A B C D, E F G H essendo parallele ed eguali, parallele ed eguali sono le diagonali, quindi H P eguale e parallelo ad A Q, P E eguale e parallelo con Q B, cosicchè le figure A Q P H, P Q B E sono due parallelogramma, e quindi è P Q parallelo ad A H e B E, epperciò parallelo ancora con C F e D G. Onde, P e Q essendo due punti comuni ai due piani, P Q è la loro intersezione, epperciò come venne detto, parallelo agli spigoli per i quali vennero condotti i piani, ed inoltre una tale intersezione essendo collocata sulla metà dei piani, è dato di conchiudere come *due piani condotti in un parallelepipedo per gli spigoli opposti e paralleli, si dividono per metà nella loro intersezione, che è una retta parallela agli spigoli per i quali vennero condotti i due piani.*

Che poi due piani condotti ad esempio, l'uno per gli spigoli paralleli opposti H G, B C, l'altro per gli spigoli paralleli opposti B E, D G, si abbiano ad intersecare secondo la diagonale G B del parallelepipedo, egli è evidente essendo i punti G e B i punti comuni ai due piani. Epperciò *ogni diagonale in un parallelepipedo può venire considerata siccome l'intersezione di due piani passanti per degli spigoli solo due a due paralleli.*

Se si analizzano infine i sei piani che si possono condurre in un parallelepipedo per gli spigoli due a due opposti e paralleli, è dato di vedere come abbiano luogo sette intersezioni, delle quali tre sieno parallele agli spigoli del parallelepipedo, e le altre quattro sieno le quattro diagonali che egli è possibile di condurre in un parallelepipedo. Non rimane più quindi che di vedere in qual modo le sette succitate intersezioni si intersechino alla loro volta. Per ciò si osservi che se in un parallelepipedo, come A B C D E F G H, si conducono due piani come D B E G, A C F H, questi piani danno ciascuno nelle diagonali del parallelogramma di sezione le diagonali del pa-

rallelepipedo. Ora le diagonali condotte in un parallelogramma tagliandosi vicendevolmente in parti eguali, ne segue che le due diagonali D E, B G del parallelogramma D B E G, si tagliano per metà nel punto O, e medesimamente le due diagonali H C, A F del parallelogramma A C F H si tagliano per metà nello stesso punto O, vale a dire il punto d'intersezione di queste ultime due diagonali è l'identico di quello d'intersezione delle due prime. Infatti, siccome venne detto che ogni diagonale in un parallelepipedo può venire considerata siccome l'intersezione di due piani passanti per degli spigoli solo due a due paralleli, così ad esempio la diagonale G B essendo come l'intersezione dei due piani D B E G, H B C G, ne avviene che il punto di mezzo della diagonale H C essendo collocato nel medesimo punto di mezzo della diagonale G B a causa della sezione H B C G, è il punto O d'incontro di due diagonali nella faccia D B E G, l'identico di quello d'incontro delle due diagonali H C e G B. Ma poichè il punto di mezzo di H C è il punto d'incontro della diagonale H C colla diagonale A F, è così dato di dire che *le quattro diagonali di un parallelepipedo si incontrano in un solo punto.* Ora, l'incontrarsi in un solo punto delle diagonali di un parallelepipedo, corrispondendo all'incontrarsi dei piani che determinano tutte quelle, è così dato intendere come le sette intersezioni derivanti dei sette piani condotti in un parallelepipedo per spigoli opposti paralleli, si intersechino alla loro volta in un solo punto addimandato il *centro* del parallelepipedo.

Dalle cose state dette deriva il modo di determinare la sezione, nonchè le intersezioni fatte in un parallelepipedo con piani passanti per spigoli paralleli opposti. Egli è infatti facile il vedere, come essendo la sezione fatta da un piano che passi per due spigoli opposti di un parallelepipedo, un parallelogramma, due lati del quale sono due spigoli paralleli del parallelepipedo, e gli altri due lati, due diagonali nelle faccie che non contengono quegli spigoli; nel caso del parallelepipedo retto potendo due piani passanti per spigoli paralleli opposti, tagliare le due faccie opposte che non contengono quegli spigoli e che gli sono perpendicolari; poichè ogni retta tracciata in dette faccie dai suoi vertici è sempre una perpendicolare a quegli spigoli per cui vennero condotti i piani, così hanno origine nelle sezioni due parallelogramma rettangoli, e poichè ancora nel rettangolo le diagonali sono eguali, così è dato di dire che

nel parallelepipedo retto le diagonali sono due a due eguali. Ora, il parallelepipedo rettangolo essendo retto per qualunque delle sue faccie che sia presa per base, e le faccie essendo tutte rettangoli, e conseguentemente le diagonali che in ciascuna di esse è possibile di tracciare essendo eguali, ne segue che tutte le sezioni fatte in esso con piani passanti per spigoli paralleli opposti, sono rettangoli due a due eguali. E poichè le quattro diagonali del parallelepipedo sono contenute in due piani che tagliano le medesime faccie opposte, così queste sezioni essendo due rettangoli eguali, *le quattro diagonali del parallelepipedo rettangolo sono tra loro eguali*, ed ogni diagonale è diagonale di un rettangolo avente per lati la diagonale di una faccia del parallelepipedo, e per altro lato lo spigolo del parallelepipedo non comune a quella faccia nè alla sua parallela.

Essendo A B C D E F G H (Fig. 18) un parallelepipedo rettangolo, è visibile come sieno eguali le quattro diagonali B G, D E, H C, A F siccome diagonali dei due rettangoli D B E G, A C F H eguali, essendo G E = H F perchè diagonali di un rettangolo. È del pari visibile che ogni diagonale, ad esempio G B, è diagonale del rettangolo G E B D avente per lati G E diagonale di una faccia ed E B spigolo non appartenente a detta faccia nè alla sua parallela.

Ogni diagonale di un rettangolo essendo calcolabile in funzione dei suoi lati, a mezzo del teorema di Pittagora, ne deriva essere pure calcolabile la diagonale di qualsivoglia parallelepipedo rettangolo in funzione dei suoi tre spigoli. Infatti, ad esempio, la diagonale G E della faccia E F G H è ipotenusa di un triangolo rettangolo G E F avente per cateti due spigoli del parallelepipedo, e la diagonale G B del parallelepipedo è ipotenusa di un triangolo rettangolo G E B avente per cateto il terzo spigolo del parallelepipedo e per altro cateto la diagonale precedentemente detta. Onde essendo

$$\overline{GE}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{EF}^2, \quad \overline{GB}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{EB}^2$$

e quindi

$$\overline{GB}^2 = \overline{GF}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EB}^2$$

epperciò

$$GB = \sqrt{\overline{GF}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{EB}^2}$$

in cui G F, E F, E B sono i tre spigoli, è dato di conchiudere che: *la diagonale del parallelepipedo rettangolo è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei tre spigoli.* Ecco adunque come la conoscenza dei tre elementi costitutivi del parallelepipedo rettangolo è sufficiente pella determinazione della lunghezza delle sue diagonali. Il cubo essendo un parallelepipedo rettangolo in cui i tre spigoli sono eguali, è così la diagonale di un cubo eguale alla radice quadrata del triplo del quadrato del suo lato, ovvero dire: *la diagonale di un cubo è eguale al lato moltiplicato per la radice quadrata del numero tre*, essendo $\sqrt{3\,L^2} = L\sqrt{3}$.

Medesimamente, la conoscenza degli elementi costitutivi di un parallelepipedo retto, come di un parallelepipedo obliquo, è sufficiente pella determinazione delle rispettive diagonali.

Rappresentando ad esempio il parallelepipedo A B C D E F G H (Figura 18) un parallelepipedo retto, è visibile tosto come ad esempio la diagonale A C di una delle basi sia diagonale di un parallelogramma, e quindi abbiasi dal triangolo A B C in virtù del teorema stato dimostrato a pag. 215, che

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times \text{Proj. } BC \text{ sopra } AB$$

e quindi la diagonale A F essendo ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti lo spigolo C F e la diagonale A C, sia

$$\overline{AF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{AC}^2$$

ovvero

$$\overline{AF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB \times \text{Proj. } BC$$

da cui

$$AF = \sqrt{\overline{FC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB\,.\,\text{Proj. } BC.}$$

Poichè la diagonale A F è eguale alla diagonale H C, così dette due diagonali sono determinate colla suespressa formola. Ora le altre due diagonali B G = D E essendo ipotenuse di triangoli rettangoli

aventi per cateti D G = B E e per altro cateto D B, che è altra diagonale del parallelogramma A B C D, ne segue ch' è

$$\overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,BC,\quad \overline{GB}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{DB}^2$$

e quindi

$$\overline{GB}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,BC$$

da cui

$$GB = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,BC}.$$

In tale modo dedotto il valore delle diagonali nel parallelepipedo retto, osservisi che se ad esempio dal vertice A, da cui è tirata la diagonale A F nel parallelepipedo, si conducono le tre diagonali A E, A G, A C nelle faccie A B E H, A D G H, A B C D, queste due prime faccie essendo due rettangoli, è

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AH}^2,\quad \overline{AG}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2$$

e l' ultima faccia essendo un parallelogramma, è

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,AD$$

e la somma dei tre quadrati delle suddette diagonali, essere

$$\overline{AE}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 = 2\,\overline{AB}^2 + 2\,\overline{AH}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,AD$$

alla quale eguaglianza sottraendo da ambo i membri una medesima quantità, quella $\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2$, si ha

$$\overline{AE}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2) =$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + 2\,AB\,.\,\text{Proj.}\,AD.$$

Il secondo membro di quest' eguaglianza esprimendo il valore più sopra trovato di $\overline{AF}^2$, ne deriva potersi stabilire essere

$$\overline{AF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2)$$

e quindi

$$AF = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{AG}^2 + \overline{AC}^2 - (\overline{AB}^2 + \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2)}.$$

Cosicchè dati i tre spigoli di un parallelepipedo e la diagonale della base, che sono gli elementi indispensabili per la determinazione di un parallelepipedo retto, è possibile il calcolare il valore delle diagonali che in esso si possono tracciare, mediante la trovata formola che somministra tale valore in funzione degli spigoli e delle diagonali delle faccie. Nel parallelepipedo retto le faccie laterali essendo tutte rettangoli, le diagonali di dette faccie sono deduttibili, e quindi è possibile l'addivenire al computo delle diagonali di un parallelepipedo retto senza la conoscenza della proiezione di alcun lato su alcun altro.

Ora, se si pone mente che le diagonali alle faccie che si possono tracciare dal vertice H, sono eguali a quelle che si possono tracciare dal vertice A, è dato di vedere come la diagonale H C è eguale alla diagonale A F, come fu già altrove dimostrato.

Medesimamente, se dal vertice D si conducono le tre diagonali D H, D F, D B nelle faccie D A H G, D C F G, D A B C, egli è dato pure di vedere che

$$\overline{DH}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{DA}^2, \qquad \overline{DF}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{DC}^2$$

$$\overline{DB}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{DA}^2 - 2\,DC\,.\,\text{Proj.}\,DA$$

e quindi

$$\overline{DH}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{DB}^2 = 2\,\overline{DG}^2 + 2\,\overline{DA}^2 + 2\,\overline{DC}^2 - 2\,DC\,.\,\text{Proj.}\,DA$$

ossia

$$\overline{DH}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{DB}^2 - (\overline{DG}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2) =$$
$$\overline{DG}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,DC\,.\,\text{Proj.}\,DA;$$

e poichè fu trovato che

$$\overline{GB}^2 = \overline{DE}^2 = \overline{DG}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \,.\, \text{Proj. } BC$$

così essendo $DC = AB$, $BC = AD$, deriva essere

$$\overline{DH}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{DB}^2 - (\overline{DG}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2) = \overline{GB}^2 = \overline{DE}^2$$

e quindi

$$GB = DE = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{DF}^2 + \overline{DB}^2 - (\overline{DG}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{DC}^2)}.$$

È dato perciò di dire come *ogni diagonale in un parallelepipedo retto è eguale alla radice quadrata della differenza fra la somma dei quadrati delle diagonali tirate nelle faccie dal vertice dal quale si computa tirata la diagonale nel parallelepipedo, e la somma dei quadrati dei tre spigoli del parallelepipedo, concorrenti nel sopradetto vertice.*

Colla conoscenza degli elementi costitutivi di un parallelepipedo qualsiasi è pure dato, come venne detto, di poter calcolare il valore di qualsiasi diagonale tracciata nel medesimo. Rappresentando la Fig. 19 un parallelepipedo obliquo, egli si presenterà chiaro come condotta ad esempio la diagonale H C, e quindi la diagonale A C nella faccia A B C D, che a causa del triangolo A D C ed in virtù del teorema di cui a pag. 215, si abbia

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - (2\,DC \,.\, DN)$$

essendo D N la proiezione del lato A D sul lato D C; e medesimamente a causa del triangolo A C H, si abbia

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AC}^2 - (2\,AH \times AI)$$

essendo A I proiezione della diagonale A C sullo spigolo A H. Ora, sostituendo nel valore di $\overline{CH}^2$ il valore conosciuto di $\overline{AC}^2$, si ha

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - (2\,DC \,.\, DN) - (2\,AH \times AI).$$

Osservando che con una perpendicolare abbassata dal vertice B nella faccia A B E H sullo spigolo A H, si viene ad ottenere in A L la proiezione dello spigolo A B sullo spigolo A H; ed ancora osservando che se formasi la proiezione dello spigolo B C sullo spigolo B E, che questa cadrà in B K, e quindi se dal punto K si tira una parallela ad A L, che questa parallela verrà a passare pel punto I indubbiamente, a motivo che la retta C I venne tracciata perpendicolarmente ad A H, epperciò essa è contenuta nel piano perpendicolare alla medesima retta e passante per uno stesso punto C, ne deriva essere L I = B K, e quindi A I = A L + B K, il quale valore di A I sostituito nella eguaglianza $\overline{CH}^2$, dà

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - (2\,DC \times DN) - (2\,AH \times AL) - (2\,AH \times BK).$$

In ogni parallelogramma il prodotto di una base per la sua altezza essendo eguale al prodotto dell'altra base per la rispettiva altezza, così si ha che essendo A X = B K, è A H × B K = A D × A R, essendo A R la proiezione dello spigolo A H sullo spigolo A D.

Sostituendo nel valore di $\overline{CH}^2$ al posto di 2 A H × B K il suo eguale 2 A D × A R, ne deriva

$$\overline{CH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - (2\,DC \times DN) - (2\,AH \times AL) - (2\,AD \times AR).$$

Esaminando questa espressione, scorgesi essere

$$CH = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 - (2\,DC \times DN) - (2\,AH \times AL) - (2\,AD \times AR)}$$

il valore cioè della diagonale di un parallelepipedo qualsiasi è eguale alla radice quadrata della somma dei quadrati dei tre spigoli concorrenti in un vertice, col doppio prodotto di ciascuno di detti spigoli per il valore della proiezione di uno spigolo sul suo consecutivo. Nel parallelepipedo che non è rettangolo nè retto, le quattro dia-

gonali essendo tutte diseguali tra loro, così appunto la trovata formola somministra, a seconda del valore che hanno le proiezioni degli spigoli passanti pel vertice da cui passa la diagonale, e fatte successivamente sul consecutivo, quello delle diagonali del parallelepipedo.

Se però si osserva che dal vertice C, da cui venne tirata la diagonale C H, ove si tirino nelle faccie che lo determinano, le diagonali C E, C G, C A, si ha

$$\overline{CE}^2 = \overline{DH}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 - (2\,AD \times AR)$$

$$\overline{CG}^2 = \overline{HB}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{AH}^2 - (2\,AH \times AL)$$

$$\overline{CA}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2 - (2\,DC \times DN)$$

i quali valori sommati assieme danno

$$\overline{CE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{CA}^2 = 2\,\overline{AH}^2 + 2\,\overline{AD}^2 + 2\,\overline{CD}^2 - (2\,AH \times AL) - (2\,DC \times DN) - (2\,AD \times AR)$$

e la quale espressione diminuita ad ambi i membri di una quantità eguale ad $\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$, riducesi ad essere

$$\overline{CE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{CA}^2 - (\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2) = \overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - (2\,AH \times AL) - (2\,DC \times DN) - (2\,AD \times AR)$$

scorgesi come il secondo membro di questa eguaglianza essendo l' espressione quadrata del valore della diagonale di un parallelepipedo, così è altresì la diagonale di un parallelepipedo

$$\overline{CH}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{CA}^2 - \left(\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2\right)$$

e quindi

$$CH = \sqrt{\overline{CE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{CA}^2 - \left(\overline{AH}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2\right)}$$

onde in generale *la diagonale di un parallelepipedo qualsiasi è eguale alla radice quadrata della differenza fra la somma dei quadrati delle diagonali nelle faccie tirate dal vertice dal quale si computa la diagonale del parallelepipedo, e la somma dei quadrati degli spigoli che concorrono in quel vertice.*

Ecco che i sei elementi necessari pella determinazione di una diagonale nel parallelepipedo sono quelli medesimi necessari alla determinazione del parallelepipedo, e viceversa colla conoscenza dei tre spigoli e di tre diagonali delle faccie di un parallelepipedo è possibile il computo di tutte le diagonali, valendosi dell' espressione or ora trovata e del teorema stato dimostrato a pag. 220 per trovare le altre diagonali delle faccie.

Determinata la sezione fatta in un parallelepipedo da un piano passante per due spigoli opposti paralleli, rimane a vedere la scomposizione da esso operata nel parallelepipedo.

Ogni faccia di un parallelepipedo essendo un parallelogramma, ed in ogni parallelogramma la diagonale scomponendolo in due triangoli eguali, ne segue che ogni piano che passi per due spigoli paralleli opposti di un parallelepipedo, tagliando in esso due faccie opposte e parallele secondo una diagonale nelle medesime, i due corpi risultanti da una tale sezione hanno sempre due faccie opposte parallele che sono due triangoli eguali, eguali essendo le faccie opposte dei parallelepipedi; ed avendo una faccia comune e le altre due faccie rispettivamente eguali siccome faccie opposte del parallelepipedo, sono due prisma triangolari, e sono eguali essendo ogni angolo solido triedro e formato da faccie eguali. Così i due corpi ABCHEF, ADCHGF, in cui un parallelepipedo qualunque A B C D E F G H è scomposto dal piano A C F H passante per due spigoli qualunque opposti e paralleli, come A H, C F, avendo il primo le due basi A B C, H E F eguali e parallele siccome metà di parallelogrammi eguali e contenuti in piani paralleli, il secondo le due basi A D C, H G F eguali e parallele tra loro ed eguali e parallele a quelle del primo siccome l'altra metà di parallelogrammi eguali e contenuti in piani paralleli; essi sono due prisma triangolari a base eguale, che avendo inoltre il primo la faccia A C F H comune col secondo, il primo le faccie A B E H, B C F E eguali perchè opposte alle faccie D C F G, A D H G del secondo, essi sono due prisma triangolari eguali, essendochè gli angoli solidi in cia-

scuno sono rispettivamente eguali, ed eguali perciò tutti i singoli elementi costitutivi. Nel parallelepipedo retto i due prisma in cui è scomponibile da un piano passante per due spigoli opposti e paralleli, sono l'uno all'altro sovrapponibili, mentrechè nel parallelepipedo obliquo i due prisma in cui è scomponibile sono simmetrici. Siano però sovrapponibili che simmetrici i due prisma triangolari eguali in cui può venire scomposto un parallelepipedo da un piano passante per due spigoli opposti, essi hanno sempre l'altezza del parallelepipedo, ed una base che è la metà di quella del parallelepipedo. È quindi dato conchiudere che *ogni prisma triangolare è la metà di un parallelepipedo di eguale altezza e di metà base.*

Considerati i piani condotti in un parallelepipedo che passino per due spigoli tra loro paralleli, vengasi alla considerazione di piani che siano solo paralleli ad uno spigolo, indi paralleli a due spigoli, e per ultimo tracciati comunquemente.

Un piano condotto in un parallelepipedo per modo che esso sia solo parallelo ad uno spigolo, due e distinte sono le posizioni che esso può avere, esso cioè può tagliare due faccie opposte secondo una retta che divida o due lati adiacenti, oppure due lati opposti. In ognuna però delle due posizioni, la figura di sezione è sempre un parallelogramma. Infatti, sia il piano K M T V che il piano K M S U, condotti parallelamente allo spigolo, ad esempio A H nel parallelepipedo A B C D E F G H, e taglianti il primo le due faccie opposte A B C D, E F G H, secondo le rette K V, M T che dividono nelle medesime due lati adiacenti, taglianti il secondo le medesime faccie secondo le rette K U, M S che dividono nelle stesse due lati opposti, si hanno sempre tanto nelle rette M T, K V, quanto in quelle M S, K U, due rette contenute in un medesimo piano e contenute in piani paralleli, onde esse sono parallele tra loro; e poichè ogni piano che tagli due piani paralleli, come lo sono le faccie A B E H, D C F G del parallelepipedo in questione, le intersezioni sono due rette parallele, così sono parallele le rette K M, V T, U S, e le figure K M T V, K M S U avendo i lati opposti paralleli, sono due parallelogrammi. Come è agevole lo scorgere dalla figura stessa in cui vennero tracciati i due piani nel senso in considerazione, si hanno due diverse scomposizioni del parallelepipedo, quella fatta col piano K M T V in due prisma di medesima altezza

del parallelepipedo, l'uno a base triangolare, l'altro a base pentagona; quella fatta col piano K M S U in due prisma a base quadrilatera, di medesima altezza del parallelepipedo, ciascuno dei quali addimandasi un *tronco di parallelepipedo.*

Allorquando un piano è condotto in un parallelepipedo parallelamente al piano determinato da due spigoli paralleli, due possono essere le posizioni, cioè o può essere parallelo a due spigoli contenuti in una medesima faccia, epperciò parallelamente ad una faccia del parallelepipedo, oppure può essere parallelo al piano determinato da due spigoli paralleli opposti. Nella prima posizione è agevole di vedere come la figura di sezione sia eguale alla faccia alla quale venne condotto parallelamente il piano; nella seconda posizione come la figura di sezione sia un parallelogramma, due lati del quale eguali ai due spigoli del parallelepipedo parallelamente ai quali venne condotto il piano.

Il parallelepipedo è poi scomposto da un piano parallelo ad una faccia, in due parallelepipedi, che per avere una faccia eguale e potendo essa venire presa per base, è dato di dire: *ogni piano condotto in un parallelepipedo parallelamente ad una faccia, lo scompone in due parallelepipedi di eguale base.*

Ora egli è evidente che, ove il piano condotto in un parallelepipedo parallelamente ad una faccia, venga a passare pella metà degli altri spigoli, la scomposizione darà due parallelepipedi, che oltre all'avere eguale base, hanno pure eguale altezza.

Un piano che sia parallelo al piano determinato da due spigoli opposti, scomporrà sempre il parallelepipedo in due prisma di eguale altezza, ma l'uno essendo triangolare, l'altro pentagonale.

Per ultimo, considerando un piano, il quale non sia parallelo ad alcuno degli spigoli di un parallelepipedo, attraverso al quale sia stato condotto, si ha che con esso il parallelepipedo viene scomposto in due tronchi di parallelepipedo, e la figura di sezione è sempre un parallelogramma, essendochè per essere le intersezioni di un piano con due piani paralleli, due rette parallele, nel parallelepipedo essendovi le faccie opposte due a due parallele, le intersezioni delle medesime con un piano danno luogo a quattro rette due a due opposte parallele.

Essendo A B C D E F G H (Fig. 20) un tronco di parallelepipedo, poichè se per gli spigoli tronchi opposti si conducono i due piani

A C F H, D B E G, i medesimi si incontrano secondo una retta O P parallela agli spigoli tronchi, e che divide per metà le diagonali nelle faccie opposte A B C D, E F G H, epperciò per metà i lati non paralleli dei due trapezi A C F H, D B E G, si ha che la retta che congiunge il punto di mezzo dei lati non paralleli di un trapezio essendo eguale alla semisomma delle basi parallele, è $2\,OP = AH + CF$, $2\,OP = DG + BE$, e quindi $AH + CF = DG + BE$, vale a dire: *nel tronco di parallelepipedo la somma degli spigoli tronchi opposti è eguale alla somma degli altri due.* Esistendo una siffatta relazione, è dato di potere calcolare il quarto spigolo di un tronco di parallelepipedo colla conoscenza degli altri tre, e si ha così l'occasione di vedere come, dati tre punti E, F, G di un piano, cioè le distanze B E, C F, D G, si trovi un quarto punto H, vale a dire la distanza A H, togliendo lo spigolo opposto C F dalla somma degli altri due spigoli B E, D G; e così il mezzo di potere tracciare su di un parallelepipedo qualsiasi la sezione di un piano colla conoscenza di tre soli punti, ossia degli elementi indispensabili alla sua determinazione.

Un piano tracciato nel senso or ora considerato può essere che egli sia perpendicolare agli spigoli per i quali esso passa, ed in tal caso dà luogo ad altre considerazioni, e la sezione riceve il nome speciale di *sezione retta.* Naturalmente che, ove un piano sia condotto perpendicolarmente a degli spigoli in un parallelepipedo rettangolo od in un parallelepipedo retto, la sua posizione è identica nel primo, e può esserlo nel secondo, con quella di un piano che sia condotto parallelamente ad una faccia, e ciò perchè nel parallelepipedo rettangolo gli spigoli paralleli sono perpendicolari agli altri spigoli, e nel parallelepipedo retto esistono pure degli spigoli paralleli che sono perpendicolari ad altri spigoli. Ma se nel parallelepipedo obliquo un piano è condotto perpendicolarmente ad uno spigolo e conseguentemente anche perpendicolare agli altri spigoli paralleli, in allora negli angoli del parallelogramma di sezione che si ottiene si ha la misura degli angoli diedri del parallelepipedo, e ciò è evidente per quanto è stato dimostrato al libro precedente. Ora bene, gli angoli opposti nel parallelogramma essendo eguali, e quelli adiacenti essendo supplementari, è così dato di poter dire, che *gli angoli diedri opposti di un parallelepipedo qualunque sono eguali tra loro, e quelli adiacenti sono supplementari.* Così il piano

Y P′ Z Q′, condotto da un punto qualunque Y perpendicolarmente allo spigolo A H del parallelepipedo, dà nella sezione retta Y P′ Z Q′ un parallelogramma, nel quale l'angolo P′ Y Q′ è l' angolo diedro A H, quello Y Q′ Z è l'angolo diedro B E, quello P′ Z Q′ = C F, ed infine quello Y Q′ Z = D G, e poichè P′ Y Q′ = P′ Z Q′, Y Q′ Z = Y P′ Z, così è ang. A H = C E, ang. B E = D G.

Osservando come la tracciata sezione retta ha intersecate le faccie del parallelepipedo secondo delle rette perpendicolari a quegli spigoli, cioè è Y P′ perpendicolare ad A H e B E, Y Q′ perpendicolare ad A H e D G, Q′ Z perpendicolare a D G e C F, ed infine P′ Z perpendicolare a B E e C F, ed osservando ancora che tutte le faccie di un parallelepipedo sono parallelogrammi, è dato di vedere come le intersezioni della sezione retta colle faccie del parallelepipedo sieno le altezze delle singole faccie, per modo che, mentre *nel parallelepipedo retto la superficie laterale è eguale al prodotto del perimetro di base per l' altezza*, eguale cioè ad un rettangolo avente per base il perimetro di base, e per altezza lo spigolo laterale del parallelepipedo, essendochè è la detta superficie laterale, formata da quattro rettangoli aventi una medesima altezza, e le cui basi sommate assieme fanno per l'appunto il perimetro del parallelepipedo retto; *nel parallelepipedo obliquo è la superficie laterale eguale al prodotto del perimetro della sezione retta per lo spigolo per cui passa la sezione*, equivalente cioè a quella di un parallelogramma avente per base lo spigolo per cui passa la sezione e per altezza il perimetro della sezione retta.

Per ultimo, se osservasi che colla fatta sezione retta si è scomposto il parallelepipedo obliquo in due parti tali che, presa la sezione per base, sono i diversi spigoli Y H, P′ E, Z F, Q′ G dell'una perpendicolari alla medesima, e pure perpendicolari sono gli spigoli A Y, B P′, C Z, D Q′ dell'altra alla stessa faccia, è così dato di dire, come *ogni parallelepipedo obliquo è scomposto dalla sezione retta, in due tronchi di parallelepipedo retto.* Dopo ciò rendesi evidente come il piano Y O′ Z Q′, che passando per il punto di mezzo O dell' asse, è perpendicolare agli spigoli paralleli, scompone il parallelepipedo obliquo in due tronchi di parallelepipedo retto, che sono perfettamente eguali, e convenientemente disposti, formeranno un intiero parallelepipedo retto.

Ciò posto, nel parallelepipedo obliquo lo spigolo laterale essendo

eguale all'asse, ne segue che ogni tronco di parallelepipedo retto essendo la metà di un parallelepipedo obliquo avente per asse il doppio di quello del tronco, in seguito all'espressione della superficie laterale del parallelepipedo obliquo, *la superficie laterale del tronco di parallelepipedo retto è eguale al perimetro di base moltiplicato per l'asse.*

Le faccie laterali tanto del tronco di parallelepipedo retto, quanto del tronco di parallelepipedo obliquo, essendo trapezi dei quali le altezze, nel primo sono i lati di base, nel secondo i lati della sezione retta, e le basi sono in entrambi gli spigoli, così si ha che *la superficie laterale del tronco di parallelepipedo obliquo è eguale al perimetro della sezione retta moltiplicato per l'asse.*

I poliedri a faccie piane essendo terminati da piani, o per meglio dire, essendo formati da una serie di poligoni piani, *la superficie di ogni poliedro è sviluppabile*, è possibile cioè tracciare su di un piano una figura di area eguale a quella della superficie di un poliedro, e di più tale che con essa lo si possa avvolgere intieramente ed esattamente.

Si comprenderà perciò di leggieri che nel parallelepipedo retto le faccie laterali essendo tanti rettangoli di medesima altezza, *lo sviluppo della superficie laterale di un parallelepipedo retto è un rettangolo avente per altezza quella del parallelepipedo e per base il perimetro di base del medesimo.*

Nel parallelepipedo obliquo essendo le faccie laterali dei parallelogrammi aventi un lato eguale, *lo sviluppo della superficie laterale di un parallelepipedo obliquo è una figura composta di quattro parallelogrammi disposti in modo che sono, adiacenti col lato eguale quelli che esprimono faccie adiacenti, simmetrici quelli che esprimono faccie opposte.*

Nel tronco di parallelepipedo qualsiasi le faccie laterali essendo dei trapezi, *lo sviluppo della superficie laterale di un tronco di parallelepipedo, è una figura composta di quattro trapezi disposti in modo che sono, adiacenti quelli che esprimono faccie adiacenti, simmetrici quelli che esprimono faccie opposte.* Nel caso del tronco retto i quattro trapezi hanno un lato collocato tra loro in linea retta.

Proprietà del prisma in generale. — Un piano può venire condotto in un prisma in modo che esso passi per due spigoli la-

terali, oppure che sia parallelo ad un solo spigolo laterale, oppure parallelo al piano determinato da due spigoli laterali, oppure passante per l'asse, oppure infine da tagliare tutti i lati che determinano la superficie laterale del prisma, o parallelamente o non parallelamente alle basi.

Allorquando un piano è condotto in un prisma, sia per due spigoli laterali paralleli, sia parallelamente al piano determinato da questi, sia ancora parallelamente ad un solo spigolo laterale, o passante per l'asse, la sezione è sempre un parallelogramma, perchè le rette d'intersezione del piano condotto colle faccie del prisma sono due a due rispettivamente parallele; ed il prisma viene scomposto in due altri prisma aventi l'altezza medesima del prisma dato. Ed allorquando un piano è condotto in un prisma, per modo che sia parallelo ad una base, la figura di sezione è eguale alla figura di base, inquantochè essendo tutti gli spigoli laterali del prisma paralleli tra loro, una sezione fatta nell'indicato senso, oltre al determinare nell'intersezione colle faccie laterali delle rette parallele agli spigoli di base del prisma, determina altresì delle rette eguali ai medesimi, siccome lati opposti di tanti parallelogrammi, quanti sono i lati di base del prisma. La figura di sezione essendo un poligono eguale alla figura di base, ne deriva che ogni prisma è scomposto da un piano parallelo alle sue basi in due prisma a base eguale, e quando il piano sia stato condotto alla metà della lunghezza degli spigoli laterali, i due prisma di scomposizione sono due prisma eguali.

Finalmente, l'intersezione di un piano comunquemente collocato con un prisma dà luogo a due tronchi di prisma. Così ad esempio, il piano P Q R V T S (Fig. 21), condotto nel prisma A B C D E F A' B' C' D' E' F', lo scompone nei due tronchi di prisma A B C D E F S P Q R V T, A' B' C' D' E' F' S P Q R V T.

Essendo dati tre punti, come P, Q, R, per cui vogliasi fare passare un piano, egli è cosa assai facile il pervenire alla determinazione di tutti gli altri punti sui diversi spigoli. Infatti, il piano che deve passare per i punti P, Q, R taglierà la faccia B C B' C' secondo la retta P Q, la faccia C D C' D' secondo la retta Q R, il piano poi B D B' D' passante per i due spigoli paralleli B B', D D', secondo la retta P R, ed in ultimo il piano F C C' F' passante per i due spigoli laterali paralleli C C', F F' secondo la retta Q T, la quale linea Q T d'intersezione, come è agevole lo scorgerlo dalla

figura stessa, è determinata mediante il punto Z'' d'intersezione dei tre piani B D B' D', F C C' F', P Q R, i due primi secondo la retta Z Z', il primo ed il terzo secondo P R, il secondo ed il terzo secondo Q T. Il punto T è un punto appartenente al piano P Q R ed allo spigolo F F' del prisma. Dopo ciò, è assai più facile il rinvenire gli altri due punti, poichè egli basta immaginare condotto il piano B E E' B', che s'intersecherà con quello F C C' F' secondo la retta O O', e questa intersecherà a sua volta la Q T nel punto O'', tale che unito col punto P darà mediante la retta P O'' V il punto V sullo spigolo E E', che apparterrà al piano P Q R. Infine, immaginato il piano A D D' A, che intersecherà quello F C C' F secondo la retta O O', e questa la Q T in O'' per modo che la retta R O'' darà col suo prolungamento il punto S sullo spigolo A A', che apparterrà al piano P Q R. Tirate quindi per ultimo le rette P S, S T, T V, V R, il piano P Q R V T S sarà così tracciato.

Egli è poi evidente che, se il prisma sul quale è proposto di tracciare il piano passante per tre punti P, Q, R, è un prisma esagonale regolare come quello disegnato alla Fig. 21, in allora presentasi assai facile il computo della lunghezza degli spigoli tronchi che determinano il piano. Essendo la base A B C D E F un esagono regolare, la retta B D divide, ed è divisa, per metà in Z la retta O C tirata dal centro O al vertice C, ed inoltre essendo Z Z'' parallela a C C', ne deriva che la figura O C Q O'' è un trapezio, e medesimamente un trapezio la figura P B D R, in entrambi i quali la retta Z Z'' divide per metà i lati non paralleli, per cui è $PB + DR - QC = OO''$; sicchè colla conoscenza delle lunghezze P B, D R, Q C, è deduttibile il valore della retta O O''. Se ora si osserva che le due figure P B E V, T F C Q sono due trapezi, nei quali la retta O O'' unisce in entrambi i punti di mezzo dei lati non paralleli, e che essa è eguale a $PB + DR - QC$, si ha che $PB + VE = 2PB + 2DR - 2QC$, da cui $VE = PB + 2DR - 2QC$, e medesimamente $TF = 2PB + 2DR - 3QC$; cosicchè è colla massima facilità computabile il valore dei diversi spigoli tronchi, perchè si ricaverebbe $SA = 2PB + DR - 2QC$. Ond'è che, se ad esempio in un prisma esagonale regolare, fossero dati tre punti P, Q, R, con essere $BP = 5^m$, $CQ = 4^m$, $DR = 7^m$, si ricaverebbe tosto essere $OO'' = 8^m$, $FT = 12^m$, $EV = 11^m$, $AS = 9^m$.

Un piano può però essere rispetto ad un prisma in una posizione, se pur considerabile nell'ultimo caso perchè tagliante tutti indistintamente gli spigoli laterali, in una posizione però tale da rimanere perfettamente determinato. Questa posizione è quella, che è perpendicolare agli spigoli laterali del prisma e che addimandasi la *sezione retta*, come si è già visto pel parallelepipedo. Nel caso del prisma retto, la sezione retta perpendicolare agli spigoli laterali è un piano parallelo alle basi, ma nel caso del prisma obliquo una tale sezione ha la proprietà di fornire negli angoli al perimetro gli angoli diedri del prisma, e nel perimetro la somma delle altezze dei diversi parallelogrammi che sono le sue faccie laterali.

Onde è che *le relazioni che legano gli angoli al perimetro di un poligono sono le medesime di quelle che legano gli angoli diedri laterali di un prisma.* E mentre che *la superficie laterale di un prisma retto è eguale al prodotto del perimetro di base per l'altezza*, cioè eguale ad un rettangolo avente per base il perimetro di base e per altezza lo spigolo laterale del prisma, essendochè la superficie laterale di un prisma retto si compone di tanti rettangoli aventi tutti l'altezza del prisma e per base i lati di base del prisma; *la superficie totale di un prisma retto regolare è eguale al prodotto del perimetro di base per la somma dell'altezza del prisma colla apotema della base,* essendochè la superficie totale di un prisma retto è eguale alla precedente, più le due basi che sono due poligoni regolari, ed ognuna delle quali ha per area il prodotto del perimetro per la metà dell'apotema, e quindi entrambe il perimetro per l'apotema; ed infine *la superficie laterale di un prisma qualunque, è eguale al perimetro della sezione retta moltiplicato per il lato del prisma,* equivalente cioè a quella di un parallelogramma avente per base il lato e per altezza il perimetro della sezione retta.

Egli è evidente del pari come nel parallelepipedo obliquo, che la sezione retta scompone in due tronchi di prisma retto un prisma obliquo, i quali due tronchi, ove siano stati prodotti con una sezione che passi per la metà dell'asse, saranno equivalenti allorquando il prisma abbia per base un poligono regolare di un numero pari di lati, ed in allora è possibile la conversione di un parallelepipedo obliquo in un prisma retto mediante una sezione retta.

Così, ogni prisma obliquo regolare di un numero pari di lati, avendo lo spigolo laterale che è eguale all'asse, ed essendo il doppio, di un tronco retto di prisma obliquo avente per asse la metà di quello del prisma, in seguito all'espressione della superficie laterale del prisma obliquo, *la superficie laterale del tronco retto di prisma obliquo avente per base un poligono regolare di un numero pari di lati, è eguale al perimetro di base moltiplicato per l'asse.*

Medesimamente, le faccie laterali di un tronco obliquo di prisma obliquo, essendo trapezi, l'altezza dei quali è data dalla sezione retta, ed i lati dei quali, dati dagli spigoli, si ha che *la superficie laterale di un tronco obliquo di prisma obliquo avente per base un poligono regolare di un numero pari di lati, è eguale al perimetro della sezione retta moltiplicato per l'asse.*

La superficie laterale di ogni altro tronco di prisma si otterrà colla somma delle diverse aree delle diverse faccie laterali; oppure in quella dello sviluppo. *Lo sviluppo di un prisma retto è un rettangolo avente l'altezza del prisma e per base il perimetro di base del prisma*, e ciò perchè le faccie laterali del prisma retto, essendo rettangoli ed avendo un lato eguale, essi possono formare un solo rettangolo.

Prisma simili. — Due o più prisma si dicono simili quando hanno ciascuno un angolo solido compreso da faccie simili. Così i due prisma rappresentati alla Fig. 22, i quali hanno per base due poligoni simili A B C D E F G H, *a b c d e f g h*, ed in cui vi hanno due faccie laterali, come B A A' B', *b a a' b'*, H A A' H', *h a a' h'*, adiacenti nell'uno e nell'altro prisma, che sono simili, si dicono *prisma simili.*

Ogni angolo solido nel prisma essendo triedro, ed ogni angolo solido avendo una faccia ch'è o la base inferiore o la sua eguale la superiore, ne segue che i prisma simili a seguito della loro definizione debbono avere le figure delle basi simili tra loro.

Parimenti nel prisma essendo eguali gli spigoli laterali, due o più prisma che abbiano uno spigolo che sia con un lato del poligono di base nel medesimo rapporto, essi avranno tutti gli altri spigoli laterali che saranno omologhi, e siccomechè simili debbono essere le basi, e non altrimenti che dei parallelogrammi le faccie laterali dei prisma, così è dato di vedere come i prisma simili

hanno un eguale numero di faccie simili e similmente disposte, e conseguentemente i lati omologhi proporzionali, per cui applicando la conosciuta determinazione dei poliedri, si avrà che due parallelepipedi rettangoli saranno simili se i tre spigoli costitutivi di uno saranno nello stesso rapporto dei tre spigoli costitutivi dell'altro; due parallelepipedi qualunque saranno simili, se avranno gli elementi angolari eguali e gli elementi rettilinei proporzionali.

Ora bene, essendo altrettante figure simili le diverse faccie dei due prismi simili considerati, è dato potere stabilire la seguente serie di rapporti eguali $ABB'A' : abb'a' :: BCC'B' : bcc'b' :: CDC'D' : cdc'd' :: \ldots$ ecc. ecc. $: haa'h'$, la quale può convertirsi nell'altra serie $ABB'A' + BCC'B' + CDD'C' + DEE'D'$ .... ecc. ecc. $: abb'a' + bcc'b' + cdd'c' + dee'd' + \ldots$ ecc. ecc. $:: ABB'A' : abb'a' :: BCC'B' : bcc'b' :: \ldots$ ecc. ecc., il primo termine ed il secondo della quale serie esprimendo la superficie laterale dei due prisma simili, rendesi evidente come il rapporto della superficie laterale di due prisma simili sia nel rapporto delle faccie omologhe. Ma poichè le faccie omologhe sono poligoni simili, e quindi le loro aree sono proporzionali ai quadrati dei lati omologhi, così è pure dato di dire che *le superficie laterali dei prisma simili sono proporzionali ai quadrati dei rispettivi lati omologhi.* Poichè se alla prima serie scritta aggiungevasi il doppio rapporto delle basi dei due prisma, si sarebbe ottenuta nella seconda serie di rapporti eguali, che i due primi termini sarebbero stati le superficie totali dei due prismi, così è dato conchiudere *le superficie totali dei prisma simili sono nel rapporto dei quadrati dei lati omologhi.*

Proprietà delle piramidi. — Due rette determinando un piano, ne segue essere possibile sempre di fare passare per due lati di una piramide un piano. Ora bene, un piano che passi per due lati di una piramide coinciderà con una faccia della medesima, allorquando esso passi per due spigoli adiacenti ad una medesima faccia, e non coinciderà, ma taglierà la base secondo una diagonale, allorquando esso passi per due spigoli laterali non adiacenti alla medesima faccia, ed in tale caso è evidente essere la figura di sezione un triangolo, come un triangolo è ogni sua faccia laterale. Nel triangolo non esistendo diagonali, ne segue che nella piramide avente per base un triangolo, vale a dire nella piramide

triangolare, non è possibile di tracciare due spigoli che non sieno adiacenti ad una medesima faccia, e quindi non è possibile di tracciare un piano per due spigoli laterali che non abbia a coincidere con una faccia di essa. Perchè quindi un piano passante per due spigoli laterali di una piramide abbia a tagliare la base secondo una diagonale, ed abbia a scomporre la medesima, è necessario che il numero di lati della base sia maggiore di tre.

Ogni sezione fatta in una piramide con un piano che passi per due spigoli laterali essendo un triangolo, è evidente che pella piramide regolare, che ha cioè tutti gli spigoli laterali eguali, e che è retta, tutti i piani che in essa è possibile di tracciare nell'indicato senso saranno perpendicolari alla base e daranno nella figura di sezione un triangolo isoscele. In generale un piano che passi per due spigoli laterali di una piramide sarà perpendicolare alla base, allorquando la proiezione del vertice sulla base cadrà sulla retta che unisce in essa i due estremi degli spigoli per i quali passa il piano; ed in generale la figura di sezione di un piano che passi per due spigoli laterali di una piramide sarà un triangolo isoscele, quando passerà per due spigoli laterali eguali o quando la diagonale di sezione nella base sarà eguale ad uno spigolo per il quale passa il piano. La figura di sezione sarà poi un triangolo equilatero, nel caso che il piano passante per due spigoli laterali eguali tagli la base secondo una diagonale eguale a quegli spigoli.

Per una retta essendo possibile il fare passare una infinità di piani, ne segue che per ogni spigolo laterale di una piramide è possibile di fare passare una infinità di piani, e conseguentemente anche un piano che sia perpendicolare alla base. Qualunque però sia il piano che passi per uno spigolo laterale di una piramide, la figura di sezione è sempre un triangolo, poichè esso taglierà una faccia laterale secondo una retta tirata dal vertice alla base, e la base della piramide sempre secondo una retta. Ogni piano che contenga la perpendicolare ad altro piano, essendo a questo perpendicolare, ne deriva che il piano passante per uno spigolo laterale di una piramide e perpendicolarmente alla base della medesima, conterrà la perpendicolare abbassata dal vertice della piramide sulla base, conterrà cioè l'altezza della piramide.

Il tetraedro regolare, cioè la piramide triangolare, in cui tutte indistintamente le faccie sono triangoli equilateri, e quindi tutti gli

spigoli laterali sono eguali, ne deriva che il piede dell'altezza del medesimo è il centro della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero, e poichè questo è collocato su di una mediana, così ne avviene che il piano condotto perpendicolarmente alla base di un tetraedro regolare e passante per uno spigolo laterale, contenendo l'altezza, esso taglierà la base secondo una mediana e la faccia opposta secondo altra mediana, dando nella figura di sezione un triangolo isoscele, in cui i lati eguali sono le mediane od altezze, ch'è tutt'uno, delle faccie del tetraedro, cioè altezze di un triangolo equilatero, e il terzo è il lato del tetraedro.

Tre essendo i piani che si possono condurre nell'indicato senso nel tetraedro regolare con una faccia costante per base, ne avviene che ognuno di detti piani contenendo l'altezza del tetraedro, ed intersecandosi, una tale intersezione non può avere luogo altrimenti che secondo la detta altezza. E siccome i tre suddetti piani tagliano la faccia di base sempre secondo una mediana, e le mediane alla loro volta, come fu detto a pag. 46, nella proporzione di un terzo a partire dalla base e di due terzi a partire da un vertice, così si ha essere l'altezza di un tetraedro regolare il cateto di un triangolo rettangolo avente per ipotenusa il lato del tetraedro e per altro cateto i due terzi dell'altezza di un triangolo equilatero avente per lato il lato del tetraedro. Cosicchè, chiamando con L il lato di un tetraedro regolare, essendo $\frac{L}{2}\sqrt{3}$ l'altezza di un triangolo equilatero in funzione del suo lato, ne deriva che i due terzi di detta altezza essendo $\frac{L}{3}\sqrt{3}$, è l'altezza H del tetraedro regolare coll'aiuto del teorema di Pittagora,

$$H=\sqrt{L^2-\left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{9L^2-3L^2}{9}}=\frac{1}{3}L\sqrt{6}.$$

Nello stesso modo col quale venne conseguito il valore dell'altezza del tetraedro regolare, può conseguirsi l'altezza di una piramide qualsiasi, bastando perciò determinare l'intersezione di due piani condotti perpendicolarmente alla base e passanti l'uno per uno spigolo laterale, l'altro per un altro spigolo pure laterale.

Un piano però, potendo contenere l'altezza di una piramide senza passare per alcuno degli spigoli laterali di essa, bastando che sia perpendicolare alla base e che contenga il vertice, così l'altezza di una piramide è altresì determinata colla intersezione di due piani che siano perpendicolari alla base e che passino per il vertice.

La piramide regolare essendo retta ed avendo tutte le faccie eguali ed altrettanti triangoli isosceli, è tale che il piano che passando pel vertice sarà perpendicolare alla base e passerà per la metà di un lato qualunque della base, sarà a questi perpendicolare.

La figura di sezione di un piano qualsiasi, che passando pel vertice tagli la piramide, è sempre un triangolo, poichè esso non può incontrare in nessun caso più di due faccie laterali e la base.

Or bene, un piano condotto in una piramide, sia per due spigoli laterali, sia per un solo spigolo laterale, sia infine pel vertice, dando nella figura di sezione sempre un triangolo avente un vertice nel vertice della piramide, è dato di conchiudere come: *ogni qualunque piramide tagliata da un piano qualunque passante per il vertice, è scomposta in due piramidi di eguale altezza ed eguale all'altezza della piramide primitiva.*

Un piano condotto in una piramide, in una posizione che non abbia a contenere il vertice, cinque sono le posizioni diverse che egli può avere, egli può essere cioè parallelo ad uno spigolo laterale, oppure parallelo ad una faccia laterale, oppure parallelo all'asse della piramide, oppure infine può tagliare i lati tutti della piramide, restando rispetto alla base o parallelo, o non parallelo.

La considerazione di piani condotti per modo che siano paralleli o ad uno spigolo laterale, o ad una faccia laterale, od infine parallelamente all' asse, non presentando caratteri speciali, così delle sole due ultime posizioni, d'un piano parallelo o non parallelo alla base, se ne diranno le risultanze.

Un piano comunquemente condotto in una piramide e che tagli gli spigoli laterali, scompone la piramide in due parti, l'una è una piramide avente il vertice stesso della piramide primitiva, l' altra è un *tronco di piramide.* Così nella piramide A B C D E F V (Fig. 23) il piano G N H I K L la scompone nelle due parti, l'una G N H I K L V, l'altra A B C D E F G H N I L K, la prima una piramide, la seconda un tronco di piramide.

Un piano essendo determinato con tre punti, ne segue che dati

tre punti sugli spigoli laterali di una piramide, la sezione della piramide è determinata.

Infatti, essendo G, N, H i tre punti dati, il primo sullo spigolo V A, il secondo sullo spigolo V B, il terzo sullo spigolo V C, egli è evidente che il piano che passa per detti tre punti e taglierà la faccia V A B secondo G N, quella V B C secondo N H, incontrerà il piano A C V passante per i due spigoli V A, V C secondo la retta G H, ed egli è pure evidente che il piano V E B passante per i due spigoli V E, V B incontrerà il piano V A C secondo la retta V P, ed i tre piani V A C, V E B, G N H nel punto Q, per cui la retta tracciata dal punto N al punto Q apparterrà al piano G N H ed al piano V E B contemporaneamente, ed il punto L d'intersezione collo spigolo V E sarà un punto del piano. Medesimamente, la retta V T essendo l'intersezione dei due piani V A C, V B F, il punto R quello d'intersezione dei tre piani V A C, V B F, G N H, la retta N R sarà contenuta nel piano G N H e nel piano V B F, per cui sarà il punto K il punto d'intersezione del piano in questione collo spigolo V F, G K l'intersezione colla faccia A F V, ed L K l'intersezione colla faccia V E F. Infine ancora sarà la retta V U l'intersezione delle due faccie V B D, V A C; il punto S l'intersezione dei tre piani V B D, V A C e G N H, il punto I l'intersezione del piano G N H collo spigolo V D, e per ultimo le rette H I, I L le intersezioni colle faccie C V D, D V E col piano G N H dato.

Se tre punti segnati sui tre spigoli di una piramide sono sufficienti perchè sia possibile di tracciare sulle singole faccie le rette d'intersezione di esse col piano passante pei tre punti scelti, allorquando il piano vogliasi condurre in una piramide parallelamente alla base, è sufficiente un solo punto. Infatti, essendo A B C D E F V una piramide, ed *a* un punto scelto sullo spigolo V A, sarà agevole di vedere che il piano che parallelamente alla base A B C D E F si potrà da tale punto condurre nella piramide, incontrerà le singole faccie secondo rette parallele ai lati di base, poichè ognuna delle faccie essendo un piano tagliato da due piani paralleli, conseguentemente a quanto venne detto al libro quarto a pagina 378, sono le intersezioni parallele tra loro. Cosicchè, tirando dal punto *a* nella faccia A B V una retta *a b* parallela al lato di base A B, dal punto *b* nella faccia B C V una retta *b c* parallela al lato di base B C, dal punto *c* nella faccia C D V una retta *c d* pa-

rallela al lato di base C D, e così di seguito, si giungerà ad avere nella figura *a b c d e f* la figura di sezione. Esaminando questa figura di sezione, è dato di vedere: 1.° che essa ha tanti lati quante sono le faccie, e quanti sono i lati del poligono di base; 2.° che gli angoli al perimetro sono eguali agli angoli omologhi al perimetro del poligono di base, essendochè trattasi sempre di due angoli contenuti in piani paralleli ed aventi i lati paralleli, e l'apertura rivolta nello stesso senso; 3.° che i lati sono proporzionali ai lati omologhi del poligono di base, perchè essendo le faccie della piramide, delle faccie triangolari, ogni retta tracciata parallelamente alla base delle medesime dividendo gli altri due lati in parti proporzionali, si hanno le proporzioni $ab : AB :: Vb : VB$, $bc : BC :: Vb : VB$, $cd : CD :: Vc : VC$, le quali avendo ogni due, eguali le seconde ragioni, le prime formano proporzione, e si ha $ab : bc :: AB : BC$, $bc : cd :: BC : CD$, sicchè $ab : bc : dc : \ldots :: AB : BC : CD : \ldots$. Onde è dato di dire che *la figura di sezione di una piramide, fatta con un piano parallelo alla base, è un poligono simile al poligono di base.*

Ogni piano condotto in una piramide in modo che tagli tutti gli spigoli laterali, scomponendola in una piramide ed in un tronco di piramide, è evidente che il piano condotto in una piramide parallelamente alla base, la scompone pure in una piramide ed in un tronco di piramide avente le basi parallele, e perciò denominato il *tronco di piramide a basi parallele.* Dato un tronco di piramide a basi parallele, può importare la conoscenza della piramide dalla quale venne reciso. Epperciò immaginato prolungati tutti gli spigoli laterali, indi un piano B E V che contenga l'altezza, e poscia formata la proporzione $VO : Vo :: BE : bc$, e poichè $BE : bc :: AB : ab$, così è $VO : Vo :: AB : ab$, che divisa dà $VO - Vo : VO :: AB - ab : AB$, ove osservando che $VO - Vo$ è eguale all' altezza del tronco O *o*, così si ricava $VO = \frac{AB \times Oo'}{AB - ab}$, il valore cioè dell' altezza di una piramide in funzione di due lati di base e dell'altezza del tronco.

Prendendo ad analizzare la piramide *a b c d e f* V recisa da altra piramide A B C D E V mediante un piano parallelo alla base A B C D E F, è dato di vedere come non solo la piramide recisa e la piramide intiera hanno per base due poligoni simili, ma esse hanno

ancora tutte le faccie omologhe laterali che sono pure simili. Infatti, essendo *a b* parallelo ad A B, considerando una faccia qualunque A B V della piramide intiera, si ha che è il triangolo V *a b* simile al triangolo V A B a motivo che i due triangoli hanno il vertice in V comune, hanno gli altri due angoli eguali, perchè corrispondenti, ed hanno inoltre i lati proporzionali pelle note proprietà di una retta tirata parallelamente in un triangolo ed un lato.

Piramidi simili. — Due o più piramidi aventi ciascuna per base un poligono simile all'altra od altre, ed aventi una faccia laterale simile e similmente disposta, diconsi *piramidi simili.* Da questa definizione emerge, come la piramide recisa da una piramide intiera con un piano parallelo alla base è una piramide simile alla intiera, siccome avente per base una base simile, e tutte le faccie laterali aventi le medesime disposizioni, ed essendo tutte simili.

Puossi ancora dire: due piramidi sono simili, se esse sono composte di un eguale numero di faccie simili e similmente disposte.

Ora ne deriva che sapendo che nelle piramidi simili tutte le faccie omologhe sono poligoni simili, ne avviene che in due piramidi simili, come A B C D E F V, *a b c d e f* V, avendosi la seguente serie di ragioni eguali: A B V : *a b* V :: B C V : *b c* V :: C D V : *c d* V :: E D V : *e d* V :: E F V : *e f* V :: F A V : *f a* V, si ha pure che A B V + B C V + C D V + E D V + E F V + F A V : *a b* V + *b c* V + *c d* V + *e d* V + *e f* V + *f a* V :: A B V : *a b* V :: B C V : *b c* V :: C D V : *c d* V :: E D V : *e d* V :: E F V : *e f* V :: F A V : *f a* V, il primo termine della quale altra serie di rapporti eguali essendo la superficie laterale della piramide più grande, il secondo termine la superficie laterale della piramide più piccola, è dato vedere come le superficie laterali di due, e quindi di più piramidi simili, sieno nel rapporto delle superficie delle faccie omologhe. Ma le faccie omologhe essendo poligoni simili, e quindi le superficie delle medesime stando nel rapporto dei quadrati dei rispettivi lati omologhi, si ha che le superficie laterali delle piramidi simili sono nel rapporto dei quadrati dei rispettivi spigoli omologhi. Siccome poi se alla prima serie di rapporti eguali si fosse aggiunto il rapporto :: A B C D E F : *a b c d e f*, sarebbesi ottenuto nel primo termine dell'altra serie, la superficie totale della piramide più grande, e nel secondo termine la superficie totale della piramide più piccola, così è dato

di couchiudere che *le superficie delle piramidi simili stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi spigoli omologhi.*

Ora, la superficie delle piramidi essendo la somma delle superficie delle diverse faccie, e nella piramide regolare le diverse faccie laterali essendo eguali tra loro, ed ognuna di esse un triangolo, epperciò l'area determinata col semiprodotto della base per l'altezza: così avviene che la base di ogni faccia essendo il lato del poligono regolare di base, e l'altezza l'apotema della piramide, è la superficie laterale di una piramide, eguale a tanti semiprodotti quanti sono i lati di base nella piramide, e formati da due fattori che sono costanti, l'uno l'apotema della piramide, l'altro il lato del poligono di base. Onde, chiamando con n il numero dei lati di base di una piramide regolare, H l'apotema della piramide, ed L il lato del poligono di base, si ha che la superficie laterale $S = \frac{n \times L \times H}{2}$, e poichè $n \times L$ è il perimetro di base della piramide, così *la superficie laterale di una piramide regolare è eguale al semiprodotto del perimetro di base per l'apotema della piramide;* sicchè equivalente all'area di un triangolo avente per base il perimetro di base della piramide e per altezza l'apotema della piramide; equivalente ancora alla superficie sviluppata ch'è evidentemente una porzione di poligono regolare, avente per apotema quella della piramide, per lato quello di base della piramide, per centro il vertice della piramide, ed infine è la porzione, determinata dal numero di lati della base della piramide.

Siccome poi il perimetro di base moltiplicato per l'apotema della base, fornisce l'area della base della piramide, così chiamando con h l'apotema della base della piramide, è la superficie totale di una piramide $S = \frac{n \times L \times H + n \times L \times h}{2}$, ovvero $S = n \times L \left(\frac{H + h}{2}\right)$, cioè *la superficie totale di una piramide è eguale al prodotto del perimetro di base per la semisomma dell'apotema della piramide coll'apotema della base.* Onde i quadrati degli spigoli omologhi di due o più piramidi regolari simili, stanno tra loro come i prodotti dei perimetri di base per le apoteme delle piramidi, oppure per la somma delle due apoteme di ciascuna delle piramidi regolari simili.

Ogni tronco di piramide a basi parallele essendo la differenza di due piramidi simili, ne segue che due o più tronchi di piramide a basi parallele sono simili quand' essi sieno la differenza di piramidi simili che tra loro formino una serie di rapporti eguali.

Le faccie laterali del tronco di piramide regolare essendo tanti trapezi isosceli eguali, nei quali l' altezza è l' apotema delle faccie laterali, così *la superficie laterale del tronco di piramide a basi parallele è eguale alla semisomma dei perimetri di base moltiplicata per l'altezza;* ovvero eguale alla superficie dello sviluppo ch'è una porzione di zona di poligono in cui i lati poligonali sono i perimetri di base del tronco, gli altri due lati l' apotema delle faccie.

Poliedri simili. — Ogni qualunque poliedro potendo venire scomposto in piramidi mediante delle diagonali tirate da un medesimo vertice, ne deriva che ogni poliedro, siccome di già venne detto, può ritenersi siccome un accozzamento di più piramidi. Due o più poliedri che sieno formati dall'accozzamento di un eguale numero di piramidi simili e similmente disposte, essi si dicono simili. Da ciò deriva che *due poliedri sono simili se sono terminati da uno stesso numero di faccie simili e similmente disposte.* Ora egli è evidente che essendo simili tutte le faccie omologhe di due poliedri simili, sarebbe dato di stabilire una serie di rapporti eguali, come fu fatto pella piramide, e quindi dalla medesima dedurre come la superficie totale del poliedro più grande sta alla superficie totale del poliedro più piccolo, come una faccia qualunque di un poliedro sta all' omologa nell'altro: e poichè ogni faccia sta all'omologa come i quadrati degli spigoli omologhi, così *le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli omologhi.* E poichè ancora, a causa della scomposizione in piramidi di cui è capace un poliedro, la ragione fra i quadrati degli spigoli omologhi dei poliedri simili essendo quella altresì dei quadrati degli spigoli omologhi delle piramidi simili in cui sono scomponibili, ed i quali spigoli sono diagonali nei poliedri, è dato di conchiudere in generale come *le superficie dei poliedri simili stanno fra loro come i quadrati degli spigoli e delle diagonali omologhe.*

Misura dei poliedri. — La misura dei poliedri è il vedere quante volte uno scelto per unità di misura è contenuto in altri dati, è la determinazione di ciò che chiamasi il *volume* di un

poliedro. Due poliedri che alla misura diano un eguale risultato, si dicono *equivalenti in volume o capacità.*

Egli è evidente, che conosciuto il numero di volte che un terzo poliedro qualunque è contenuto in un poliedro dato per unità di misura, ed il numero di volte che lo stesso terzo poliedro è contenuto in quello a misurare, una tale misura è precisamente determinata nel quoziente dei due numeri suddetti. Il problema della misura dei poliedri è quindi ridotto a trovarne il volume tenendone per unità di misura uno costante, fisso, poichè determinato i volumi di due o più corpi, e quindi quello dell' unità di misura data, che può sempre venire ad essere ridotto ad avere per valore uno, si avrà quello di qualsiasi poliedro. Ma la misura di un poliedro eseguendosi con cercarne la contenenza di quello unità di misura, egli è naturale che nessun mezzo può presentarsi più ovvio di quello della successiva sovrapposizione del poliedro unità, nel poliedro a misurare.

Ora bene è evidente che, quanto più il poliedro a misurare e quello unità di misura saranno simili, saranno semplici e saranno di forma tale, che immaginato un accozzamento di diverse unità di misura, questo possa venire a formare il più possibilmente il poliedro a misurare, viemaggiormente sarà possibile la sovrapposizione, e quindi la desunzione della contenenza dell'uno nell' altro. Il cubo essendo un poliedro regolare, essendo determinato con un solo elemento, ed i suoi spigoli rappresentando la direzione delle tre dimensioni, egli è perciò l'unità di misura che più adatta sia ad essere portata in un qualunque poliedro, epperciò si supporranno dapprima di avere due cubi, dei quali uno per unità di misura, l'altro quello a misurare, ed infine si vedrà la determinazione del volume di un corpo o poliedro qualsiasi con unità di misura costantemente un cubo, che per l' appunto è l' operazione che chiamasi volgarmente col nome di *cubatura* dei corpi, e che compendia la risoluzione generale della misura dei poliedri.

Misura del cubo. — Il cubo A B C D E F G H (Fig. 24, Tavola XXXVI) essendo quello proposto alla misura con unità l'altro cubo A P R S V T Q L, è dato di vedere che ove immaginisi il cubo unità di misura collocato nel cubo a misurare, in modo che tre faccie dell'uno riposino su tre faccie dell'altro, come nella figura, indi condotto un piano che contenga la faccia P R V Q,

siccome questa faccia è parallela all'altra faccia A S T L del medesimo cubo, il piano condotto risulterà parallelo alla faccia A D H G, sulla quale quella A S T L interamente vi riposa, e separerà dal cubo a misurare, un parallelepipedo rettangolo avente una faccia A D H G eguale e comune con detto cubo, e le altre due faccie A P I G, A P O D che determinano l'angolo solido A, due rettangoli eguali, i cui lati sono i due lati dei due cubi, e ciò perchè l'intersezione di qualsiasi piano parallelo ad una faccia del cubo presa per base, colle faccie laterali, è sempre nelle medesime una retta parallela agli spigoli per i quali non passa il piano.

Supponendo ora che il lato del cubo a misurare sia un multiplo esatto del lato del cubo unità di misura, cioè come dopo portato il lato A P del cubo unità, successivamente sul lato A B del cubo a misurare, esso vi sia stato contenuto quattro volte esattamente, e quindi per i diversi punti di divisione 2, 3, immaginato condotti dei piani paralleli a quello stato condotto pel punto P, parallelamente cioè alla faccia A D H G, il cubo a misurare risulta scomposto in tanti parallelepipedi eguali quante sono le unità da cui è espressa la misura del lato A B, essendochè tutti i diversi parallelepipedi hanno eguale base, eguale essendo sempre la sezione fatta in un cubo da un piano parallelamente ad una faccia, ed hanno poi eguale altezza, questa essendo costantemente l'unità di misura, vale a dire il lato del quadrato unità di misura. Onde, conosciuto il volume di ciascuno dei parallelepipedi in cui venne scomposto il cubo a misurare, il prodotto di un tale volume per la misura del lato A B è il volume intiero del cubo proposto.

Osservando ora che se conducesi nel cubo a misurare un piano che contenga la faccia L Q V T del cubo unità, siccome detta faccia è parallela a quella A P R S, ed il piano condotto è perciò parallelo alla faccia A B C D del cubo a misurare, sulla quale quella A P R S riposa intieramente, vedesi ben tosto come un tal piano separi da ognuno dei parallelepipedi in cui si è precedentemente scomposto il cubo a misurare, un parallelepipedo rettangolo come quello A P Q L O D X N, nel quale le tre dimensioni che lo determinano sono A D, A L, A P, cioè un parallelepipedo avente per base un quadrato che è una faccia del cubo unità, e per altezza il lato del cubo a misurare. Ora bene, nel cubo essendo tutti eguali tra loro gli spigoli, è evidente che portato il lato del cubo unità

sul lato A G, esso vi è contenuto un eguale numero di volte che in A B, e quindi è possibile di tracciare nel cubo a misurare e pello spigolo A G parallelamente alla faccia A B C D, altrettanti piani quanti ne furono tracciabili pello spigolo A B e parallelamente alla faccia A D H G; inoltre, essendo come si è supposto, A B un multiplo esatto di A P, anche A G è multiplo esatto di A L, i piani tracciati pello spigolo A G avranno scomposto ciascuno dei primitivi parallelepipedi in tanti altri secondarii eguali quante sono le unità contenute nella misura di A G, per cui ove si conoscesse il volume di uno degli ultimi parallelepipedi ottenuti, un tale volume moltiplicato per la misura del lato A G del cubo a misurare è il volume dei primitivi parallelepipedi, e siccome venne detto, un tale volume poi moltiplicato nuovamente per la misura di A B, cioè pello stesso numero che esprime la misura di A G, somministra il volume del cubo proposto, così si dirà essere il volume del cubo in questione eguale al volume di uno dei parallelepipedi secondari in cui venne scomposto il cubo a misurare, moltiplicato per la seconda potenza o quadrato della misura del lato.

Osservando per ultimo che se conducesi un piano che contenga la faccia S R V T, essendo questa faccia parallela alla faccia A P Q L, epperciò il piano condotto parallelo alla faccia A B E G sulla quale intieramente riposa quella A P Q L, è dato di vedere come un tale piano separi da ognuno dei parallelepipedi secondari in cui venne precedentemente scomposto il parallepipedo a misurare, un parallelepipedo eguale a quello A P Q L R V T S, eguale cioè al cubo unità di misura. Ora bene, essendo eguali tra loro i lati del medesimo cubo, portando su di A D il lato del cubo unità, si avrà che esso vi è contenuto un eguale numero di volte che lo fu in A B ed in A G, e poichè fu supposto A B un multiplo esatto di A P, così anche A D è multiplo esatto di A S, per cui dai diversi punti di divisione dello spigolo A D facendo passare dei piani costantemente paralleli alla faccia A B E G del cubo a misurare, si avrà che questi piani avranno scomposto ognuno dei parallelepipedi secondari in tanti cubi eguali al cubo di misura quante sono le unità contenute nel numero che esprime la misura del lato A D, cosicchè il volume di ognuno dei parallelepipedi secondari è eguale al numero che esprime la misura del lato A D, ma poichè questo

numero è l'identico di quello che esprime la misura del lato A B, così si ha che il volume di uno dei parallelepipedi secondari è eguale alla misura del lato del cubo proposto, e conseguentemente a quanto venne detto, un tale volume moltiplicato pel quadrato della misura del lato del cubo proposto, dando il volume dell'intiero cubo, così si ha che *la terza potenza o cubo della misura del lato di un cubo il cui lato sia un multiplo esatto del lato del cubo unità di misura, è l'espressione del suo volume.* Nel caso concreto, la misura del lato del cubo era 4, il volume di quel cubo è perciò $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$, e si ha occasione di verificare questo risultato nella figura stessa, essendo il cubo della Fig. 1 rappresentato in assonometria, epperciò lasciando visibili i 64 cubi unità di misura in esso contenuti e che formano la sua misura.

Dato quindi un cubo il cui lato sia un multiplo esatto del lato del cubo unità di misura, ecco che la sua misura o volume è la terza potenza o cubo della misura del proprio lato. Restano perciò a considerare i due casi diversi, quelli cioè in cui il lato del cubo dato abbia o non abbia col lato del cubo unità di misura una comune misura.

Nel primo caso, esistendo una comune misura fra il lato del cubo dato e quello unità, è evidente che essendo l una tale comune misura contenuta n volte nel lato del cubo unità ed m volte nel lato del cubo dato, si abbia con immaginare un cubo di lato l, che il volume del cubo dato in virtù del caso precedente è eguale a $(m\, l)^3$, e quello del cubo unità eguale a $(n\, l)^3$, e quindi il volume del cubo dato in funzione di quello unità di misura eguale a $\frac{m^3\, l^3}{n^3\, l^3}$, ovvero a $\frac{m^3}{n^3}$. Ma poichè $\frac{m\, l}{n\, l} = \frac{m}{n}$ è la misura del lato del cubo proposto, così è reso evidente che *il volume di un cubo il cui lato ha col lato del cubo unità di misura una comune misura, è eguale alla terza potenza o cubo della misura del proprio lato.*

Nel secondo caso, non esistendo una comune misura fra il lato del cubo dato e il lato di quello unità di misura, suppongasi portato il lato del cubo unità di misura successivamente su di tre spigoli concorrenti in un medesimo angolo solido, esso vi sarà rimasto contenuto egualmente in tutti e tre gli spigoli ed un numero m di volte più una frazione p incommensurabile, oppure $m + 1$ volta meno un'altra frazione t pure incommensurabile, e

quindi per i diversi punti di divisione di ciascuno dei tre sopradetti spigoli condotti dei piani paralleli alle faccie determinate dagli altri due spigoli, tali piani si intersecheranno lasciando il volume del cubo dato in virtù dei casi precedenti compreso fra m^3 e $(m+1)^3$. Egli è ora evidente che se avvece del cubo unità di misura si fosse portato sui tre spigoli del cubo una parte aliquota del lato del cubo unità di misura, le espressioni che darebbero i volumi dei due cubi, l'uno il minimo maggiore, l'altro il massimo minore del cubo dato, ed aventi col lato del cubo unità di misura una comune misura, sarebbero state più vicine all' espressione vera del cubo dato, e di tanto più vicine alla misura del cubo dato quanto più piccola la parte aliquota del lato del cubo unità di misura che si sarà portato sui tre spigoli e che formerà la comune misura fra il lato del cubo unità di misura ed il lato dei due cubi sopradetti. Ora bene è chiaro che, se si volesse supporre che la terza potenza della misura del lato di un dato cubo, esprimesse un volume più grande o più piccolo del vero, occorrerebbe ammettere l'assurdo che il cubo di due quantità diverse, fosse maggiore quello formato su di una quantità minore, essendochè potendo sempre per quanto si disse, trovare due cubi, l'uno maggiore del cubo dato, l' altro minore, ed entrambi maggiori o minori di una quantità infinitamente piccola, e però tali che il loro lato sia in comune misura col lato del cubo unità di misura, ed il loro volume in virtù dei casi precedenti, determinato colla terza potenza o cubo della misura del lato, così ad ogni quantità piccola finchè si voglia, farsi più grande o più piccolo del volume del cubo dato, la terza potenza della misura del lato, essendo sempre possibile trovare in ambi i casi un cubo di volume più piccolo o più grande, ed il cui lato è dimostrato pel fatto della comune misura più grande o più piccolo, rendesi evidente come un volume, più grande o più piccolo del cubo a misurare, e più piccolo o più grande del volume a cui vogliasi fare ascendere la terza potenza del lato del cubo dato, essendo eguale alla terza potenza di una quantità più grande o più piccola del lato del cubo, non possa la terza potenza della misura del lato di un cubo esprimere un volume più grande o più piccolo di quello di altro cubo di lato maggiore o minore, e conseguentemente esso abbia ad esprimere il vero volume. Puossi quindi conchiudere come *il volume di un*

cubo è eguale alla terza potenza o cubo della misura del suo lato. Così L essendo il lato di un cubo, L^3 ne è l'espressione del volume V.

Misura del parallelepipedo. — Un parallelepipedo potendo essere o rettangolo, oppure avere per base un rettangolo ed essere obliquo, oppure essere solo retto, od infine essere solo obliquo, così suppungasi nella ricerca della misura tutti i suddetti casi di parallelepipedi.

Il parallelepipedo rettangolo A B C D E F G H (Fig. 2) essendo quello proposto a misurare con unità di misura il cubo, il cui lato è A 1, si immagini, collocato quest'ultimo nel parallelepipedo a misurare, in modo che tre faccie abbiano a riposare su tre faccie di quello, indi condotto nel parallelepipedo un piano che contenga la faccia del cubo unità di misura che è parallela ad A B C D, che si vedrà risultare da questa sezione un parallelepipedo avente la medesima base di quello dato, e per altezza il lato del cubo unità di misura. Ciò posto, suppongasi che il lato del cubo unità di misura sia contenuto un numero intiero di volte, sia nel lato A B quanto in quello A D, del parallelepipedo a misurare.

Poichè tante sono le volte che il lato del cubo unità di misura è contenuto nello spigolo A B, altrettanti sono i piani ch'è possibile di tracciare perpendicolarmente alla base A B C D, ed altrettante le parti nelle quali scompongono il parallelepipedo avente per base A B C D e per altezza il lato del cubo unità di misura, ognuna delle quali parti è un parallelepipedo avente per altezza il lato del cubo unità di misura e per larghezza il lato A D; e medesimamente tante sono le volte che il lato del cubo unità di misura è contenuto nel lato A D del parallelepipedo dato, altrettanti sono i piani che perpendicolarmente alla base A B C D è dato di condurre, ed altrettanti sono le parti in cui ognuno degli ultimi parallelepipedi che si erano ottenuti viene scomposto, ognuna di dette parti essendo un parallelepipedo avente una lunghezza, larghezza ed altezza eguale al lato del cubo unità di misura, epperciò un cubo eguale a quello unità di misura, ogni parallelepipedo avente per base un rettangolo i cui lati sieno multipli esatti del lato del cubo unità di misura, ed avente per altezza il lato del detto cubo, è eguale al prodotto della misura dei due lati di base, eguale cioè ad A B $\times$ A D.

Nel caso in cui il lato del cubo unità di misura sia contenuto un numero esatto di volte nello spigolo A F, essendo possibile la scomposizione del parallelepipedo dato, in tanti parallelepipedi aventi per base quella A B C D e per altezza il lato del cubo unità di misura, il volume di ognuno dei quali è A B $\times$ A D, è evidente che un tale numero di volte essendo la misura dello spigolo A F con unità il lato del cubo unità, è il volume dell' intiero parallelepipedo rettangolo eguale al prodotto della misura di A F per A B $\times$ A D, ovvero il prodotto dei tre spigoli concorrenti in un medesimo angolo solido. Ma nel caso in cui il lato del cubo non sia contenuto un numero esatto di volte nello spigolo o lato A F del parallelepipedo rettangolo in questione, in allora possono darsi i due casi, cioè che fra lo spigolo A F ed il lato del cubo unità di misura esista una comune misura, oppure che non esista, sieno cioè due rette incommensurabili.

Considerando il caso in cui fra lo spigolo A F ed il lato del cubo unità di misura vi esista una comune misura, è dato di vedere, come portando detta comune misura l sullo spigolo A F del parallelepipedo, che vi sarà contenuta un numero esatto m di volte, e poscia immaginando condotti tanti piani paralleli alla base A B C D, venga il medesimo scomposto in m parallelepipedi eguali, eguali per avere eguale base, stante l' eguaglianza delle sezioni fatte in un parallelepipedo mercè delle sezioni parallele alla faccia A B C D, ed eguale l' altezza per essere questa in tutti la comune misura.

La comune misura essendo contenuta anche un numero n esatto di volte nel lato del cubo unità di misura, ne avviene che il parallelepipedo avente per base quella A B C D del parallelepipedo e per altezza il lato del cubo unità di misura, conterrà n parallelepipedi aventi la medesima base del parallelepipedo in questione e per altezza la comune misura, sicchè il volume del parallelepipedo proposto è al volume del parallelepipedo avente la stessa base A B C D, e per altezza il lato del cubo unità di misura, nello stesso rapporto di $m : n$, vale a dire nel rapporto della quantità di parallelepipedi eguali che ciascuno di essi contiene. Ora bene, il parallelepipedo avente per base A B C D e per altezza il lato del cubo unità di misura, il suo volume essendo eguale ad A B $\times$ A D, ne risulta che ogni parallelepipedo avente per base A B C D e per

altezza la comune misura, il suo volume è espresso da $\frac{A\,B \times A\,D}{n}$, e poichè di tali parallelepipedi ve ne sono m nel parallelepipedo A B C D E F G H, così è il volume di questo, eguale ad $\frac{A\,B \times A\,D \times m}{n}$. Ma $l\,m$ essendo il lato A F del parallelepipedo in questione, $l\,n$ il lato del cubo unità di misura, epperciò A F $= \frac{l\,m}{l\,n} = \frac{m}{n}$, così è il volume del parallelepipedo rettangolo proposto eguale ad A B $\times$ A D $\times$ A F, vale a dire eguale al prodotto della misura dei tre lati.

Considerando per ultimo il caso in cui tra il lato A F del parallelepipedo a misurare ed il lato del cubo unità di misura non esista comune misura, siano cioè due rette incommensurabili, risulta, come portato sullo spigolo A F successivamente il lato del cubo unità di misura, sarà lo spigolo A F eguale a sei volte il lato del cubo unità di misura, più la frazione incommensurabile 6 F, oppure eguale a sette volte la medesima quantità, meno la frazione incommensurabile 7 F. Ora bene è evidente che, ove si volesse supporre che il volume del cubo proposto fosse eguale ad A B $\times$ A D $\times$ A N, oppure ad A B $\times$ A D $\times$ A P, cioè eguale al prodotto dell'area della base per un lato maggiore o minore di A F: siccomechè per il caso precedente si ha che il volume di un parallelepipedo avente la medesima base e per altezza A 6, oppure A 7, il volume del primo è minore di quello proposto, e quello del secondo è maggiore, così nè il prodotto A B $\times$ A D $\times$ A F può dare un risultato inferiore a quello A B $\times$ A D $\times$ A 6 ed a forziori minore dell' altro A B $\times$ A D $\times$ A P, nè parimenti il prodotto A B $\times$ A D $\times$ A F può dare un risultato maggiore di quello A B $\times$ A D $\times$ A 7 ed a forziori minore dell'altro A B $\times$ A D $\times$ A N, per cui il prodotto A B $\times$ A D $\times$ A F non può esprimere un volume nè più grande nè più piccolo di quello del parallelepipedo proposto, e quindi il volume del parallelepipedo proposto è eguale al prodotto della misura dei tre lati che lo determinano.

Il volume di un parallelepipedo rettangolo qualsiasi essendo determinato col prodotto della misura di uno spigolo pel volume di altro parallelepipedo avente un' altezza eguale all' unità di misura, è evidente come sarà determinato il volume di un parallelepipedo

qualsiasi allorquando sia determinato il volume di un parallelepipedo qualsiasi avente la medesima base e per altezza il lato del cubo unità di misura. Per ciò, siccome se si ha un parallelepipedo rettangolo che abbia per altezza il lato del cubo a misurare, esso può venire scomposto mediante piani paralleli all'altezza e paralleli ad una faccia, in parallelepipedi che conservando la lunghezza del parallelepipedo in questione, abbiano una larghezza che sia, come pel caso già stato contemplato, eguale al lato del cubo di misura, oppure eguale ad una comune misura fra il lato del cubo unità di misura e la lunghezza del parallelepipedo in considerazione, così è dato di vedere per omologo ragionamento a quello del caso precedente, come dato il volume di un parallelepipedo che abbia un' altezza ed una larghezza eguale al lato del cubo unità di misura, un tale volume moltiplicato per la misura del lato che esprime la lunghezza pel parallelepipedo dato, dia il volume cercato. Ma siccome al volume di un parallèlepipedo avente per base il quadrato unità di misura, perviensi con ragionamento analogo a quello fatto per un parallelepipedo avente per base quella A B C D e per altezza A F, a vedere come sia eguale al volume di un parallelepipedo di medesima base e di altezza l' unità di misura lineare moltiplicata per la misura di quello spigolo, così il parallelepipedo avente per base il quadrato, ossia una faccia del cubo unità di misura, e per altezza l' unità di misura lineare, ossia il cubo unità di misura moltiplicato pella misura del lato diseguale, ossia quella stessa misura, è dato concludere come in generale *il volume di un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della misura dei tre spigoli che concorrono in un medesimo angolo solido*, e sono quelli che lo determinano.

Cosicchè essendo A, B, C i tre lati di un parallelepipedo, niuno dei quali sia parallelo ad uno qualunque degli altri due, è il volume $V = A \times B \times C$.

Trovato il volume della misura di un parallelepipedo rettangolo, vengasi a cercare quello di un parallelepipedo obliquo come A B C D M O N L, in cui la base A B C D sia un rettangolo.

Per i vertici A, B, C, D della base A B C D si innalzino delle perpendicolari sino all' intersezione del piano che contiene la base superiore L M N O del parallelepipedo a misurare; ne risulterà un parallelepipedo rettangolo A B C D E F G H, il quale ha la mede-

sima base del parallelepipedo proposto, ed altresì la medesima altezza, essendochè i due parallelepipedi sono compresi fra piani paralleli, e quindi la distanza fra i medesimi è costante per qualunque punto sia condotta una perpendicolare ad entrambi. Se quindi si immaginano prolungati gli spigoli G F, H E sino all'incontro del prolungamento degli spigoli L N, M O, si verrà a formare sempre nel piano della base superiore del parallelepipedo proposto, un rettangolo R S P Q eguale al rettangolo A B C D, poichè un rettangolo è la figura L M O N, un rettangolo è la figura H E F G, siccome basi opposte di parallelepipedi aventi per base il rettangolo A B C D, un rettangolo è infine R S Q P, perchè L N è parallelo ad A D, e conseguentemente parallelo ad H G, epperciò perpendicolare a G Q, così pure il suo parallelo P Q, ed essendo R P = N O, R S = H G, è il rettangolo A B C D = R P Q S. Ora bene è evidente che, se si conducono le rette A R, D S, B P, C Q, queste rette sono parallele tra loro, e quindi risulta un parallelepipedo A B C D R P Q S, il quale ha esso pure la medesima base del parallelepipedo proposto, nonchè la medesima altezza, per essere le sue basi sempre comprese nei piani paralleli in cui sono comprese le basi parallele tanto del parallelepipedo a misurare, quanto di quello rettangolo stato formato sulla base A B C D. Ciò posto, si osservino i due prisma triangolari retti F C Q E P B, G D S H R A, i quali avendo la medesima altezza perchè G H = F E, ed avendo la medesima base F C Q = G D S, perchè F C = G D, C Q = D S, siccome spigoli paralleli di un medesimo parallelepipedo, e l'angolo F C Q = G D S perchè corrispondenti, sono i detti due prisma, eguali tra loro; onde dall'intiero solido G Q C D H P A B, ch'è come può facilmente scorgersi, un prisma retto a base trapezia, immaginando tolto il primo prisma triangolare F C Q E P B, rimane il parallelepipedo rettangolo A B C D E F G H, che è equivalente in volume all'altro parallelepipedo obliquo A B C D R P Q S, che si ottiene togliendo dal medesimo prisma trapezio, l'altro prisma triangolare G D S H R A.

Medesimamente, i due prisma triangolari B M P A L R, C O Q D N S, avendo la base B M P = C O Q, perchè questi due triangoli hanno B M = C O, B P = C Q siccome spigoli paralleli di un parallelepipedo, inoltre gli angoli M B P, O C Q eguali perchè corrispondenti; ed avendo inoltre l'altezza M L = Q S siccome L S pa-

rallelo ad M Q, essi sono eguali; onde eguali sono pure i resti che si ottengono col togliere dal prisma trapezio B C M Q A D L S, prima uno, poscia l'altro di essi, cioè il parallelepipedo A B C D L M O N equivalente in volume col parallelepipedo A B C D R P Q S, e poichè questo ultimo è equivalente con quello A B C D E F G H, così sono equivalenti in volume i due parallelepipedi A B C D E F G H, A B C D L M O N.

Ora il volume del parallelepipedo A B C D E F G H essendo espresso dal prodotto A B $\times$ A D $\times$ A H, il medesimo prodotto esprime pure quello dei due parallelepipedi A B C D R P Q S, A B C D L M O N; e poichè questi ultimi due hanno per base un rettangolo, e quindi è l'area del medesimo eguale ad A B $\times$ A D, e poichè ancora l'altezza dei medesimi è eguale in entrambi ed è rappresentata da una retta perpendicolare alle due basi che per qualunque punto condotta sarà eguale ad A H, così si dice che *il volume di un parallelepipedo qualunque avente per base un rettangolo, è eguale all'area della base moltiplicata per l'altezza del parallelepipedo.*

A questo medesimo risultato è ancora dato di pervenire allorquando si immaginino prolungati i lati M L, O N sino all'incontro dei lati G H, F E prolungati, del parallelepipedo rettangolo costrutto sulla base di quello dato e di altezza pari a questo, dai quali prolungamenti si ha un rettangolo K U T I, il quale è eguale a quelli L M O N, H E F G, epperciò eguale anche a quello A B C D, e perchè contenuto in un piano parallelo a quest'ultimo, dalle rette K A, I D, T C, U B, determinato nel solido A B C D K U T I un parallelepipedo il quale ha la medesima base A B C D di quello dato e di quello rettangolo costrutto su detta base, e la stessa altezza di quello dato, epperciò di quella del parallelepipedo rettangolo stato costrutto: ed allorquando si osservi che i tre parallelepipedi A B C D E F G H, A B C D K U T I, A B C D L M O N sono equivalenti in volume per essere i due primi la differenza tra il prisma trapezio A D G K B C F U ed ognuno dei due prisma triangolari eguali A H K B E U, D I C G T F, ed i due ultimi la differenza fra il prisma trapezio A B M K D C O I ed ognuno dei due prisma triangolari eguali U M B T C O, K A L I D N; perchè essendo i tre parallelepipedi suddetti equivalenti in volume, e quello rettangolo eguale al prodotto di A B $\times$ A D $\times$ A H, nel quale ri-

manendo costanti nel parallelepipedo dato i due fattori A B $\times$ A D, è il terzo fattore l'altezza, e quindi il prodotto dell'area della base per l'altezza l'espressione del volume del parallelepipedo proposto.

Considerisi per ultimo alla misura un parallelepipedo qualsiasi, quale quello ABLKGENI (Fig. 27), la cui base ABKL è un parallelogramma romboide. Ogni parallelogramma essendo equivalente ad un rettangolo di medesima base ed altezza, ne segue che se nella base ABLK del parallelepipedo dato, si abbassano da due vertici A e B, due perpendicolari come A D, B C sul lato L K, il rettangolo A B C D risultante è equivalente al parallelogramma A B L K. Ciò posto, se si immagina formato sul rettangolo A B C D un parallelepipedo, gli spigoli del quale sieno paralleli agli spigoli di quello dato, e che abbia per altezza l'altezza di questo, poichè il prisma triangolare A D K G H I è eguale al prisma triangolare B C L E F N come avente la medesima altezza, e di più la base A D K eguale alla base B C L, queste essendo due triangoli aventi A D = B C come lati opposti di un rettangolo, A K = B L come lati opposti di un parallelogramma, l' angolo D A K = C B L perchè corrispondenti; le differenze fra il prisma trapezio A D L B G H N E ed ognuno dei due prisma triangolari suddetti, sono eguali, epperciò il parallelepipedo A B L K G E N I è equivalente in volume col parallelepipedo A B C D E F G H avente per base un rettangolo. Ora bene, il volume di un parallelepipedo avente per base un rettangolo, essendo eguale al prodotto dell'area della base per l' altezza, ed essendo eguale a quello di un parallelepipedo di medesima altezza e di base equivalente, è così dato di conchiudere in generale come *il volume di un parallelepipedo qualsiasi è eguale al prodotto dell'area della base per l'altezza.* Cosicchè, essendo B la base di un parallelepipedo ed H l'altezza, è il volume $V = B \times H$.

Relazione cubica fra due parallelepipedi. — La relazione cubica fra due o più parallelepipedi, cioè la relazione del volume di due o più parallelepipedi, dipende, come non può a meno di dipendere, che da quegli elementi stessi che ai detti volumi sono fattori. Restano perciò a considerare le relazioni correnti fra due e quindi fra più parallelepipedi, dapprima aventi base equivalente, in seguito aventi eguale altezza, e per ultimo aventi nè base equivalente nè eguale altezza.

Ogni qualunque parallelepipedo, essendo equivalente in volume

ad altro di medesima altezza, avente per base un rettangolo equivalente; ed essendo equivalente ancora ad un parallelepipedo rettangolo di medesima altezza e di base equivalente, così due o più parallelepipedi di base equivalente, tutti essendo equivalenti in volume a parallelepipedi rettangoli aventi base equivalente e di più eguali, ed aventi per altezza ciascuno la medesima di quella dei parallelepipedi dati, è il rapporto di volume fra questi, eguale a quello corrente fra parallelepipedi rettangoli di eguale base e di diversa altezza.

Ma due parallelepipedi aventi eguale base, essendo possibile immaginarli collocati l'uno entro l'altro, in modo che coincida la base eguale, che coincida cioè la faccia eguale, è il quesito del rapporto di due parallelepipedi aventi base equivalente, condotto alla determinazione del rapporto di due parallelepipedi rettangoli, come quelli A B C D E F H G, A B T U E F X V (Fig. 28). Ma poichè nella supposizione che B U sia unità di misura, per quanto venne detto alla misura del parallepipedo, il rapporto fra i due suddetti parallelepipedi è dato dal rapporto corrente fra l'unità e la misura di B C con detta unità, così si ha che *i volumi dei parallelepipedi di base equivalente stanno fra loro come le loro altezze.* Questa relazione è diretta, sapendo che il volume di un parallelepipedo è eguale al prodotto della base per l'altezza, poichè due prodotti $B \times H$, $B \times H'$, nei quali B è una superficie, H ed H' due linee, esprimendo due volumi, il loro rapporto è $\frac{B \times H}{B \times H'}$, ovvero $\frac{H}{H'}$, cioè quello delle altezze.

Medesimamente, due parallelepipedi qualunque essendo equivalenti in volume con due altri rettangoli, ciascuno di medesima base e di medesima altezza a quelli dati, il rapporto corrente fra due parallelepipedi di medesima altezza, è quindi eguale a quello corrente fra due altri rettangoli di medesima altezza e di diversa base.

Orbene, essendo A B C D E F G H, I L N K R Q P S due parallelepipedi rettangoli aventi la medesima altezza B F = L Q, è dato di vedere come il rettangolo I L N K sia trasformabile in altro rettangolo T U C D equivalente, e quindi il parallelepipedo I L N K R Q P S equivalente in volume col parallelepipedo T U C D V X G H; ma questo parallelepipedo avendo con quello A B C D E F G H una faccia eguale, la quale può essere presa per base, così è dato di

potere dire come i due parallelepipedi A B C D E F G H, T U C D V X G H stando tra loro nel rapporto di C B a C U, e quindi in quello dei due rettangoli A B C D, T U C D siccome di medesima altezza, così anche il parallelepipedo I L N K R Q P S sta a quello A B C D E F G H come C U sta a C B, ovvero come A B C D sta alla base I L N K. Onde ***i volumi di parallelepipedi aventi eguale altezza stanno tra loro nel rapporto delle aree delle loro basi.*** Questa relazione pure è evidente, sapendo essere il volume di un parallelepipedo eguale al prodotto dell'area della sua base per la sua altezza, poichè B, B' essendo le basi di due parallelepipedi aventi la medesima altezza H, i loro volumi sono $B \times H$, $B' \times H$, il loro rapporto $\frac{B \times H}{B' \times H}$, ossia $\frac{B}{B'}$, quello cioè delle loro basi.

Considerando per ultimo due parallelepipedi qualunque, si hà, che essi essendo equivalenti in volume a due parallelepipedi rettangoli aventi ciascuno la base e l'altezza di quelli dati, il loro rapporto è identico con quello corrente cogli ultimi, per cui è a questi condotta la ricerca della relazione desiderata. Essendo A B C D E F G H, I K L C P O N Q (Fig. 29) due parallelepipedi rettangoli di diversa base e di diversa altezza, si ha che immaginando prolungato il parallelepipedo I N sino all'incontro della base superiore E F G H dell'altro, si viene ad ottenere un parallelepipedo I S, il quale ha la medesima altezza di quest'ultimo, ed una medesima base di quello I N, per cui in virtù delle relazioni precedenti è dato di potere stabilire le due proporzioni

$$AG : IS :: DC \times CB : CL \times LK$$

$$IS : IN :: CG : CQ$$

che moltiplicate termine a termine, danno per prodotto la proporzione

$$AG \times IS : IS \times IN :: DC \times CB \times CG : CL \times LK \times CQ$$

che divisa nella prima ragione per I S, dà per risultato

$$AG : IN :: DC \times CB \times CG : CL \times LK \times CQ$$

cioè: due parallelepipedi A G, I N, stanno tra loro nel rapporto delle espressioni dei loro volumi. Onde *i volumi dei parallelepipedi stanno tra loro come i prodotti delle rispettive aree di base per le rispettive altezze.*

Misura del prisma. — Ogni prisma triangolare essendo la metà di un parallelepipedo di medesima altezza e di base un'area doppia, è così il volume di un prisma triangolare eguale al prodotto dell'area della sua base per la sua altezza.

Ogni qualunque prisma essendo scomponibile mediante piani passanti per un medesimo spigolo laterale e per altro spigolo laterale non adiacente alla medesima faccia, in $n-2$ prisma triangolari, essendo n il numero di lati della base del prisma dato, ne segue che altresì *il volume di un prisma qualunque è eguale al prodotto dell'area di una base per la sua altezza,* cosicchè essendo B la base di un prisma ed H l'altezza, è il volume $V = B \times H$.

Da questa espressione del volume del prisma derivasi: 1.° *due prisma sono equivalenti quando hanno egual base ed eguale altezza,* 2.° *due prisma di basi equivalenti stanno tra loro come le loro altezze,* 3.° *due prisma di eguale altezza stanno tra loro come le aree delle loro basi.*

Misura della piramide. — Determinata l'espressione del volume di un prisma, non resta che di vedere qual parte è di un prisma una piramide, onde poterne determinare l'espressione del volume di quest'ultima. Ciò posto, poichè se si ha un prisma triangolare qualunque A B C D E F (Fig. 30), e in esso si conduce un piano che passi per esempio pello spigolo A B e pel vertice D, questo piano taglia la faccia B C D F secondo la retta D B, la faccia A C D E secondo la retta D A, e dà nella sezione A B D un triangolo, in tal modo scomponendo il prisma triangolare in due parti, l'una una piramide triangolare avente per base quella A B C del prisma e per altezza quella del prisma, l'altra una piramide quadrangolare A B F E D, la quale ultima piramide è scomponibile a sua volta mercè altro piano che passi pello spigolo F D e pel vertice A in due altre piramidi, però entrambe triangolari, l'una E F D A avente per base la base superiore del prisma e per altezza quella del prisma, l'altra B F D A avente pure medesima base ed altezza di quella del prisma, essendochè tale è la piramide costrutta sulla stessa base B F D e col vertice nel punto E su di una parallela A E alla base,

locchè stabilisce un'eguale altezza, così è dato di vedere come la piramide triangolare è eguale alla somma di tre piramidi aventi una base ed un'altezza eguale a quella del prisma.

Rimane ora a vedere come sieno in volume due o più piramidi, le quali abbiano eguale base ed eguale altezza. Per ciò, immaginisi divisa l'altezza eguale di due o più piramidi, in un eguale numero di parti eguali, e poscia condotti dai singoli punti di divisione, dei piani paralleli alle basi. A seguito della conoscenza in cui si è della figura di sezione risultante dal condurre dei piani parallelamente alla base di una piramide, è agevole il capire come i piani condotti nell' indicato senso danno delle figure rispettivamente eguali, e scompongono le piramidi in un eguale numero di parti, le quali sono tutte, ad eccezione di una, dei tronchi di piramide. Ora bene, ogni tronco di piramide essendo minore del prisma di eguale altezza e avente per base quella inferiore, ed essendo maggiore del prisma di eguale altezza ed avente per base quella superiore, è il volume di due o più piramidi di eguale base ed eguale altezza compreso fra la somma di un eguale numero di prisma di eguale base ed eguale altezza, ed altra somma di altri prisma pure di eguale base ed eguale altezza.

La differenza fra il volume di un tronco di piramide e di un prisma avente la stessa altezza, e per base o la base inferiore o quella superiore, diminuendo col diminuire l'altezza dei due corpi, in guisa che è possibile la scomposizione di una piramide in tronchi di piramide, i cui volumi abbiano a differire da quelli dei prismi nel senso in discorso di una quantità più piccola di qualsiasi quantità data, così due o più piramidi di eguale base e di eguale altezza potendo venire scomposti in tronchi di piramidi per modo che la differenza fra il loro vero volume e quello dei prismi a cui si vogliono ritenere formate, sia tanto in più quanto in meno sempre minore di qualsiasi quantità data, e per ciò sempre minore di qualsiasi quantità a cui si volesse supporre più grande o più piccolo il volume di due piramidi di eguale base ed eguale altezza, così è duopo conchiudere che il volume di due o più piramidi di eguale base e di eguale altezza sono eguali, o per meglio dire *sono equivalenti tra loro le piramidi di eguale base ed eguale altezza.*

Il volume di un prisma triangolare essendo eguale al prodotto dell'area della sua base per l'altezza, il volume di ognuna delle tre

piramidi in cui può venire scomposto, sarà naturalmente espresso dal prodotto dell'area della base per il terzo dell'altezza.

Sicchè nello stesso modo che ogni prisma triangolare può essere considerato siccome la metà di un parallelepipedo di eguale altezza e di doppia base, così ogni piramide triangolare può considerarsi siccome la terza parte di un prisma triangolare di eguale base ed eguale altezza. Ma essendo il volume di una piramide triangolare eguale al prodotto dell'area della sua base per il terzo della sua altezza, ed ogni qualsiasi piramide potendo considerarsi siccome l'assieme di tante piramidi triangolari di medesima altezza quanti sono i lati della base diminuito di due, così è dato di vedere come il volume di una piramide qualunque essendo la somma di tanti prodotti aventi un fattore comune nell'altezza, esso può venire espresso dal prodotto del fattore comune colla somma degli altri fattori, onde è dato di dire come *il volume di una piramide qualunque è eguale al prodotto dell'area della base per la terza parte dell'altezza.* Cosicchè essendo B la base di una piramide, H l'altezza, è il volume $V = B \times \frac{H}{3}$.

Nella piramide regolare l'altezza cadendo nel centro del poligono regolare di base, è l'altezza di una piramide regolare il cateto di un triangolo rettangolo avente per l'ipotenusa il lato della piramide e per altro cateto il raggio del circolo circoscritto al poligono di base. Ora, il raggio del circolo circoscritto ad un poligono regolare essendo eguale, come si ha dal quadro del libro terzo, ad $\frac{1}{2}\sqrt{4P^2 + l^2}$, così ricavasi essere l'altezza di una piramide

$$H = \sqrt{L^2 - \frac{1}{2}\sqrt{4p^2 + l^2}}$$

ed in conseguenza il volume

$$V = \frac{n\,l\,p}{2} \times \frac{1}{3}\sqrt{L^2 - \frac{1}{2}\sqrt{4p^2 + l^2}} = \frac{1}{12}\,n\,l\,p\sqrt{4L^2 - 2\sqrt{4p + l^2}}$$

formola che somministra il volume della piramide regolare in funzione del suo lato L, di quello della base *l*, del numero *n* di lati di base e dell'apotema *p* della base.

Il tetraedro regolare essendo una piramide, nella quale la base è un triangolo equilatero di lato L, in cui perciò la sua area è $\frac{1}{4} L^2 \sqrt{3}$ (pag. 213), e nella quale l'altezza è $\frac{1}{3} L \sqrt{6}$ (pag. 452), il suo volume è espresso da $\frac{1}{4} L^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{9} L \sqrt{6} = \frac{1}{36} L^3 \sqrt{18}$, e poichè $18 = 2 \times 9$, in cui 9 è un quadrato perfetto, così si ha $\frac{1}{36} L^3 \sqrt{2 \times 9} = \frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}$, cioè *il volume di un tetraedro regolare è eguale al dodicesimo del prodotto della radice quadrata del numero due per il cubo del lato.*

L'ottaedro regolare essendo l'assieme di due piramidi a base quadrata, nelle quali l'altezza è la metà di una diagonale, ed il lato di base è il lato dell'ottaedro, è dato perciò di ricavare essere in un ottaedro regolare di lato L il volume

$$V = 2 \times \left\{ L^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} L \sqrt{2} \right\} = L^2 \times \frac{1}{3} L \sqrt{2} = \frac{1}{3} L^3 \sqrt{2}$$

cioè *il volume dell' ottaedro regolare è eguale al terzo del prodotto della terza potenza del suo lato pella radice quadrata del numero due.*

Misura del tronco di prisma. — Un tronco di prisma il cui numero di lati di base sia *n*, essendo scomponibile in *n* — 2 tronchi di prisma triangolari mercè dei piani passanti costantemente per uno spigolo laterale e per altro spigolo laterale non adiacente alla medesima faccia, il quesito della misura di un tronco di prisma è quindi condotto a quello della misura di un tronco di prisma triangolare.

Ma essendo A B C D E F (Fig. 31) un tronco di prisma triangolare, è dato di vedere come un piano passante per il vertice F e per lo spigolo A C tagliando la faccia B C D F secondo F C, quella B A F E secondo F A, lo scomponga in due piramidi, l'una triangolare A B C F avente per base quella A B C del tronco e il vertice in F, l'altra quadrangolare A C D E, che mediante un piano condotto per i tre vertici F, E, C, è scomposta in altre due piramidi, l'una E D C F equivalente a quella A C D B come avente la base E D C = A C D perchè due triangoli aventi la medesima base C D e la medesima altezza, essendo i vertici E ed A su di una parallela

a C D, e la medesima altezza siccome il vertice B collocato su di una parallela al piano E D C A passante pel vertice F, l' altra E A C F equivalente a quella E A C B come avente la medesima base E A C e la medesima altezza siccome il vertice B collocato su di una parallela al piano E A C passante pel vertice F. Queste due ultime piramidi considerate come aventi per base la faccia A B C base del tronco, fanno scorgere come esse abbiano i vertici nei vertici D ed E del tronco, per modo che *il volume di un tronco di prisma triangolare è eguale alla somma dei volumi di tre piramidi aventi per base quella del tronco ed i vertici collocati nei vertici della faccia opposta alla base.* Cosicchè, se il tronco di prisma triangolare è retto, la sua base B, ed i tre spigoli P, Q, R, determinano il volume $V = B\left(\frac{P+Q+R}{3}\right)$.

Nel caso del tronco obliquo, in allora è duopo conoscere le tre altezze abbassate dai vertici della faccia opposta alla base.

Per la scomposizione in tronchi di prisma triangolari, che venne detto potersi operare in un tronco di prisma qualsiasi, è dato conchiudere in generale come *il volume di qualsiasi tronco di prisma è eguale alla somma dei volumi di* $3\,(n-2)$ *piramidi, nelle quali le altezze sono perpendicolari abbassate dai vertici della faccia opposta alla base, e le basi sono i triangoli che si ottengono colle rette tirate da un vertice nella base.*

Nel tronco retto di parallelepipedo, la scomposizione in tronchi di prisma triangolari essendo tale che essa divide per metà la base del tronco, così essendo 2 B la base di un tronco di parallelepipedo, A l' asse del tronco, P e Q due spigoli opposti del tronco, R ed S gli altri due spigoli opposti, si avrà per l' espressione sopra trovata che il volume

$$V = B\left(\frac{P+R+Q}{3}\right) + B\left(\frac{P+S+Q}{3}\right) = B\left(\frac{2\,P+2\,Q+R+S}{3}\right).$$

Ma poichè per la proprietà del tronco di parallelepipedo, si ha che $P+Q=R+S=2\,A$, così $2\,P+2\,Q+R+S=6\,A$, e quindi $V=\frac{B\times 6\,A}{3}=2\,B\times A$, onde *il volume di un tronco di parallelepipedo è eguale al prodotto dell' area della sua base per il suo asse.*

Medesimamente, un piano condotto in un prisma regolare retto di un numero pari di lati e che passi per la metà dell'asse, scomponendolo in due tronchi eguali, così *il volume di un tronco di prisma regolare retto è eguale al prodotto dell'area di base per l'asse.*

Misura del tronco di piramide. — La misura del tronco di piramide, come è evidente, può ottenersi col formare la differenza fra la piramide intiera e la piramide recisa, sia questa stata recisa sì o no parallelamente alla base. Egli è tuttavia possibile una espressione, la quale determina direttamente il volume di un tronco di piramide a basi parallele, e ciò senza duopo del computo delle due piramidi, delle quali esso ne è la differenza.

Essendo A B C D E F (Fig. 32) un tronco di piramide a basi parallele, è dato di vedere che se si conduce per i tre vertici A, E, C un piano, desso taglierà la faccia A B E F secondo la retta E A, quella B E D C secondo la retta E C, ed il tronco viene così scomposto in due piramidi, l'una triangolare A B C E avente per base quella inferiore del tronco, e per altezza l'altezza del tronco, l'altra quadrangolare A C D F E. Questa piramide quadrangolare poi viene a sua volta scomposta da un piano passante per i tre vertici A, E, D in due piramidi triangolari, l'una A F D E avente per base quella F E D superiore del tronco e il vertice collocato in A, vale a dire un'altezza eguale a quella del tronco, l'altra quella A D C E. Prendendo ad esaminare quest'ultima piramide, rendesi manifesto ch'essa è equivalente in volume ad altra piramide A C D G avente la stessa base A C D ed il vertice G collocato su di una retta parallela a detta base e passante pel vertice F, e conseguentemente come considerata sia la faccia A G C quella che funzioni di base, il vertice D essendo collocato sulla base superiore del tronco, dinota aver la detta piramide l'altezza del tronco. Non resta più quindi di vedere che il valore della base A G C, onde potere dire il valore delle piramidi in cui è scomponibile un tronco di piramide, e da questi quello dell'intiero tronco. Ma se osservasi che i due triangoli A B C, A G C per avere il vertice comune in A e le basi su di una medesima retta, hanno una medesima altezza, epperciò sono tali che le superficie dei medesimi stanno tra loro come le basi, è facile il vedere potersi stabilire la proporzione

(1) A B C : A G C :: B C : G C.

Se in seguito osservasi che a motivo della natura del tronco è l'angolo F D E = A C B, scorgesi tosto come i due triangoli A G C, F D E, avendo un angolo eguale, in virtù del teorema stato dimostrato a pag. 243, le loro superficie stanno come il prodotto dei lati che comprendono l'angolo eguale, onde la proporzione A G C : F D E :: A C $\times$ C G : F D $\times$ D E. A causa però della retta E G parallela a D C e di quella E D parallela a B C, si ha che G C = E D, onde dividendo i due ultimi termini della suddetta proporzione, ricavasi A G C : F D E :: A C : F D, e perchè la figura F E D è simile a quella A B C, e quindi proporzionali i lati omologhi, così è A G C : F D E :: B C : G C.

Questa proporzione avendo con quella (1) le seconde ragioni eguali, le prime formano proporzione e si ha

$$A B C : A G C :: A G C : F D E$$

vale a dire la base A G C della piramide A G C D è una media proporzionale fra le due basi del tronco piramidale. Cosicchè è dato di potere dire che il tronco di piramide triangolare è eguale alla somma di tre piramidi aventi la medesima altezza ch'è quella del tronco, e per base, l'una la base inferiore, l'altra la parte superiore, la terza una media proporzionale tra dette due faccie.

Se osservasi che due piramidi di medesima altezza e di base equivalente, l'una però triangolare, l'altra poligonale, sono equivalenti in volume, ed equivalenti in volume pure sono le piramidi che da queste si possono recidere con piani egualmente distanti dalla base, è dato di vedere come equivalenti sono i resti, cioè i tronchi di piramide a basi parallele ed equivalenti, onde in generale *il volume di un tronco di piramide a basi parallele è eguale al prodotto della terza parte dell'altezza del tronco moltiplicata per la base inferiore, più quella superiore, più una media proporzionale tra le dette due basi.* Cosicchè, essendo B, b le due basi di un tronco di piramide, ed H l'altezza, è il volume $V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B b})$.

Misura di un poliedro qualsiasi. — La misura di un poliedro qualsiasi consiste nel computo del volume delle piramidi od altri poliedri di cui si conosce la misura, nei quali il poliedro dato è scomponibile.

I poliedri regolari essendo scomponibili in tante piramidi eguali quante sono le faccie, ne segue essere il volume di un poliedro regolare eguale al prodotto della sua superficie totale per il terzo della perpendicolare abbassata dal centro su di una faccia.

Relazione dei volumi nei poliedri simili. — Come venne detto, il cubo è un poliedro determinato da un solo elemento, il suo volume è espresso da L^3. Sono perciò due o più cubi tra di loro nel rapporto dei cubi degli spigoli omologhi. Ecco quindi di già il rapporto di volume in poliedri simili.

Ogni poliedro, come venne detto e ripetuto, potendo sempre venire considerato siccome l'assieme di più piramidi, così cerchisi dapprima la relazione corrente fra i volumi di due piramidi simili, e quindi quella fra due poliedri simili.

Due piramidi simili come quelle A B C D E F G L V, *a b c d e f l g v* (Fig. 33), avendo le faccie omologhe che sono simili, le rette omologhe pure simili, e dalla proprietà dei poliedri avendo che le superficie delle piramidi simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, così ha luogo la proporzione

$$ABCDEFGL : abcdefgl :: VO^2 : vo^2$$

la quale moltiplicata termine a termine per l'altra proporzione evidente $\frac{1}{3}VO : \frac{1}{3}vo :: VO : vo$, somministra il risultato

$$ABCDEFGL \times \frac{1}{3}VO : abcdfgl \times \frac{1}{3}vo :: \overline{VO}^3 : vo^3$$

proporzione nella quale i due primi termini essendo l'espressione dei volumi di due piramidi, è dato di conchiudere che i volumi delle piramidi simili sono proporzionali ai cubi delle loro altezze omologhe. Ma il rapporto lineare delle altezze essendo identico con quello dei lati, epperciò altresì identico il rapporto quadrato e cubico delle altezze coi lati omologhi, è dato di dire in generale come *i volumi delle piramidi simili sono proporzionali ai cubi dei loro lati ed altezze omologhe.*

Venendo per ultimo alla considerazione di due poliedri simili come quelli disegnati colla Fig. 34, che sono due rombododecaedri, è assai facile lo scorgervi come appunto le diverse rette O A, O B,

O C, O D.... ecc. in uno, e *o a*, *o b*, *o c*, *o d*.... nell' altro, li scompongono in tante piramidi simili, che in virtù della relazione precedente, permettono di stabilire la serie di rapporti eguali A B C D O : *a b c d o* :: E F D A O : *e f d a o* :: F A H G O : *f a h g o* :: .... ecc. ecc., e componendola l'altra A B C D O + E F D A O + F A H G O ..... : *a b c d o* + *e f d a o* + *f a h g o* ..... :: A B C D O : *a b c d o* :: E F D A O : *e f d a o* ::.... ecc. ecc., i due primi termini della quale serie esprimendo i volumi dei due poliedri simili, è dimostrato come i medesimi sieno nel rapporto delle piramidi simili che le compongono, e siccome queste stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi, così è dato di dire e conchiudere: *i volumi dei poliedri simili stanno nel rapporto delle terze potenze o cubi dei loro spigoli omologhi.*

QUA

DELLE FORMOLE CONTE

VALORI

POLIEDRI REGOLARI			PARALLELEPIPEDI	
Cubo	Tetraedro	Ottaedro	Rettangolo	Qualunque
L = lato	L = lato	L = lato	A, B, C = lati	B = base H = altezza
$V = L^3$	$V = \frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}$	$V = \frac{1}{3} L^3 \sqrt{2}$	$V = A \times B \times C$	$V = B \times H$

VALORI

POLIEDRI REGOLARI			PARALLELEPIPEDI	
Cubo	Tetraedro	Ottaedro	Rettangolo	Qualunque
L = lato	L = lato	L = lato	A, B, C = lati	P = perimetro sezione retta L = lato
$s = 4 L^2$ $S = 6 L^2$	$S = L^2 \sqrt{3}$	$S = 2 L^2 \sqrt{3}$	$s = 2 C (A + B)$ $S = 2 [C (A + B) + A B]$	$s = P \times L$

VALORI

Diagonale D di un parallelepipedo rettangolo di lati A, B, C

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Diagonale D di un parallelepipedo qualunque di lati A, B, C, e in cui p, p', p'' sono le proiezioni dei lati fra loro

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - (2A.p) - (2B.p') - (2C.p'')}$$

NB. V = volume, s = superficie

DRO

NUTE NEL LIBRO QUINTO

VOLUMI

PRISMA			TRONCHI	
Qualunque	Triangolare	Piramide	Parallelepipedo retto	Piramide a basi parallele
B = base H = altezza	Z = sezione retta L = lato	B = base H = altezza	B = base A = asse	B, b = basi H = altezza
$V = B \times H$	$V = Z \times L$	$V = B \times \frac{H}{3}$	$V = B \times A$	$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B b})$

SUPERFICIE

PRISMA			TRONCHI	
Qualunque	Regolare	Piramide regolare	Parallelepipedo	Piramide a basi parallele
P = perimetro sezione retta L = lato	n = numero lati l = lato di base p = apotema L = lato prisma	n = numero lati p = apotema P = apotema faccie l = lato di base	P = perimetro sezione retta A = asse	P, p = perimetri basi Q = apotema faccie
$s = P \times L$	$s = n\,l \times L$ $S = n\,l \times (L + p)$	$s = n\,l \times P$ $S = n\,l\left(P + \frac{p}{2}\right)$	$s = P \times A$	$s = Q\left(\frac{P+p}{2}\right)$

LINEE

Diagonale D di un parallelepipedo qualunque di lati A, B, C, e in cui d, d', d'' sono le diagonali delle faccie

$$D = \sqrt{d^2 + d'^2 + d''^2 - (A^2 + B^2 + C^2)}$$

Diagonale D nell'ottaedro regolare di lato L

$$D = L\sqrt{2}.$$

Altezza H di un tetraedro regolare di lato L

$$H = \frac{1}{3} L \sqrt{6}$$

laterale, S = superficie totale.

PROBLEMI.

1.° — *Determinare il solido risultante dalla sezione fatta in un cubo prima con quattro piani, poscia con altri quattro, e tutti passanti per tre delle diagonali delle faccie del cubo.*

(Vedi Tav. XXXVII, Fig. 1).

Risoluzione. — Sia A B C D E F G H il cubo.

Le faccie di un cubo essendo tutte quadrati eguali, eguali sono pure le diagonali nelle medesime, ed ogni piano perciò che passi per tre delle diagonali nelle faccie del cubo, determina nella figura di sezione un triangolo equilatero, il cui lato è appunto una diagonale delle faccie del cubo. Ora bene, i quattro piani E G B, E G D, D B G, D B E, passanti ognuno per tre delle diagonali nelle faccie del cubo, intersecandosi per l'appunto secondo le stesse diagonali, ed ognuno dando nella figura di sezione un triangolo equilatero, il corpo E G B D risultante avendo quattro faccie che sono quattro triangoli equilateri eguali, è un *tetraedro regolare.* Da ciò deducesi come la costruzione di un tetraedro regolare ottengasi col formare dapprima un cubo, e poscia con tagliarlo con quattro piani passanti appunto ciascuno per tre delle diagonali delle faccie.

Naturalmente che proponendosi la costruzione di un tetraedro regolare, è duopo conoscere la dimensione del lato del cubo che devesi costrurre, affinchè da esso possa ottenersi un tetraedro avente un lato che sia il desiderato; ma per ciò se osservasi che coll'indicata costruzione il lato del tetraedro regolare è diagonale di un quadrato avente per lato quello del cubo, è dato di vedere ben tosto come con un cubo di lato L ottenendosi un tetraedro di lato eguale ad $L\sqrt{2}$, con un cubo di lato eguale ad $L\sqrt{\frac{1}{2}}$ si otterrà un tetraedro il cui lato sarà L.

Venendo alla considerazione del corpo che sarà per risultare dalla sezione operata in un tetraedro regolare ottenuto nel modo che si è precedentemente detto, con quattro altri piani passanti ciascuno per tre delle diagonali delle faccie del cubo da cui deriva il tetraedro, osservisi anzitutto la figura che avranno le faccie, cioè a dire l' intersezione di ogni piano col tetraedro. Ora bene, il piano condotto pelle tre diagonali H F, H A, A F comincia dall' intersecare la faccia E G B del tetraedro secondo la retta O Q, il punto O essendo quello d' intersezione delle diagonali nella faccia E F G H del cubo, il punto Q quello d' intersezione delle diagonali nella faccia A B F E del cubo; interseca di poi la faccia E G D del tetraedro secondo la retta O P, cioè nuovamente secondo una retta che unisce i centri di due faccie E F G H, A D H E; interseca per ultimo la faccia D B E del tetraedro secondo la retta P Q, che pure unisce i punti di mezzo delle diagonali condotte nelle due faccie A B F E, A D H E.

Le diagonali di un quadrato essendo eguali e tagliandosi in parti eguali, ne risulta essere H O = O F = H P = P A = A Q = Q F, e perchè la figura H F A è un triangolo equilatero, così un triangolo equilatero è pure il triangolo O P Q, che è formato dall' unione dei punti di mezzo dei lati di quello; ed il piano condotto ha perciò tagliato il tetraedro, lasciando nella figura di sezione un triangolo equilatero. Per le medesime ragioni, anche il piano condotto per le tre diagonali H F, F C, C H taglia il tetraedro lasciando nella figura di sezione il triangolo equilatero O P' Q'; ed infine i due piani A C F, A C H taglieranno pure il tetraedro secondo due triangoli equilateri O' P' Q, O' P Q'. Se di più osservasi che le faccie del tetraedro vennero tagliate secondo delle rette che congiungono i punti di mezzo dei lati, siccome esse erano triangoli equilateri, le faccie rimanenti sono pure triangoli equilateri, è dato di vedere che il solido P Q P' Q' O O' è un solido terminato da otto faccie piane che sono triangoli equilateri, e che perciò esso è un *ottaedro regolare.*

Otto piani, ciascuno dei quali passi per tre delle diagonali delle faccie di un cubo, originando un ottaedro regolare, resta così determinata la costruzione di questo poliedro. Non resta più quindi a conoscere che la dimensione che deve avere un cubo perchè da esso possa ottenersi un ottaedro regolare di lato dato, e ciò me-

diante gli otto piani nel senso in cui vennero considerati, e condotti in un cubo. Per ciò, se osservasi che il lato dell'ottaedro regolare è la metà di quello del tetraedro regolare dal quale deriva, come presentasi evidente colla considerazione della faccia ad esempio A F H, che è un triangolo equilatero ed in cui la retta P O che unisce i punti di mezzo P ed O dei lati H F, H A, è il lato dell'ottaedro, è dato di vedere come essendo $AF = L\sqrt{2}$, è $OP = \frac{1}{2} L\sqrt{2}$, e conseguentemente $L = \frac{2\,OP}{\sqrt{2}}$, cioè il cubo il cui lato sarà eguale al quoziente del doppio del lato dell'ottaedro che si vuole costrurre per la radice quadrata del numero 2, darà nell'intersezione di otto piani condotti ciascuno per tre delle sue diagonali, l'ottaedro domandato.

2.° — *Trovare il rapporto corrente fra la superficie ed il volume di un tetraedro regolare, con la superficie e volume di un prisma triangolare in esso inscritto, essendo gli spigoli della base di questo eguali alla metà degli spigoli del tetraedro.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 2).

Risoluzione. — Sia A B C D il tetraedro regolare, e sia L I K G N H il prisma triangolare in esso inscritto, i cui lati di base sono la metà di quelli del tetraedro.

Il rapporto corrente fra la superficie e volume di due corpi ottenendosi dal quoziente delle quantità che ne esprimono la misura, così nel caso concreto è duopo anzitutto determinare tutti gli elementi che sono necessari per il computo delle superficie e dei volumi del tetraedro e del prisma inscritto.

In quanto al tetraedro, la sua superficie ed il suo volume sono determinabili colla conoscenza del suo lato, non resta perciò che di determinare gli elementi del prisma triangolare inscritto.

Ogni prisma avendo le due basi che sono due figure eguali comprese in piani paralleli, così è il triangolo G N H = L I K, il piano G N H parallelo alla base A B C del tetraedro. Ma poichè i lati di base del prisma sono per l'enunciato del problema, la metà del tetraedro, così è N H metà di B C, G N metà di A B, G H metà di

A C. Le faccie del tetraedro essendo triangoli, e le rette N H, N G, G H essendo parallele ai lati di base perchè intersezioni di piani paralleli, ed essendo eguali alla metà di detti lati di base, esse dividono per metà gli spigoli del tetraedro, e quindi i punti G, N, H sono punti di mezzo degli spigoli D A, D B, D C. Ora è evidente che gli spigoli N I, G L, H K perpendicolari alla base del tetraedro, sono la metà dell'altezza del tetraedro, poichè il piano che essendo perpendicolare alla base passante ad esempio pello spigolo D B, contenendo l'altezza D O del tetraedro e lo spigolo N I del prisma, i due triangoli B D O, B N I sono simili, e quindi il rapporto D O : N I è identico con quello B D : B N, cioè $D O = 2 N I$. Il prisma quindi triangolare inscritto è retto, ha un' altezza metà di quella del tetraedro, ed ha una base che per essere eguale a quella G N H fatta con un piano parallelo ad A B C, è un triangolo equilatero, i cui lati sono la metà del lato del tetraedro.

Venendo alla valutazione delle superficie e volumi dei due corpi, si ha: 1.° che pel tetraedro regolare la sua superficie è eguale alla somma della superficie di quattro triangoli equilateri, per cui chiamando con L il lato, l'area di ciascuna faccia essendo $\frac{1}{4} L^2 \sqrt{3}$, è la superficie S totale del tetraedro eguale ad $L^2 \sqrt{3}$; il suo volume eguale alla superficie di base, che $\frac{1}{4} L^2 \sqrt{3}$ per la terza parte dell'altezza, e poichè questa è l'intersezione di due piani E C D, F A D perpendicolari alla base e passanti per due diversi spigoli, e quindi cateto di un triangolo rettangolo A O D avente per ipotenusa il lato del tetraedro e per altro cateto A O, che è i $\frac{2}{3}$ della mediana A F, così quest' ultima essendo pure un' altezza nella faccia B A C, epperciò eguale a $\frac{1}{2} L \sqrt{3}$, è

$$A O = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} L \sqrt{3} = \frac{1}{3} L \sqrt{3}$$

$$O D = \sqrt{L^2 - \frac{3 L^2}{9}} = \sqrt{\frac{9 L^2 - 3 L^2}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{6 L^2} = \frac{L}{3} \sqrt{6}$$

ed il volume V del tetraedro eguale a

$$\frac{1}{4} L^2 \sqrt{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{L}{3} \sqrt{6} = \frac{1}{36} L^3 \sqrt{18} = \frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}.$$

2.° che pel prisma triangolare inscrittto, la sua superficie totale è eguale alla somma delle basi, cioè la superficie di due triangoli equilateri di lato $\frac{L}{2}$, più la superficie di tre rettangoli eguali aventi per lati $\frac{L}{2}$ ed $\frac{1}{2} \times \frac{L}{3} \sqrt{6}$, così è la superficie

$$S = 2 \times \frac{L^2}{16} \sqrt{3} + 3 \times \frac{1}{6} L \sqrt{6} \times \frac{L}{2} = \frac{L^2}{8} \sqrt{3} + \frac{1}{4} L^2 \sqrt{6} =$$

$$L^2 \sqrt{3} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{8} \right)$$

il volume poi eguale al prodotto dell' area della base L I K per N I, cioè

$$\frac{L^2}{16} \sqrt{3} \times \frac{1}{6} L \sqrt{6} = \frac{1}{96} L^3 \sqrt{18} = \frac{1}{32} L^3 \sqrt{2}.$$

Si conchiuderà perciò con dire che la superficie di un tetraedro regolare starà alla superficie del prisma triangolare inscritto, i cui lati sono la metà di quelli del tetraedro, nel rapporto di $L^2 \sqrt{3}$: $L^2 \sqrt{3} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{8} \right)$; ed i volumi dei due corpi in quello di $\frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}$: $\frac{1}{32} L^3 \sqrt{2}$. Ma poichè

$$L^2 \sqrt{3} : L^2 \sqrt{3} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{8} \right) :: 1 : \frac{1 + 2\sqrt{2}}{8} :: 8 : 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{12} L^3 \sqrt{2} : \frac{1}{32} L^3 \sqrt{2} :: \frac{1}{12} : \frac{1}{32} :: 1 : \frac{12}{32} :: 32 : 12 :: 8 : 3$$

così si risponderà con dire che la superficie dei due dati corpi è nel rapporto del numero 8 al numero incommensurabile $1+2\sqrt{2}$, il volume poi degli stessi corpi nel rapporto del numero 8 al numero 3, cioè è il prisma i $\frac{3}{8}$ in volume del tetraedro.

3.° — *Formare un parallelepipedo rettangolo di volume equivalente a quello di un dato cubo, ed in cui gli spigoli adiacenti stiano fra loro nella ragione di numeri dati.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 3).

Risoluzione. — Sia l il lato di un cubo a cui vogliasi costrurre un parallelepipedo rettangolo equivalente avente gli spigoli nel rapporto $4:6:5$.

Dalla teoria avendosi che i volumi dei poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi, così si ha che il volume del parallelepipedo che si cerca sta al volume di un parallelepipedo i cui spigoli sieno 4, 6, 5, ed il cui volume è espresso dal prodotto $4\times6\times5$, come il cubo di uno spigolo del parallelepipedo che si cerca sta al cubo del lato omologo nel parallelepipedo i cui lati sono 4, 6, 5. Ha luogo cioè le proporzione $l^3:4\times6\times5::\overline{AB}^3:4^3$, in cui A B figura un lato del parallelepipedo che si cerca, per modo che $\overline{AB}^3=\frac{4^3\times l^3}{4\times6\times5}=\frac{4^2\times l^3}{6\times5}$, e quindi $AB=\sqrt[3]{\frac{4^2\times l^3}{6\times5}}$. Trovato il lato A B, quello ad esempio omologo di 4, è facile rinvenire gli altri due, poichè quello B C è eguale a $\frac{6}{4}$ A B, quello B F a $\frac{5}{4}$ A B, e ciò a seguito della proporzionalità tra loro esistente. Onde, formato il parallelepipedo A B C D E F G H colle tre lunghezze trovate A B, B C, B F, egli è il domandato.

4.° — Dividere un parallelepipedo in tre parti equivalenti o proporzionali a mezzo di piani passanti per un punto preso sulla metà di uno dei suoi spigoli.

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 4).

RISOLUZIONE. — Sia A B C D E F G H il parallelepipedo proposto a dividere in tre parti che stieno tra loro nel rapporto 2 : 3 : 2, mediante due piani passanti pel punto P dato sulla metà dello spigolo B E.

Si divida la faccia B C E G, a cui è adiacente il punto dato, nel rapporto dato colle due rette P I, P R; per ciascuna di queste due rette facciasi passare un piano parallelo allo spigolo A B, che si sarà così diviso il parallelepipedo dato nel rapporto voluto.

DIMOSTRAZIONE. — I tre prisma P E G I Q F H K, P I R Q K S, P R C B Q S D A, avendo la medesima altezza siccome collocati fra due piani paralleli, come lo sono le faccie opposte del parallelepipedo, i loro volumi stanno nel rapporto dell'area delle basi, e poichè queste vennero fatte per costruzione nel rapporto dato, così le tre parti in cui venne scomposto il parallelepipedo dato stanno nel rapporto dei numeri 2 : 3 : 2, epperciò diviso il parallelepipedo nel modo desiderato.

5.° — *Trovare il volume di un tronco di prisma triangolare obliquo.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 5).

RISOLUZIONE 1.ª — Sia F D E A B C un tronco di prisma triangolare obliquo, del quale se ne debba calcolare il volume, sapendo essere i tre spigoli laterali perpendicolari ad una delle due faccie non laterali.

Il tronco dato avendo gli spigoli F A, D B, E C perpendicolari alla faccia A B C, se pure egli è un tronco di prisma triangolare obliquo, allorachè lo si consideri come avente per base la faccia F D E, tuttavia considerato come avente per base la faccia A B C, essendo un tronco di prisma triangolare retto, e quindi conosciuto dalla teoria l'espressione del suo volume, così in tale caso

si dirà essere il volume del tronco di prisma triangolare obliquo, eguale all'area della faccia a cui sono perpendicolari gli spigoli laterali per il terzo della somma dei tre spigoli, cioè

$$V = A\,B\,C\left(\frac{A\,F + D\,B + C\,E}{3}\right).$$

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 6).

Risoluzione 2.ª — Sia A B C D E F un tronco di prisma triangolare obliquo, del quale nessuna delle due basi sia perpendicolare agli spigoli laterali.

Per un punto qualunque I di uno degli spigoli paralleli, si conduca un piano che sia ad essi perpendicolare, vale a dire si tracci la sezione retta. Il tronco dato verrà scomposto in due tronchi di prisma triangolare retti, se vuolsi obliqui, ma come nel precedente caso, e quindi è il volume del tronco di prisma triangolare obliquo proposto, eguale alla somma dei volumi di due tronchi di prisma triangolari retti H I G D E C, H I G A F B. Il volume del primo essendo eguale ad $H\,I\,G \times \left(\frac{H\,D + I\,E + G\,C}{3}\right)$, quello del secondo eguale ad $H\,I\,G \times \left(\frac{H\,A + I\,F + G\,B}{3}\right)$, ed entrambi questi due volumi avendo un fattore comune in H I G, è la loro somma eguale ad $H\,I\,G\left(\frac{A\,D + E\,F + B\,C}{3}\right)$.

Onde è il volume del tronco di prisma triangolare obliquo A B C D E F proposto, eguale al prodotto dell'area della sezione retta H I G per il terzo della somma dei tre spigoli paralleli A D, E F, B C. Ma poichè l'area di un triangolo si ottiene moltiplicando la base per la metà dell'altezza, così chiamando con H l'altezza del triangolo H I G abbassata dal vertice I, si ha

$$V = \frac{1}{2}\,H \times H\,G\left(\frac{A\,D + E\,F + B\,C}{3}\right) = \frac{1}{6}\,H \times H\,G(A\,D + E\,F + B\,C).$$

Il computo del volume di questo solido presentasi sovente alla risoluzione, tale essendo una delle forme che si dà in generale

ai mucchi, sieno essi di sabbia, ghiaia o terra od altro, forma a cui viene dato il nome comune di *cavalle*.

6.° — *Calcolare il volume di un tronco di prisma a base trapezia ed obliquo.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 7).

Risoluzione. — Sia A B C D E F G H il tronco di prisma a base trapezia ed obliquo, di cui si tratti di calcolarne il volume.

In un punto qualunque S di uno degli spigoli paralleli, si tracci la sezione retta, cioè la sezione di un piano perpendicolare a tutti gli spigoli paralleli; egli sarà la figura di sezione Q T S R un trapezio, in cui Q R e T S sono le due basi. Si calcoli l'altezza di detto trapezio, il quale calcolo riducesi a quello dell'altezza di un triangolo in funzione dei suoi tre lati, che nel caso concreto sono S R, T Q, Q R — T S; indi immaginato condotto un piano G B C E che passi pegli spigoli paralleli B C, G E, e che scompone il tronco dato in due altri tronchi, però di prisma triangolari obliqui, si computino separatamente i volumi di detti due tronchi, che poi nella loro somma si avrà il volume del tronco proposto, cioè chiamando con H l'altezza del trapezio Q R S T, si avrà

$$V = \frac{TS}{2} \times H\left(\frac{GE + HF + BC}{3}\right) + \frac{QR}{2} \times H\left(\frac{AD + GE + BC}{3}\right)$$

e quindi

$$V = \frac{1}{6} H \{TS(GE + HF + BC) + QR(AD + GE + BC)\}$$

la quale formola combina perfettamente con quella del tronco di prisma triangolare obliquo, essendochè è alloraquando T S si riduce a zero, che il tronco di prisma trapezio si converte in tronco di prisma triangolare, e la formola rinvenuta, nell'altra

$$V = \frac{1}{6} H (AD + GE + BC)$$

stata trovata al problema precedente.

Discussione. — Nel caso che il tronco di prisma a base trapezia obliquo dato sia come quello rappresentato alla figura, cioè le due faccie G H F E, A B C D sieno due rettangoli, epperciò B C = A D, H F = G E, in allora, poichè conducendo ad esempio pegli spigoli paralleli F E, H G, due piani perpendicolari alla faccia A B C D, lo si scompone in tre parti N G H L K E F I, N G H L A B, K E F I D C, la prima delle quali è un prisma retto a base trapezia, e le due ultime sono tali che a causa dell'eguaglianza delle sue sezioni N G H L, K E F I, è possibile col loro accostamento che possano formare un tutto in un prisma triangolare obliquo, così è dato di poter dire essere il volume del tronco proposto eguale alla somma del volume di un prisma retto a base trapezia, col volume di un tronco di prisma triangolare obliquo, e dietro le espressioni conosciute per la deduzione di siffatti volumi essere

$$V = H \times \frac{QR + TS}{2} \times HF + \frac{BC - HF}{2} \times H \left(\frac{2AB + GH}{3}\right)$$

ossia

$$V = \frac{H}{2} \left\{ HF(QR + TS) + \frac{2AB + GH}{3}(BC - HF) \right\}$$

Può ancora il tronco di prisma a base trapezia obliquo dato, venire considerato siccome la differenza di due tronchi di prisma triangolari obliqui, come A B P D O C, G H F E P O, epperciò essere il volume la differenza fra il volume di quelli.

Il calcolo del volume di un tronco di prisma a base trapezia obliquo presentasi altresì di frequente nel pratico esercizio dell'arte del misuratore, essendochè tale è l'altra forma dei cumuli che si dà sia ai movimenti di terra, alle ghiaie e ad altre materie, ond'esse possano venire misurate. Una tale forma riceve il nome comune di *meda*.

7.° — *Trovare il rapporto del volume di un parallelepipedo qualunque a quello dell'ottaedro che ha per vertici i centri delle sue faccie.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 8).

Risoluzione. — Sia A B C D E F G H il parallelepipedo dato, ed O P Q P' Q' O' l'ottaedro inscritto, i cui vertici posano nel centro delle faccie del parallelepipedo.

I punti di mezzo P, P', Q, Q' delle faccie laterali B C G F, A D H E A B F E, D C G H di un parallelepipedo, essendo contenuti in un medesimo piano P Q' P Q', e ciò perchè le faccie del parallelepipedo essendo parallelogrammi, le diagonali nelle medesime si tagliano per metà nel centro delle faccie, e quindi le rette tirate da detti centri parallelamente alle basi, dividono ciascuno due spigoli laterali per metà, e determinano un piano parallelo alle basi; così si ha che la base P Q P' Q' delle due piramidi in cui è scomponibile l'ottaedro in questione, è la figura che unisce i punti di mezzo della figura di sezione in un parallelepipedo fatta con un piano parallelo alle basi.

Dal teorema stato dimostrato a pag. 227, avendosi che l'area P' Q P Q' è la metà di quella E' F' G' H', e per conseguenza la metà della base A B C D del parallelepipedo dato, è così dato di vedere come le altezze delle due piramidi nelle quali è scomponibile l'ottaetro, essendo delle rette O S, O' S perpendicolari a P' Q P Q', sono perpendicolari pure alla base del parallelepipedo, e la loro somma $O S + O' S$ eguagliando nel parallelepipedo retto il lato B F, e in un parallelepipedo obliquo eguagliando l'altezza di questo, è il volume dell'ottaedro espresso da $P' Q P Q' \times \frac{1}{3} H$, e quello del parallelepipedo da $2 P' Q P Q' \times H$, H essendo l'altezza di quest'ultimo.

Il rapporto richiesto è perciò $2 P' Q P Q' \times H : P' Q P Q' \times \frac{1}{3} H$, ossia $2 : \frac{1}{3}$, ossia ancora $6 : 1$, cioè il volume di un ottaedro inscritto in un parallelepipedo per modo che i suoi vertici sieno col-

locati nelle faccie di quest'ultimo, è la sesta parte del volume del parallelepipedo.

Discussione. — Se si considera che i punti di mezzo delle faccie di un prisma quadrangolare sono pure collocati in un medesimo piano, e se si considera ancora che la base delle due piramidi in cui è scomponibile un ottaedro, i cui vertici sieno collocati nel centro, delle faccie, è la metà di una figura eguale a quella di base del prisma, è dato di vedere come ancora il rapporto 6 : 1 è eguale a quello corrente fra il volume di un prisma quadrangolare e quello di un ottaedro i cui vertici sieno collocati nel centro delle faccie del prisma.

8.° — *Trovare i lati dei cubi inscritti e circoscritti all' ottaedro regolare.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 9).

Risoluzione 1.ª — Sia A B A' B' C C' un ottaedro regolare.

Il cubo circoscritto all' ottaedro regolare essendo quello i cui centri di faccie sono i vertici dell'ottaedro, è dato immediatamente di vedere che ove si immagini un piano che passi per quattro vertici A, B', A', B dell'ottaedro, un tale piano tagliando il cubo circoscritto in modo da lasciare nella sezione una figura eguale ad una faccia di detto cubo, epperciò un quadrato, nel quale l'altro quadrato i cui vertici sono collocati sulla metà dei lati di questo, è quello di sezione dell'ottaedro, sono i lati di quest'ultimo eguali alla metà di una diagonale nelle faccie del cubo, onde L essendo il lato dell'ottaedro regolare, 2 L essendo la diagonale di una faccia del cubo, è il lato del cubo circoscritto all' ottaedro regolare, eguale a 2 L diviso pella radice quadrata del numero due.

Risoluzione 2.ª — Un cubo che sia inscritto in un ottaedro regolare può avere due posizioni, avere cioè i vertici collocati sulle faccie dell'ottaedro, oppure i vertici collocati sugli spigoli dell' ottaedro.

Qui cercando il lato del cubo inscritto in un ottaedro per modo che i suoi vertici sieno collocati sulle faccie dell' ottaedro, si immagini fatta nell'ottaedro regolare A B A' B' C C' una sezione B' P B Q, la quale passando per i due vertici B, B', passi per la metà degli

spigoli A C', A' C, che la figura di sezione è un parallelogramma rombo, il cui lato è l'apotema di una delle faccie dell'ottaedro, e le cui diagonali sono, l'una eguale al lato dell'ottaedro, l'altra eguale alla diagonale del medesimo.

Il piano poi così condotto taglia il cubo per modo da dare nella sezione un rettangolo inscritto nel rombo suddetto, ed i cui lati sono, l'uno il lato del cubo, l' altro la diagonale di una faccia del cubo. Ciò posto, considerando la metà del rombo B' P B Q, cioè il triangolo B' P Q, nel quale sarebbe inscritto un rettangolo T R S U, tale che R T è la metà del lato del cubo che si cerca, ed R S è la diagonale di una faccia dello stesso cubo, è dato di vedere che il detto triangolo è isoscele, i lati eguali essendo le mediane od altezze B' P, B' Q delle faccie dell'ottaedro, cioè di un triangolo equilatero avente per lato il lato dell'ottaedro, è dato di vedere ancora essere il quesito a risolvere condotto al calcolo del valore dei lati di un rettangolo inscritto in un triangolo, conoscendo i lati del triangolo ed il rapporto corrente fra i lati del rettangolo inscritto. Ciò posto, chiamando con x il lato del cubo che si cerca, ed essendo

$$B'P = B'Q = \frac{1}{2} L \sqrt{3}, \quad PQ = L, \quad B'O = BO = \frac{1}{2} L \sqrt{2}$$

$$RT : RS :: \frac{x}{2} : x\sqrt{2} :: x : 2x\sqrt{2} :: 1 : 2\sqrt{2}$$

applicando la risoluzione del problema 47.° (pag. 358), si ha la proporzione

$$PQ : RS :: B'O : B'X$$

ovvero

$$L : x\sqrt{2} :: \frac{L\sqrt{2}}{2} : \frac{L\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}$$

nella quale il prodotto dei medi eguagliando quello degli estremi, si ha per risultato

$$x\sqrt{2} \times \frac{L\sqrt{2}}{2} = L\left(\frac{L\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

che svolto convertesi nell'altra eguaglianza $L\,x = \frac{L^2 \sqrt{2}}{2} - \frac{L\,x}{2}$, ossia $2\,L\,x = L^2 \sqrt{2} - L\,x$, e quindi $3\,L\,x = L^2 \sqrt{2}$ ed $x = \frac{L^2 \sqrt{2}}{3\,L} = \frac{L \sqrt{2}}{3}$, cioè il lato del cubo inscritto in un ottaedro regolare per modo che i suoi vertici sieno collocati sulle faccie di questo, è eguale al terzo del prodotto del lato dell'ottaedro per la radice quadrata del numero due; ovvero dire è eguale al terzo della diagonale dell'ottaedro.

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 10).

Risoluzione 3.ª — Volendo cercare il lato del cubo inscritto in un ottaedro regolare, avente i suoi vertici collocati sugli spigoli dell'ottaedro, si immagini condotto un piano il quale passando pel vertice F sia perpendicolare ai due spigoli paralleli A B, C D, e per ciò passi pel vertice opposto E. La figura di sezione che così risulta è come venne detto alla risoluzione precedente, un rombo, e nel qual rombo è tracciata la figura di sezione del medesimo piano col cubo di cui se ne cerca il lato.

Ora bene, poichè le faccie del cubo sono tanti quadrati opposti eguali e paralleli, così le faccie dell'ottaedro regolare essendo tutte eguali tra di loro, il cubo non può avervi altra disposizione diversa da quella che apparisce dalla figura, mantenendo i suoi vertici sugli spigoli dell' ottaedro; cioè non può a meno di essere due faccie del cubo, parallele alla base comune A B C D delle due piramidi, in cui sempre immaginasi scomposto l' ottaedro. La faccia L N T Z del cubo essendo parallela ad A B C D, è la retta P Q parallela alla G H, essendochè contenute in un medesimo piano e contemporaneamente in piani paralleli, ed inoltre essendo la retta G H eguale alla parallela B C, è la retta P Q eguale e parallela ad N T, cioè al lato del cubo richiesto.

La metà quindi della figura di sezione, cioè il triangolo G H F, presentando nel lato P Q del rettangolo R P Q S inscritto, il lato del cubo domandato, il calcolo del valore di questo è determinato in modo analogo a quello tenuto pella risoluzione precedente. Egli basta per ciò osservare, che chiamando con L il lato dell'ottaedro

regolare, e con x il lato del cubo che si cerca, nel triangolo G F H è $GF = FH = \frac{1}{2} L \sqrt{3}$, $GH = L$, $PR = \frac{x}{2}$, $FO = \frac{1}{2} L \sqrt{2}$, $PQ = x$, e dalla similitudine dei due triangoli G F H, P F Q, ha luogo la proporzione

$$GH : PQ :: FO : FO - PR$$

ossia

$$L : x :: \frac{1}{2} L \sqrt{2} : \frac{1}{2} L \sqrt{2} - \frac{x}{2}$$

che somministra l' eguaglianza $\frac{1}{2} L^2 \sqrt{2} - \frac{Lx}{2} = \frac{Lx\sqrt{2}}{2}$, e quindi $\frac{L^2\sqrt{2}}{2} = \frac{Lx\sqrt{2}}{2} + \frac{Lx}{2}$, ossia $L^2\sqrt{2} = Lx\sqrt{2} + Lx$, ed ancora $L^2\sqrt{2} = Lx(1 + \sqrt{2})$, da cui $x = \frac{L^2\sqrt{2}}{L(1+\sqrt{2})} = \frac{L\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$, ossia, il lato del cubo inscritto in un ottaedro regolare per modo che i suoi vertici sieno collocati sugli spigoli dell'ottaedro, è eguale al quoziente della diagonale dell' ottaedro per la radice quadrata del numero due accresciuta di una unità.

9.° — *Data una piramide, tagliarla con un piano parallelo alla base in due o più parti equivalenti o proporzionali in volume.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 11).

Risoluzione. — Sia A B C D F G L V una piramide a dividersi in due parti tali che i volumi di ciascuna abbiano a stare nel rapporto delle due rette date m ed n.

Egli è evidente come il piano che deve condursi, dovendo essere parallelo alla base A B C D E F G L, per essere determinato non abbia bisogno che di un punto su di uno spigolo qualunque, perchè ad esempio, supponendo essere a un tal punto, non si avrà che a condurre nella faccia A B V una retta $a\,b$ parallela ad A B, nella faccia B C V una retta $b\,c$ parallela a B C, e così di seguito, per avere segnata sulla piramide l' intersezione del piano. Ma per

determinare il punto a è duopo conoscere o la distanza V a o quella A a. Per ciò, avendo dalla teoria che i volumi delle piramidi simili stanno tra loro come i cubi dei lati omologhi, così si ha

$$ABCDEFGLV : abcdefglV :: \overline{VA}^3 : \overline{Va}^3$$

ma poichè

$$abcdefglV : ABCDEFGLabcdefgl :: m : n$$

e componendo

$$ABCDEFGLV : abcdefglV :: m + n : m$$

così ricavasi essere

$$\overline{VA}^3 : \overline{Va}^3 :: m + n : m$$

e quindi $\overline{Va}^3 = \frac{m \times \overline{VA}^3}{m+n}$, da cui la distanza desiderata

$$Va = \sqrt[3]{\frac{m \times \overline{VA}^3}{m+n}} = VA \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}, \text{ oppure } = \sqrt[3]{\frac{\overline{VA}^3}{1+\frac{n}{m}}}$$

eguale cioè al lato di un cubo il cui volume è quello che si ottiene dividendo un cubo di lato V A, per la misura della retta n con unità la retta m, accresciuta di una unità.

10.° — *Per due punti, dati sopra due lati d'una piramide triangolare, fare passare un piano che divida in volume la piramide in due parti che stieno in un dato rapporto.*

(Vedi Tavola XXXVII, Fig. 12).

Risoluzione. — Sia A B C H la piramide triangolare data, sui due spigoli della quale H A, H B sieno dati i due punti F e D, pei quali

debbasi condurre un piano che la divida in due parti che stieno tra loro nel rapporto di $m : n$.

Si immaginino prolungati gli spigoli H A, H B, e sul loro prolungamento portato H F′ = H F, H D′ = H D, e suppongasi conosciuta la lunghezza H E che determina il piano, e questa portata sul prolungamento in H E′. Sarà la piramide E′ D′ F′ H eguale alla piramide F D E H. Ciò posto, se si immaginano ancora tirate le rette A E′, B E′, si vedranno risultare dapprima le due piramidi A H B E′, D′ H′ F′ E′, le quali hanno il vertice nello stesso punto E′ e la base collocata su di un medesimo piano, per modo che hanno eguali le altezze ed i loro volumi, e in conseguenza stanno fra loro come le loro basi; in seguito le altre due piramidi A B H E′, A B H C aventi la base A B H comune, epperciò i loro volumi nel rapporto delle loro altezze. Ora, dalle due prime piramidi avendosi la proporzione

$$H F' D' E' :: A B H E' :: D' H F' : A H B$$

nella quale la seconda ragione essendo quella di due triangoli aventi un angolo eguale D′ H F′ = A H B, epperciò a termini del teorema stato dimostrato a pag. 243, quella del prodotto dei lati che comprendono l'angolo eguale, si ha

(¹) $$H F' D' E' : A B H E' :: D' H \times F' H : A H \times H B.$$

Dalle due ultime piramidi avendosi poi la proporzione

$$A B H E' : A B C H :: E' G : C I$$

nella quale il termine E′ G essendo eguale ad E K perchè altezze di piramidi eguali abbassate dal medesimo vertice sulla medesima base, ed inoltre il rapporto E K : C I essendo eguale a quello H E : H C, essendo le rette E K, C I, H C contenute in un medesimo piano ed il triangolo H C I simile al triangolo E H K, così si ha

$$A B H E' : A B C H :: H E : H C.$$

Questa proporzione moltiplicata termine a termine con quella ('), dando per risultato la proporzione

$$HF'D'E' \times ABHE' : ABHE' \times ABCH :: D'H \times F'H \times HE : AH \times HB \times HC$$

nella quale la prima ragione avendo il fattore comune $ABHE'$, può essere ridotta alla seguente

$$HF'D'E' : ABCH :: D'H \times F'H \times HE : AH \times HB \times HC$$

oppure alla sua eguale

$$FDEH : ABCH :: HF \times HD \times HE : HA \times HB \times HC$$

vedesi tosto come i volumi di due piramidi triangolari che hanno un angolo solido eguale, stanno tra loro come il prodotto dei tre spigoli che comprendono l'angolo solido eguale.

Ora il rapporto in cui deve essere divisa la piramide $ABCH$ essendo $m:n$, così componendo la proporzione

$$ABCFDE : FDEH :: m : n$$

si ha per risultato

$$ABCH : FDEH :: m+n : n$$

e poichè $ABCH : FDEH :: HA \times HB \times HC : HF \times HD \times HE :: m+n : n$, così ricavasi

$$HF \times HD \times HE = \frac{n \times HA \times HB \times HC}{m+n}$$

e quindi

$$HE = \frac{n \times HA \times HB \times HC}{HF \times HD\,(m+n)}$$

il valore cioè di HE che determina il piano desiderato, in funzione degli spigoli laterali della piramide data, di due spigoli della piramide a recidersi, e del rapporto delle due piramidi.

APPENDICE AL LIBRO QUINTO

DELLA PROIEZIONE ASSONOMETRICA IN ISPECIE.

Teoria. — Tre rette O X, O Y, O Z, che nello spazio rappresentino l'intersezione di tre piani perpendicolari tra loro, sono tali che un piano qualunque M N il quale contenga il vertice O, è determinato di posizione colla conoscenza del rapporto delle proiezioni O K : O K' : O K'' fatte su di esso di tre lunghezze eguali O H = O H' = O H'', misurate su di dette rette a partire dalla loro comune intersezione. È agevole diffatti il comprendere che tali proiezioni sono costantemente proporzionali alle lunghezze delle rette che si proiettano, cioè O K' : O H' :: O B : O A, a motivo della similitudine dei triangoli che costantemente si ottiene abbassando da diversi punti di ciascuna delle tre rette O X, O Y, O Z, delle perpendicolari al piano M N, le quali tutte sono collocate nel piano che passando per ognuna delle tre rette è perpendicolare al piano M N. Ciò posto, un piano essendo determinato dal rapporto delle proiezioni formate da tre lunghezze eguali misurate sulle rette O X, O Y, O Z, è evidente come dato il rapporto delle proiezioni fatte su di un piano, di tre lunghezze eguali misurate su tre rette tra loro perpendicolari nello spazio, ed a partire dalla loro comune intersezione, determini la posizione delle tre rette nello spazio. Ma tre rette nello spazio che sieno perpendicolari tra loro, essendo assi di coordinate di un corpo, e la proiezione di tali assi fatta sopra un piano qualunque essendo la proiezione assonometrica di detti assi, è dato di dire essere la proiezione assonometrica di tre assi ortogonali determinata dal rapporto delle proiezioni assonometriche di tre lunghezze eguali misurate su di essi.

Ora bene, vedasi la risoluzione del problema della proiezione assonometrica, che appunto è quello di tracciare la proiezione assonometrica di tre assi colla conoscenza del solo rapporto delle proie-

zioni assonometriche di tre lunghezze eguali misurate sugli assi a partire dalla loro origine.

Il piano Y O X essendo perpendicolare all' asse O Z, anche la retta $x' y'$ intersezione del piano Y O X col piano M N è perpendicolare ad O Z, e la retta O Z obliqua al piano M N essendo perpendicolare ad $x' y'$, è tale che la sua proiezione è pure perpendicolare ad $x' y'$, d'altronde è questa la proprietà caratteristica di una obliqua ad un piano. Ora la proiezione assonometrica dell'asse O Z, essendo una retta O z perpendicolare all' intersezione del piano Y O X col piano, due rette perpendicolari tra loro e tracciate in un piano, possono rappresentare, l'una l'assonometria dell'asse delle z, l'altra l'intersezione del piano Y O X con quel piano. Ed il quesito della proiezione assonometrica degli assi è così condotto alla proiezione assonometrica degli assi O X, O Y.

Presa una distanza O H = O H' = O H'', e dai punti H, H', H'', dopo avere abbassate sul piano M N le tre perpendicolari H K, H' K', H'' K'', fatta cioè la proiezione delle tre lunghezze eguali misurate sugli assi, se si abbassano dai punti K e K' due perpendicolari alla retta $x' y'$ intersezione del piano Y O X col piano M N, indi si conducono le rette H I, H' I', queste ultime rette sono esse pure perpendicolari alla $x' y'$, ma oblique però al piano M N. I due triangoli H K I, H' K' I' sono due piani perpendicolari alla retta $x' y'$, e per conseguenza perpendicolari al piano Y O X, e perciò tra loro paralleli e paralleli al piano H'' O K''. Ma i due triangoli H K I, H' K' I', oltre l'essere contenuti in piani paralleli, essi sono rettangoli ed hanno i lati paralleli ciascuno a ciascuno, cioè H K, H' K' paralleli tra loro perchè rette perpendicolari al medesimo piano M N; K I, K' I', paralleli tra loro perchè rette perpendicolari alla medesima retta $x' y'$ e contenute in un medesimo piano; H I, H' I' parallele pure tra loro perchè perpendicolari alla medesima retta $x' y'$ e contenute in un medesimo piano, e per tutto ciò i due triangoli suddetti sono simili tra loro. Il triangolo poi H'' O K'' avendo i lati perpendicolari a quelli dei triangoli H K I, H' K'. I', cioè H'' O perpendicolare ad H I e ad H I', H'' K'' perpendicolare a K I ed a K' I'; O K'' perpendicolare ad H K e ad H' K', è simile con quelli. Restano ora a calcolare i lati di questi tre triangoli rettangoli H K I, H' K' I', H'' K'' O colla conoscenza del rapporto O K : O K' : O K'' :: $m : n : p$, essendo m, n, p tre numeri dati.

Egli è evidente che colla conoscenza dei lati di quei triangoli, sarà poi deduttibile il valore delle lunghezze O I, O I′, e in seguito possibile il tracciamento della proiezione assonometrica degli assi O X, O Y, con innalzare nei punti I ed I′ della retta $y' x'$ che si sarà tracciata su di un piano, due perpendicolari, e facendole lunghe tanto da avere luogo la ragione O I : I K, O I′ : I′ K′ nel senso delle lunghezze all' uopo calcolate.

Vengasi quindi ora dapprima al calcolo delle lunghezze O K, O K′, O K″, H K, H′ K′, H″ K″, in seguito a quello delle lunghezze K I, K′ I′, e per ultimo a quello delle lunghezze O I, O I′.

Se immaginasi tirata dall' origine O dei tre assi una retta qualsiasi O S, indi abbassate su questa le tre perpendicolari H L, H′ L′, H″ L″, le quali danno nelle rette O L, O L′, O L″ le proiezioni sulla retta O S delle tre lunghezze eguali misurate sugli assi, è dato di vedere, come la somma dei quadrati di dette proiezioni è eguale al quadrato della lunghezza misurata su di un asse, cioè è $\overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{OL''}^2 = \overline{OH}^2$. Infatti, sulla retta O S prendendo un punto Q tale che sia $OQ = OH$, e poscia abbassando da detto punto delle perpendicolari Q R, Q R′, Q R″ sui tre assi, si ha la risultanza di sei triangoli due a due eguali, cioè il triangolo $OHL = OQR$, quello $OH'L' = OQR'$, e quello infine $OH''L'' = OQR''$, essendochè tutti questi triangoli avendo $OH = OH' = OH'' = OQ$, essi hanno un lato eguale, oltracciò essi sono rettangoli per costruzione, e per ultimo hanno un angolo comune, per cui viene ad essere $OL = OR$, $OL' = OR'$, $OL'' = OR''$. Se ora sulle rette O R, O R′, O R″ immaginasi formato il parallelepipedo rettangolo che chiaro emerge dalla figura, desso renderà palese essere O Q la diagonale di un tale parallelepipedo, e conseguentemente al valore della diagonale di un parallelepipedo stato trovato a pag. 434, essere $\overline{OQ}^2 = \overline{OR}^2 + \overline{OR'}^2 + \overline{OR''}^2$, e poichè $OL = OR$, $OL' = OR'$, $OL'' = OR''$, $OQ = OH$, così $\overline{OH}^2 = \overline{OL}^2 + \overline{OL'}^2 + \overline{OL''}^2$, e supponendo che la retta O S sia stata tirata dal vertice O perpendicolarmente al piano M N, epperciò parallelamente ad H K, H′ K′, H″ K″, risulterà tosto essere $OL = HK$, $OL' = H'K'$, $OL'' = H''K''$, e quindi $\overline{OH}^2 = \overline{HK}^2 + \overline{H'K'}^2 + \overline{H''K''}^2$. Ma dai triangoli rettangoli O H K, O H′ K′, O H″ K″, e mercè il teorema di Pittagora, avendosi $\overline{HK}^2 = \overline{OH}^2 - \overline{OK}^2$, $\overline{H'K'}^2 = \overline{OH'}^2 - \overline{OK'}^2$, $\overline{H''K''}^2 = \overline{OH''}^2 -$

$\overline{0\,K''}^2$, e quindi $\overline{0\,H}^2 = \overline{0\,H}^2 - \overline{0\,K}^2 + \overline{0\,H'}^2 - \overline{0\,K'}^2 + \overline{0\,H''}^2 - \overline{0\,K''}^2$, così essendo $0\,H = 0\,H' = 0\,H'' = 1$, si ridurrà ad essere $1 = 1 - \overline{0\,K}^2 + 1 - \overline{0\,K'}^2 + 1 - \overline{0\,K''}^2$, ossia $1 = 3 - \overline{0\,K}^2 - \overline{0\,K'}^2 - \overline{0\,K''}^2$, e per ultimo $0\,K + 0\,K' + 0\,K'' = 2$.

Sapendo che il rapporto delle proiezioni assonometriche di tre lunghezze eguali misurate sugli assi, sono nel rapporto di $m : n : p$, cioè è $0\,K : 0\,K' : 0\,K'' :: m : n : p$, così innalzando questa proporzione alla seconda potenza, si ha

$$\overline{0\,K}^2 : \overline{0\,K'}^2 : \overline{0\,K''}^2 :: m^2 : n^2 : p^2$$

dalla quale è dato dedurre

$$\overline{0\,K}^2 : \overline{0\,K'}^2 : \overline{0\,K''}^2 : \overline{0\,K}^2 + \overline{0\,K'}^2 + \overline{0\,K''}^2 :: m^2 : n^2 : p^2 : m^2 + n^2 + p^2$$

e per essere $\overline{0\,K}^2 + \overline{0\,K'}^2 + \overline{0\,K''}^2 = 2$, ha luogo la proporzione

$$\overline{0\,K}^2 : \overline{0\,K'}^2 : \overline{0\,K''}^2 : 2 :: m^2 : n^2 : p^2 : m^2 + n^2 + p^2$$

dalla quale ricavasi

$$\overline{0\,K}^2 = \frac{2\,m^2}{m^2 + n^2 + p^2}\,;\ \overline{0\,K'}^2 = \frac{2\,n^2}{m^2 + n^2 + p^2}\,;\ \overline{0\,K''}^2\ \frac{2\,p^2}{m^2 + n^2 + p^2}$$

ed essendo

$$H\,K = \sqrt{1 - 0\,K^2},\ H'\,K' = \sqrt{1 - 0\,K'^2},\ H''\,K'' = \sqrt{1 - 0\,K''}$$

si ha per ultimo

$$0\,K = \frac{m\,\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\,; \qquad H\,K = \frac{\sqrt{n^2 + p^2 - m^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$0\,K' = \frac{n\,\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}\,; \qquad H'\,K' = \frac{\sqrt{m^2 + p^2 - n^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$O\,K'' = \frac{p\,\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\;;\qquad H''\,K'' = \frac{\sqrt{m^2+n^2-p^2}}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

Non rimangono più quindi a calcolarsi che le lunghezze K I, K' I'. Considerando la similitudine dei tre triangoli H K I, H' K' I', H'' O K'', si ha: 1.° la proporzione

$$K\,I : H\,K :: H''\,K'' : O\,K''$$

dalla quale

$$K\,I = \frac{H\,K \times H''\,K''}{O\,K''}$$

e colle debite sostituzioni

$$K\,I = \frac{\sqrt{(n^2+p^2-m^2)\,(m^2+n^2-p^2)}}{p\,\sqrt{2} \times \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

2.° la proporzione

$$K'\,I' : H'\,K' :: H''\,K'' : O\,K''$$

dalla quale

$$K'\,I' = \frac{H''\,K'' \times H'\,K'}{O\,K''}$$

e colle sostituzioni

$$K'\,I' = \frac{\sqrt{(m^2+p^2-n^2)\,(m^2+n^2-p^2)}}{p\,\sqrt{2} \times \sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

3.° la proporzione

$$H\,I : H\,K : O\,H'' : O\,K''$$

dalla quale

$$H\,I = \frac{H\,K \times O\,H''}{O\,K''}$$

e per essere $O\,H'' = 1$, così

$$H\,I = \frac{H\,K}{O\,K''}$$

e colle sostituzioni

$$\mathrm{H\,I} = \frac{\sqrt{n^2 + p^2 - m^2}}{p\,\sqrt{2}}$$

4.° la proporzione

$$\mathrm{H'\,I' : H'\,K' :: O\,H'' : O\,K''}$$

dalla quale

$$\mathrm{H'\,I'} = \frac{\mathrm{H'\,K'}}{\mathrm{O\,K''}}$$

e colle sostituzioni

$$\mathrm{H'\,I'} = \frac{\sqrt{m^2 + p^2 - n^2}}{p\,\sqrt{2}}.$$

Considerando per ultimo i due triangoli O H I, O H' I', si ha che essi sono entrambi rettangoli, hanno l'ipotenusa O H = O H', l'angolo H O I = O H' I', essendochè ciascuno di essi sommato coll'angolo H' O I' forma un angolo retto, tale essendo quello H O H'; epperciò i detti triangoli considerati sono eguali ed hanno il lato O I = I' H', I H = O I'.

Onde si ha

$$\frac{\mathrm{K\,I}}{\mathrm{O\,I}} = \frac{\sqrt{(n^2 + p^2 - m^2)(m^2 + n^2 - p^2)}}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)(m^2 + p^2 - n^2)}}$$

$$\frac{\mathrm{K'\,I'}}{\mathrm{O\,I'}} = \frac{\sqrt{(m^2 + p^2 - n^2)(m^2 + n^2 - p^2)}}{\sqrt{(m^2 + n^2 + p^2)(n^2 + p^2 - m^2)}}$$

e facendo per brevità $\frac{m^2 + p^2 + n^2}{2} = \mathrm{S}$, ricavasi

$$\frac{\mathrm{K\,I}}{\mathrm{O\,I}} = \frac{\sqrt{(2\,\mathrm{S} - 2\,m^2)(2\,\mathrm{S} - 2\,p^2)}}{\sqrt{2\,\mathrm{S} \times (2\,\mathrm{S} - 2\,n^2)}} = \sqrt{\frac{(\mathrm{S} - m^2)(\mathrm{S} - p^2)}{\mathrm{S}\,(\mathrm{S} - n^2)}}$$

$$\frac{\mathrm{K'\,I'}}{\mathrm{O\,I'}} = \frac{\sqrt{(2\,\mathrm{S} - 2\,n^2)(2\,\mathrm{S} - 2\,p^2)}}{\sqrt{2\,\mathrm{S}\,(2\,\mathrm{S} - 2\,m^2)}} = \sqrt{\frac{(\mathrm{S} - n^2)(\mathrm{S} - p^2)}{\mathrm{S}\,(\mathrm{S} - m^2)}}.$$

E poichè

$$\frac{KI}{OI}:\frac{K'I'}{OI'}=\frac{\sqrt{(S-m^2)(S-p^2)(S-m^2)S}}{\sqrt{(S-n^2)(S-p^2)(S-n^2)S}}=\frac{S-m^2}{S-n^2}\frac{\sqrt{S(S-p^2)}}{\sqrt{S(S-p^2)}}=\frac{S-m^2}{S-n^2}$$

così dopo fatto $K'I'=OI'\sqrt{\frac{(S-n^2)(S-p^2)}{S(S-m^2)}}$, si ha

$$KI=OI.\frac{K'I'}{OI'}.\frac{S-m^2}{S-n^2}$$

le quali due ultime formole porgono il mezzo di tracciare la proiezione assonometrica di tre assi, colla conoscenza del rapporto delle proiezioni di una lunghezza eguale misurata sui tre assi nello spazio a partire dalla loro origine, e sono appunto quelle state enunciate a pag. 413 nell'appendice del libro precedente.

Come infinite sono le posizioni che possono avere tre rette O X, O Y, O Z nello spazio, così infinite sono le proiezioni assonometriche di assi, ciascuna però determinata dal rapporto di tre numeri. Quindi è che fissati tre numeri qualunque, è possibile il tracciamento di tre assi. Ma poichè nelle trovate formole, si ha il fattore S, che è eguale ad $\frac{m^2+n^2+p^2}{2}$, essendo m, n, p tre numeri scelti, e poichè in esse si hanno dei termini che sono la differenza di S col quadrato di uno dei detti numeri; così scorgesi tosto che perchè questa differenza sia reale e non immaginaria, occorre che il quadrato di un numero sia minore della somma dei quadrati degli altri due, e conseguentemente maggiore della differenza dei medesimi quadrati.

Applicazione. — Allorquando devesi rappresentare in assonometria una figura piana od un corpo, il modo di procedere varia a seconda che trattasi, di una figura piana o corpo del quale se ne conoscano tutte le coordinate di ogni suo punto caratteristico, oppure di una figura piana o corpo del quale si conosca la sua geometrica costruzione.

Nell' appendice del libro precedente essendosi indicato il modo di fissare la proiezione assonometrica di un punto colla conoscenza delle ordinate, così più non rimane che di indicare la proiezione

assonometrica di quelle figure piane o di quei corpi dei quali è conosciuta la geometrica costruzione; ed a raggiungere lo scopo valga l'indicazione del tracciamento della proiezione assonometrica di un ottaedro regolare, di un prisma esagono regolare, di un dodecaedro regolare, ed infine di un circolo nei piani di proiezione, e delle sezioni dei corpi.

Proiezione assonometrica di un ottaedro. — Dal problema 1.° annesso a questo libro, avendosi che l'ottaedro è generato da otto piani passanti per delle diagonali nelle faccie di un cubo, scorgesi tosto come volendo rappresentare in assonometria un ottaedro, basti dopo tracciati gli assi O X, O Y, O Z (Fig. 4) in quel rapporto che si è creduto di scegliere, ad esempio 7 : 5 : 6, formare un cubo, la direzione degli spigoli del quale è determinata da quella stessa degli assi, e ciò con portare a partire dall'origine O dei medesimi, tre distanze O A, O B, O C, le quali sieno tra loro nel rapporto degli assi, che si chiamano *parametri*, e che rappresentano nello spazio tre lunghezze eguali, e col formare una serie di parallelogrammi come scorgesi dalla figura, e poscia segnare le intersezioni di tutti i piani che passano per tre diagonali delle faccie del tracciato cubo.

Siccome però le proprietà dell'ottaedro regolare lo stabiliscono come un corpo nel quale sono possibili tre sole diagonali, eguali tra loro e reciprocamente perpendicolari, così la costruzione assonometrica dell'ottaedro è assai più semplice di quella necessaria per farlo derivare da un cubo.

A tale effetto non si avrà che dopo tracciati gli assi X X', Y Y', Z Z' (Fig. 2), portare su ciascuno di essi a partire dalla loro origine, i parametri O A = O A', O C = O C', O B = O B', e poscia unire tra loro tutti codesti punti, perchè la figura A B A' B' C C' abbia a rappresentare in assonometria un ottaedro regolare.

Proiezione assonometrica di un prisma regolare esagono. — Tracciati gli assi O X, O Y, O Z (Fig. 3) nel rapporto in cui sarà creduto conveniente, ad esempio come nella figura, in quello 7 : 5 : 6 e supponendo che il prisma che si vuole disegnare abbia il piano di base collocato sul piano X O Y, si tracci dapprima in detto piano un esagono regolare. Per ciò fare, sapendo che nell'esagono regolare se si tira una diagonale che unisca due vertici opposti, che essa è eguale al doppio del lato, e che se pel punto di mezzo

di esso, che è il centro del poligono, si innalza alla medesima una perpendicolare, che la lunghezza di questa perpendicolare a partire dal centro è eguale all'altezza di un triangolo equilatero di lato quello dell'esagono; non si avrà che a portare una distanza O A = O A' volendo che questa lunghezza sia quella del lato di base del prisma esagono tracciare, e indi formare un triangolo equilatero O A F, tracciarne l'altezza, e poscia portare quest'altezza sull'asse delle Y, ben'inteso nel rapporto di quest'asse, che nel supposto caso è $O\,B = O\,B' = \frac{5}{7}\,G\,F$, poscia pei punti B e B' condurre delle parallele all'asse delle X e portare $B\,C = B\,C' = B'\,C'' = B'\,C''' = \frac{O\,A}{2}$, e per ultimo tirare le rette A C, A C'', A' C', A' C''' perchè la figura A C C' A' C''' C'' risultante sia la proiezione assonometrica nel piano delle X di un esagono regolare.

Il prisma regolare essendo retto, non si avranno che ha tracciare dai singoli vertici dell'esagono delle parallele all'asse delle Z, e su di esse portare delle lunghezze C D, A E, C'' D'', C''' D''', A' E', C' D', che sieno tutte eguali tra loro ed eguali al lato del prisma, ben inteso sempre nel rapporto della proiezione, cioè nel caso concreto i $\frac{6}{7}$ delle lunghezze reali, perchè dopo tirate le diverse rette E D, E D'', D D', D' E', E' D''', D''' D'', la figura risultante sia la proiezione assonometrica di un prisma regolare esagonale.

Proiezione assonometrica di un dodecaedro regolare. — Il dodecaedro regolare essendo un corpo che ha delle faccie opposte, eguali, parallele ed egualmente distanti, ha perciò delle faccie che appartengono ad un cubo. Siccome poi se si immagina una sezione P Q R T U S (Fig. 4) fatta con un piano perpendicolarmente ad uno spigolo qualunque e passante per altro spigolo, si ha che il detto piano passa pello spigolo opposto parallelo, ed inoltre che l'angolo Q P S = R T U è l'angolo diedro del dodecaedro, così è dato di vedere come gli angoli solidi del dodecaedro regolare essendo triedri, ed ogni angolo piano di 108°, col mezzo dei problemi annessi al libro precedente sia possibile il valutare l'angolo diedro, e conseguentemente anche l'angolo D P Q, e colla formazione di un triangolo rettangolo D P Q avente un angolo

eguale a quest'ultimo ed un cateto eguale alla metà del lato del cubo da cui vuolsi fare derivare il dodecaedro regolare, avere il cateto D Q, che portato sugli spigoli di un cubo determina la posizione delle singole faccie.

Laonde, tracciati gli assi O X, O Y, O Z, e su di essi formato il cubo, non si avrà che a dividere le singole faccie per metà, quelle opposte con una retta parallela al medesimo asse, indi portare la lunghezza D Q sugli spigoli a partire da ogni angolo solido, ben'inteso nel rapporto degli assi sui quali si porta, poscia segnare tutti i piani che passando per la mediana di ogni faccia passano per due dei punti segnati, e per ultimo tracciare le intersezioni che si presentano evidenti di tutti questi diversi piani, che si avrà nella figura determinata da tutte queste intersezioni, la proiezione assonometrica di un dodecaedro regolare.

Come scorgesi alla Fig. 4, la proiezione assonometrica del dodecaedro regolare fatta nel rapporto 7 : 5 : 6, ha delle faccie che rimangono nascoste, mentre che se si va ad osservare il dodecaedro regolare disegnato alla Fig. 7 della Tavola XXXIV nel rapporto 3 : 1 : 2, esso lascia visibile tutte le sue faccie. L'abilità di un disegnatore assonometrico consiste per l'appunto nell'indovinare il rapporto di assi più opportuno, perchè tutte le parti della cosa disegnata abbiano a rimanere scoperte.

Proiezione assonometrica di un circolo. — La proiezione assonometrica di un circolo si eseguisce nella stessa maniera che quella di una figura piana qualsiasi, formando cioè la proiezione assonometrica di tutti i punti che la caratterizzano. Tre punti determinando un circolo ed un piano, così la conoscenza delle coordinate di tre punti, bastano perchè tanto il punto quanto il circolo sieno determinati, sia possibile cioè di poterli rappresentare in assonometria. Tuttavia la soluzione di questo problema richiedendo una profonda conoscenza della geometria descrittiva, così si limita qui il tracciamento della proiezione assonometrica del circolo supponendolo collocato nei piani di prospettiva.

Il quadrato I K L M ed il circolo in esso inscritto (Fig. 6) essendo quello a rappresentare in assonometria nel rapporto ad esempio monodimetrico 3 : 1 : 3, si traccino gli assi O X, O Y, O Z (Fig. 5), in seguito si traccino due scale (Fig. 6), l'una per l'asse delle X e Z, l'altra per quello delle Y, e ciò a motivo che il parametro

X è eguale a quello delle Z, e facciasi in modo che la scala delle Y abbia un denominatore tre volte più grande di quello dell' altra scala.

Si portino a partire dall' origine O degli assi (Fig. 5) una lunghezza O A = O B = I K, ed una lunghezza O C, che se nello spazio è realmente eguale ad I K, in disegno assonometrico supposto non è che di un terzo. Questa lunghezza O C ottiensi col portare la lunghezza I K sulla scala delle X e Z, con leggerne la misura e con prendere nella scala delle Y una lunghezza espressa dallo stesso numero. Si formino i parallelogrammi sui tre assi; quello O A D B sarà la proiezione assonometrica del quadrato di lato I K sul piano delle Z, quello C O A D' sarà quella del medesimo quadrato sul piano delle X, infine quello C O B D'' la proiezione assonometrica del solito quadrato sull' asse delle Y. Ora, il centro del circolo inscritto in un quadrato essendo l'incontro delle diagonali, così è facile la fissazione dei centri dei circoli da descriversi, e fissati i centri si conducano per ciascuno di essi due rette parallele agli assi che determinano i piani sui quali riposano, che essi saranno la proiezione assonometrica di due diametri ortogonali in ciascuno dei circoli a tracciarsi. Si divida il raggio O G del circolo dato in un certo numero di parti nei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, e poscia su di uno dei diametri dei circoli a tracciarsi in assonometria, a partire del centro si portino delle distanze eguali se parallelamente all' asse delle X o delle Z, delle distanze in scala se parallelamente all'asse delle Y, e per tutti questi punti così ottenuti si conducano delle parallele all' altro diametro, su ciascuna delle quali si porti una lunghezza eguale all' omologa se parallelamente ai due assi X e Z, in scala se parallelamente a quello delle Y. Si otterranno così tanti punti, che raccordati convenientemente daranno nelle tre ellissi che si vedono disegnate nella figura, le proiezioni assonometriche del circolo dato nei tre piani di proiezione.

Il tracciamento della proiezione assonometrica di un circolo indica in pari tempo il rovescio del quesito, quello cioè di tracciare una figura della quale è data la sua proiezione assonometrica. Dall' indicata costruzione vedesi infatti chiaro come data una proiezione assonometrica, non si abbiano che a tracciare delle rette parallele agli assi che determinano il piano nel quale è collocata

la figura o il circolo, poscia in disparte tirare due rette ortogonali, sulle quali portare dopo riduzione al loro valore mercè le scale, le coordinate di ciascun punto, che sempre misuransi parallelamente agli assi, e riportate sempre parallelamente alle ortogonali per avere la figura reale. Ed è uno dei principali vantaggi della proiezione assonometrica quello appunto di potere avere da esse tutte quelle misure che può occorrere di ricavare, mantenendo parallele nel disegno quelle rette che sono parallele nello spazio.

Proiezione assonometrica delle sezioni. — La proiezione assonometrica infine si presta assai comodamente pella rappresentazione delle sezioni. La Fig. 7 è la proiezione assonometrica di un prisma ottagonale nel rapporto 3 : 1 : 3 tagliato da un piano parallelo alle basi. Queste proiezioni si ottengono cogli stessi assi, però diversamente disposti. Infatti, tanto l'asse delle X quanto quello delle Y hanno una posizione simmetrica rispetto all' asse delle Z. E poichè disponendo diversamente due assi, si consegue l'effetto della proiezione delle sezioni, è quindi data ad un corpo la sua rappresentazione assonometrica con tre diverse sezioni.

LIBRO SESTO

DEL CILINDRO, CONO E SFERA.

Cilindro. — Chiamasi cilindro il solido terminato da una superficie cilindrica e da due faccie piane opposte parallele che sono due figure curvilinee eguali. È superficie cilindrica quella tracciata dal movimento di una retta parallelamente a sè stessa, ed in modo tale che un punto di essa abbia a percorrere una linea curva non contenuta in nessun piano che contenga essa retta. I tre corpi rappresentati alle Fig. 1, 2 e 3 della Tavola XXXIX, sono tre cilindri.

Nel cilindro le due faccie opposte parallele ed eguali si chiamano le *basi del cilindro*; e la superficie cilindrica chiamasi la *superficie laterale o convessa del cilindro.*

Nel cilindro la retta che unisce i centri di figura delle due basi chiamasi l'*asse del cilindro*, quella generante la superficie laterale chiamasi il *lato del cilindro,* e per ultimo quella che misura la distanza delle due basi, ossia la perpendicolare comune a queste, appellasi l'*altezza del cilindro.*

Secondochè è l'asse di un cilindro perpendicolare o no alle basi, così il cilindro riceve nel primo caso la denominazione di *cilindro retto,* nel secondo caso quella di *cilindro obliquo.*

Infine, secondochè è la figura delle basi di un cilindro, esso riceve ancora particolare denominazione. Così è *cilindro circolare* quello le cui basi sono due circoli, *cilindro ellittico* quello le cui basi sono due ellissi.

Il cilindro rappresentato alla Fig. 1, avendo l'asse D C perpendicolare ai piani delle basi, ed inoltre le figure di base essendo due circoli, è un *cilindro retto circolare.* Il cilindro rappresentato

alla Fig. 2, avendo l'asse O O' perpendicolare ai piani delle basi, ma le figure di base essendo figure curvilinee irregolari, è un *cilindro retto irregolare*. Il cilindro rappresentato alla Fig. 3, avendo l'asse B C obliquo rispetto ai piani delle basi, e le figure di base essendo circoli, è un *cilindro obliquo circolare*.

Prendendo ad esaminare il cilindro retto circolare, è dato di vedere, come in esso essendo l'asse, perpendicolare ai piani dalle basi, qualsiasi retta condotta in esse per i suoi piedi o per i centri di figura delle basi, ch'è tutt'uno, è una perpendicolare all'asse; e quindi come tirate le rette C B, D A che siano parallele tra loro, cioè contenibili in un medesimo piano, queste essendo perpendicolari all'asse D C, ed essendo raggi di circoli eguali, epperciò eguali tra loro, abbiasi nella retta B A una retta eguale e parallela all'asse, e nella figura A D C B un rettangolo i cui lati che lo determinano sono, l'uno l'asse del cilindro, l'altro il raggio dei circoli di base. Ciò posto, infiniti essendo i rettangoli che analogamente si possono ottenere, perchè infiniti sono i raggi paralleli che nei piani delle basi di un cilindro retto circolare si possono condurre, è dato ancora di vedere che tutti questi rettangoli essendo eguali tra loro perchè tutti determinati dai medesimi elementi, i lati di tutti questi rettangoli che stanno opposti all'asse, mantenendosi costantemente paralleli ed eguali all'asse, e quindi eguali e paralleli altresì tra loro ed all' asse, e costantemente mantenendosi gli estremi di questi lati su di circonferenze di circolo, cioè su linee curve, sono per conseguenza altrettanti generatori della superficie laterale del cilindro, epperciò altrettanti lati del cilindro.

Ponendo mente che il movimento di una retta perpendicolare ad altra retta attorno alla quale essa giri produce un piano, è dato tosto di conchiudere come *il cilindro retto circolare è generato dalla rotazione di un rettangolo attorno ad un suo lato*. Infatti, immaginando il rettangolo A D C B che roti attorno il lato C D, è facile il vedere come i due lati C B, A D del rettangolo descrivendo nella loro rotazione due piani perpendicolari al lato C D, epperciò paralleli tra loro, ed il lato A B generando una superficie cilindrica perchè si mantiene nel suo movimento costantemente parallelo all'asse C D, ed inoltre percorre una circonferenza tanto superiormente quanto inferiormente, quella cioè descritta dai lati A D, C B come raggi nel movimento del rettangolo A D C B, il corpo

risultante da una tale rotazione sia un cilindro retto circolare, ed appunto per questa sua generazione *il cilindro retto circolare è chiamato un corpo rotondo.*

I lati di un cilindro retto circolare, essendo eguali e paralleli all'asse, e l'asse essendo perpendicolare ai piani delle basi, così anche i lati, oltre l'essere eguali tra loro, sono perpendicolari ai piani delle basi, per cui è possibile di tracciare sulla superficie laterale di un cilindro retto circolare un lato, nel tracciamento di una perpendicolare ai piani delle basi da un punto qualunque del perimetro delle medesime. E poichè l'altezza di un cilindro è eguale alla perpendicolare comune alle due basi, così nel cilindro in considerazione l'altezza è eguale all'asse ed al lato.

Prendendo ad esaminare il cilindro semplicemente retto, ma la di cui base è una figura curvilinea qualunque, come quello rappresentato alla Fig. 2, egli è dato di vedere come pure in esso l'asse essendo perpendicolare ai piani delle basi, qualunque retta condotta dai centri di figura al perimetro delle basi essendo rette perpendicolari all'asse, per l'eguaglianza delle figure di basi nel cilindro, e quindi di quella altresì della posizione dei centri di figura, tutte quelle rette contenute nei piani delle basi e che sono tra loro parallele, partenti dal centro di figura e limitate al perimetro delle basi, sono eguali, e conseguentemente a questa eguaglianza ed alla perpendicolarità di esse coll'asse, derivi l'eguaglianza e parallelismo coll'asse delle rette che uniscono i loro estremi, non che la perpendicolarità di queste ai piani delle basi. Ora egli è evidente, come tirando dal centro di figura nel piano della base inferiore le diverse rette O A, O B, O C, O D, e dal centro di figura nel piano della base superiore le altre rette O' A', O' B', O' C', O' D', parallele alle prime, queste essendo tutte indistintamente perpendicolari all'asse O O' perchè contenute in piani a quello perpendicolari, ed inoltre essendo quella O A = O' A', quella O B = O' B', quella O C = O' C', quella O D = O' D', e le rette A A', B B', C C', D D', parallele ed eguali ciascuna all'asse, poichè le figure A O O' A', B O O' B', C O O' C', D O O' D', sono tanti rettangoli aventi un lato comune nell'asse, sono conseguentemente tutte parallele ed eguali tra loro, ed eguali e parallele all'asse; ognuna di dette rette può essere considerata come una generatrice della superficie cilindrica o laterale del cilindro. Ma poichè qualsiansi altre rette parallele

che si fossero condotte dai centri di figura al perimetro nei piani delle due basi, esse sarebbero sempre state eguali, ed anche eguali all'asse le rette che avrebbero congiunti gli estremi collocati sul perimetro delle basi, così è dato conchiudere come nel cilindro retto il lato è eguale all'asse. E poichè l'asse nel cilindro retto è perpendicolare alle basi, così anche i lati del cilindro retto sono perpendicolari alle basi, e l'altezza essendo la perpendicolare compresa e comune alle due basi, è dato aggiungere *nel cilindro retto l'altezza è eguale all'asse ed al lato.* In un cilindro retto ogni perpendicolare alle basi innalzata in un punto qualsiasi del suo perimetro, è un lato del cilindro.

Venendo infine alla considerazione di un cilindro obliquo come quello rappresentato alla Fig. 3, è dato di vedere come in esso esistendovi pure le basi parallele ed eguali, eguali sono pure le rette condotte in esse dal centro di figura al perimetro, e che sieno parallele tra loro, cioè contenute nel medesimo piano, eguali perciò C D e C E ad A B e B F. Ma essendo queste rette eguali, eguali sono pure quelle che ne congiungono gli estremi come A D, E F, perchè lati opposti di parallelogrammi aventi un lato comune nell'asse B C, onde i lati a questo opposto sono eguali pure all'asse, ed oltre a questa eguaglianza avendo il parallelismo e collocati gli estremi sopra linee curve quali sono i perimetri delle figure di basi di un cilindro, così essi sono altrettanti generatori di una superficie cilindrica, ed è quindi perciò dato di conchiudere come *in qualsiasi cilindro il lato è eguale all'asse.*

Ma mentrechè nel cilindro retto il lato è eguale all'altezza, nel cilindro obliquo l'altezza è espressa della retta C H perpendicolare alle due basi, e quindi da una lunghezza sempre minore dell'asse.

Proprietà dei cilindri. — I cilindri dividendosi nelle due distinte categorie, quella dei cilindri retti e quella dei cilindri obliqui, di ciascuno di questi si vedano le relazioni che corrono fra la loro essenza e nuovi elementi in essi introdotti. Gli elementi in geometria solida essendo i piani ed i solidi, così le proprietà dei cilindri si riducono a quelle che sono per risultare dalla considerazione di piani e di solidi introdotti nei cilindri.

Ciò posto, prendendo ad esaminare l'intersezione prima in un cilindro retto, poscia in un cilindro obliquo fatta da un piano, egli

giova anzitutto vedere quante sieno le distinte posizioni che può avere un piano il quale abbia a fare con un cilindro.

Un piano rispetto ad un cilindro, o lo taglia o non lo taglia, restando in quest' ultimo caso tangente al cilindro.

Un piano che abbia a tagliare un cilindro, o può passare per l'asse, o può essere solo parallelo all'asse, o può infine tagliarlo comunquemente.

Considerando dapprima un piano condotto in un cilindro per modo che passi per l' asse, si esamini il risultato della sezione fatta da esso, prima nel cilindro retto, poscia nel cilindro obliquo. Sia perciò il cilindro rappresentato alla Fig. 4 un cilindro retto circolare, nel quale si conduca un piano B B' D' D passante per l'asse O O'. Egli è evidente come l' intersezione di un tal piano colle due basi non può essere altrimenti che in ciascuna una retta passante per il centro di figura, ed in entrambe, due rette parallele. Nel caso del cilindro retto circolare, le basi essendo circoli, ed ogni retta che passi pel centro e sia limitata alla circonferenza, essendo un diametro, è visibile come l' intersezione di un piano che passi per l'asse di un cilindro retto circolare ha luogo colle basi secondo due diametri paralleli B D, B' D' condotti in esse, epperciò secondo due rette che dividono in due parti perfettamente eguali le basi del cilindro. Ogni piano poi che contenga una perpendicolare ad un piano essendo a questo pure perpendicolare, ne deriva che il piano che contiene l' asse in un cilindro retto è perpendicolare ai piani delle basi, e come tale è capace di contenere i lati B B', D D' del cilindro, condotti pei punti B e D, in cui essa taglia il perimetro della base inferiore. Ma questi lati appartenendo ad un tempo e alla superficie cilindrica e al piano, essi sono l' intersezione del piano colla superficie cilindrica, e questa intersezione essendo perciò parallela all' asse e perpendicolare ai piani delle basi del cilindro, e conseguentemente perpendicolare anche ai diametri condotti nelle basi, così è la figura di sezione B D D' B' un rettangolo, di lati, l'uno il lato del cilindro, l'altro il diametro delle basi. Ma ogni diametro essendo doppio del raggio nello stesso circolo, è così dato di conchiudere come *la figura di sezione fatta da un piano qualunque che passi per l' asse di un cilindro retto circolare, è un parallelogramma rettangolo doppio del rettangolo generatore.*

Se dopo la figura di sezione osservasi la scomposizione stata operata nel cilindro dal piano condotto nel senso in questione, vedesi tosto come la detta scomposizione sia avvenuta in due parti perfettamente eguali e sovrapponibili, ciascuna delle quali chiamasi un *semicilindro retto*, sovrapponibili poi, perchè tali le basi altro non essendo che semicircoli eguali, tali la superficie cilindrica perchè generata da una retta perpendicolare al medesimo piano e che percorre una curva eguale.

Il cilindro rappresentato alla Fig. 5 essendo un cilindro obliquo circolare, per il centro O della base inferiore si conduca un diametro qualunque B D, e per esso e per l'asse facciasi passare un piano; questo piano incontrerà la faccia superiore manifestamente secondo una retta B' D' parallela a quella B D, posciachè parallele sono sempre le intersezioni di due piani paralleli con un piano che li attraversi, ed inoltre la retta B' D' passerà pel centro O' della base superiore, questo punto appartenendo all'asse; onde è dato di dire che qualsivoglia piano passante per l'asse di un cilindro circolare taglia le basi secondo due diametri. Ora è evidente che essendo inoltre O B = O' B', O D = O' D', sono le rette B B', D D' entrambe eguali e parallele all'asse siccome lati opposti di un parallelogramma, e quindi: *la figura di sezione in un cilindro circolare fatta da un piano che passi per l'asse, è un parallelogramma, i cui lati sono, l'uno il lato dal cilindro, l'altro il diametro delle basi.* Nel cilindro obliquo i lati essendo obliqui rispetto ai piani delle basi, ed ogni obliqua essendo perpendicolare ad una sola retta condotta nel piano, ne segue che tracciato pel centro della base inferiore una tale retta, per la qual cosa è sufficiente abbassare sul piano di base una perpendicolare od altezza come O' H, indi tirare la perpendicolare all'asse, epperciò anche a qualsiasi parallela ad esso, cioè a qualsiasi lato, e per questa retta E I e per l'asse fatto passare un piano, questo piano darà nella figura di sezione E I G F un parallelogramma rettangolo i cui lati sono come nel cilindro retto, l'uno il lato del cilindro, l'altro il diametro delle basi. È dato quindi conchiudere: *il piano che passando per l'asse di un cilindro obliquo dia nella figura di sezione un rettangolo, è uno solo;* essendo come si disse, una sola la retta tracciabile nelle basi, che sia perpendicolare all'asse, e quindi a qualunque parallela al medesimo, cioè a qualsiasi lato.

Ogni piano che passi per l'asse di un cilindro obliquo circolare lo scompone in due parti che sono due *semicilindri obliqui,* eguali e simmetrici. Egli è infatti facile il comprendere che ogni diametro dividendo il circolo in due semicircoli eguali, allorquando si immaginino i due semicilindri obliqui in cui si è scomposto un ciclo obliquo, compiere un giro di 180° attorno alla linea di simmetria, essi divengono sovrapponibili, potendo coincidere le basi e coincidere pure la superficie cilindrica perchè generata da una retta parallela.

Se si prendono a considerare poi, due piani che entrambi passino per l'asse di un cilindro, e per conseguenza questo sia la loro linea d'intersezione, si vedrà che essi separano dal cilindro una porzione, la quale è terminata da due faccie opposte parallele che sono due settori circolari, e lateralmente da una superficie cilindrica e da due piani, e che perciò chiamasi un *settore cilindrico.* Il settore cilindrico può essere, del pari che il cilindro, retto od obliquo. Il settore cilindrico B O A B' O' A' originato dai due piani A O O' A', B O O' B' condotti per l'asse in un cilindro retto come quello rappresentato alla Fig. 4, è retto; ed il settore cilindrico A O B A' O' B' originato dai due piani A O O' A', B O O' B condotti per l'asse in un cilindro obliquo come quello rappresentato alla Fig. 5, è obliquo. La superficie cilindrica poi appartenente ad un settore cilindrico, appellasi una *zona cilindrica.*

Venendo alla considerazione di piani tracciati in un cilindro solo paralleli all'asse, si esamini dapprima il risultato della sezione prodotta in un cilindro retto, poscia in un cilindro obliquo. Perciò essendo il cilindro rappresentato alla Fig. 4 un cilindro retto circolare, si prenda un punto qualsiasi C del perimetro della base inferiore, e per esso ed in essa si tracci una retta qualsiasi C D, indi per questa retta si conduca un piano che sia parallelo all'asse.

L'asse nel cilindro retto essendo perpendicolare ai piani delle basi, così anche i piani paralleli ad esso sono perpendicolari alle basi, ed il piano condotto pella retta C D essendo così perpendicolare alle basi, esso contiene i lati C C', D D' del cilindro, e questi essendo comuni e alla superficie cilindrica ed al piano, essi segnano l'intersezione del piano colla superficie cilindrica. Ma la retta C' D' contenuta in piani paralleli e contenuta contemporaneamente nel medesimo piano che la retta C D, è alla medesima

parallela, e poichè paralleli sono pure i lati C C', D D', e di più perpendicolari ai piani delle basi, perpendicolari cioè a C D ed a C' D', così la figura di sezione C D D' C' è un parallelogramma rettangolo, epperciò è dato conchiudere come *nel cilindro retto circolare, la figura di sezione prodotta da un piano parallelo all'asse è un parallelogramma rettangolo.*

Ogni piano parallelo all'asse di un cilindro retto circolare separa da esso una porzione terminata da due basi eguali e parallele, che sono due segmenti di circolo ed una sol base, e lateralmente da una superficie cilindrica e da una superficie piana, e che perciò riceve il nome di *segmento cilindrico retto ad una sol base.*

Egli è facile di vedere come il segmento cilindrico ad una sol base è la differenza fra un settore cilindrico ed un prisma triangolare, siccome è nella geometria piana il segmento circolare la differenza fra un settore ad un triangolo.

La porzione di cilindro che si ottiene poi mediante due piani condotti parallelamente all'asse e parallelamente tra di loro, avendo due basi uguali che sono due segmenti di circolo a due basi, e lateralmente da due faccie piane e da due faccie cilindriche, chiamasi un *segmento cilindrico retto a due basi parallele.* Tale è quello A C D F A' C' D' F'.

Infine, la porzione di cilindro retto circolare determinata da due piani paralleli all'asse, ma non paralleli tra loro, e che così originano un solido terminato da due faccie opposte eguali e parallele, che sono due segmenti circolari a basi non parallele, e lateralmente da due faccie piane e da due faccie cilindriche, chiamasi un *segmento cilindrico retto a basi non parallele.* Tale è il solido G A F H G' A' F' H'.

Il cilindro rappresentato alla Fig. 5 essendo obliquo e circolare, se si prende un punto qualunque C sul perimetro della base inferiore, e si tira in essa una retta C D, poscia per questa si fa passare un piano che sia parallelo all' asse, questo piano intersecherà la faccia superiore secondo una retta C' D' parallela a quella C D, stantechè parallele sono le intersezioni fatte da un piano che tagli piani paralleli; ed inoltre conterrà i lati C C', D D' del cilindro condotti dai punti C e D, essendochè dai punti C e D le parallele all'asse, ovvero dire quei lati, non possono altrimenti che essere collocati in un piano parallelo all'asse. Ma essendo C C' = D D' e

paralleli tra loro, ed inoltre essendo C D parallelo a C′ D′, è la figura di sezione C D D′ C′ un parallelogramma.

È quindi dato di dire come *la figura di sezione prodotta in un cilindro qualunque da un piano parallelo all'asse, è un parallelogramma avente costantemente un lato eguale a quello del cilindro.*

Però di tutti i parallelogrammi di sezione ottenibili in un cilindro obliquo con piani paralleli all'asse, un solo è parallelogramma rettangolo, ed è quello che interseca le due basi secondo una retta parallela alla perpendicolare condotta nel piano della base inferiore alla proiezione su di essa dell'asse, e ciò per le considerazioni stesse che vennero dette intorno ad un piano che passasse per l'asse di un cilindro obliquo.

Medesimamente che nel cilindro retto, nel cilindro obliquo qualsivoglia piano parallelo all' asse, separa da esso un solido terminato da due faccie opposte eguali e parallele, lateralmente da una faccia piana e da una faccia cilindrica, nel modo stesso che si disse pel cilindro retto, e che chiamasi *segmento cilindrico obliquo ad una sola base*, ed è la differenza fra un settore cilindrico obliquo ed un prisma triangolare obliquo.

Medesimamente ancora che nel cilindro retto, nel cilindro obliquo si ha il *segmento cilindrico obliquo a basi parallele* in E C D I F C′ D′ G, ed il *segmento cilindrico obliquo a basi non parallele* in B E I P B′ F G P′, che non differiscono che per la nuova denominazione di obliquo, che ricevono appunto per la loro derivazione, o se vuolsi per la posizione della superficie laterale rispetto alle basi.

Prendendo a considerare l' intersezione arrecata in un cilindro da un piano che non sia parallelo all' asse, e che perciò lo tagli, considerisi quella operata prima in un cilindro retto, poscia in un cilindro obliquo.

Rappresentando la Fig. 6 un cilindro retto circolare, si immagini dapprima un piano che sia parallelo alla base, in seguito un piano che sia comunquemente collocato, tagliando però ben' inteso l'asse.

Immaginando un piano come E F o G H, che sia parallelo alla base, epperciò nel cilindro retto, che sia perpendicolare all' asse, è facile il vedere che la figura di sezione è una figura eguale alla figura di base, e che il risultato della sezione è la scomposizione del cilindro in altri cilindri di eguale base. Infatti, qualunque piano

E F o G H che sia perpendicolare all'asse nel cilindro retto circolare, tagliando il rettangolo generatore A O O' C secondo delle rette E Q, G S perpendicolari al lato O O', è evidente come la rotazione del rettangolo generatore importi con sè la rotazione delle rette E Q, G S, le quali per essere perpendicolari ad O O' non possono a meno di descrivere altrettanti piani, e gli estremi delle medesime altrettante circonferenze, eguali perfettamente alle circonferenze di base, per cui evidentemente le parti in cui un cilindro retto è scomposto da piani paralleli alle basi, sono cilindri retti, siccome generati essi pure dalla rotazione di rettangoli, come sarebbero per i piani supposti i rettangoli E Q O' C, G S Q E, A O S G. Del resto, scindendo da questa considerazione, siccome ogni piano condotto parallelamente alla base di un cilindro è equidistante da questa, tutti i lati che è dato di tracciare sulla superficie cilindrica di un cilindro retto essendo tagliati egualmente dai piani condotti, i cilindri risultanti avendo eguali tutti i lati e inoltre i medesimi perpendicolari alle rispettive basi, essi sono altrettanti cilindri retti di eguale base.

Rimane quindi a vedere la sezione prodotta in un cilindro retto circolare da un piano che tagliando l'asse non sia ad esso perpendicolare, vale a dire, vedere la sezione di un piano F N L E condotto in un cilindro retto circolare A B C D, come quello rappresentato alla Fig. 7. Per ciò si immaginino condotti due piani P T, R V, che sieno paralleli alle basi. Le basi essendo due circoli, due circoli sono i piani R T ed R V, aventi i loro centri in Q ed S collocati sull'asse O O', i quali poi intersecano il piano E F secondo le rette I L, U N, e le quali intersezioni per essere contenute contemporaneamente ed in piani paralleli ed in un medesimo piano, esse sono parallele. Ora bene, essendo I L, U N due corde parallele tracciate in circoli eguali, ne deriva che divisa per metà la prima in H, la seconda in G, e poscia condotti i diametri P T, R V, si avrà per le note proprietà delle rette tirate in un circolo (pagina 255), che è dato di potere stabilire le due proporzioni seguenti:

$$PH : HL :: HL : HT, \qquad RG : GN :: GN : GV$$

e quindi dedurre

$$\overline{HL}^2 = PH \times HT, \qquad \overline{GN}^2 = RG \times GV.$$

Ma poichè se immaginasi un piano il quale passi pel diametro P T e per quello R V parallelo, un tale piano intersecherà quello E F secondo la retta E F, risultando nella sezione, dei triangoli E H T, E G V, i quali sono simili siccome aventi H T parallelo a G V, ed altresì simili gli altri due triangoli R G F, P H F per la medesima ragione d'essere R G parallelo a P H, è così dato di potere stabilire le proporzioni

$$HT : GV :: HE : GE, \qquad HP : RG :: HF : GF$$

le quali moltiplicate termine a termine danno per risultato

$$HT \times HP : GV \times RG :: HE \times HF : GE \times GF$$

nella quale proporzione essendo i due primi termini, il primo eguale ad $\overline{HL}^2$, il secondo eguale a $\overline{GN}^2$, convertesi nell'altra

$$\overline{HL}^2 : \overline{GN}^2 :: HE \times HF : GE \times GF.$$

Le rette H L e G N essendo entrambe divise per metà dalla retta E F, e nella figura F N L E I V i quadrati di esse essendo pella ricavata proporzione, tra loro nel rapporto dei prodotti dei segmenti da esse formati sulla retta E F, è dato di conchiudere come, una tale proporzione combinando colla relazione fra le rette tirate in una ellisse stata dimostrata a pag. 299, *qualsiasi piano condotto obliquamente all' asse di un cilindro retto circolare origina nella figura di sezione una ellisse.*

Un piano condotto obliquamente all' asse di un cilindro retto, lo scompone in due *tronchi di cilindro retto.* Ed alloraquando il piano condotto viene a passare pella metà dell'asse O O' in S, in allora i due tronchi in cui è scomposto il cilindro retto sono perfettamente uguali, ond'è che il tronco di cilindro può essere considerato siccome eguale alla metà di un cilindro retto di eguale base e di doppia altezza.

Considerando ora un cilindro obliquo come quello rappresentato alla Fig. 8, il quale venga tagliato da piani paralleli ai piani delle basi come quelli F E, D C, taglianti l'asse O O', il primo nel punto

Q, il secondo nel punto S, egli è dato di vedere essere nel modo stesso che nel cilindro retto, la figura di sezione, una figura eguale al piano delle basi, e la scomposizione operata quella in cilindri di eguale base. Un cilindro obliquo potendolo ridursi in un cilindro retto, bastando il tagliarlo con due piani perpendicolari all' asse, scorgesi ben tosto come la figura di sezione di un piano comunquemente tagliante l'asse di un cilindro obliquo, è identica con quella nascente dall'intersezione di un piano qualunque col cilindro retto.

Un piano M N si dirà tangente ad un cilindro come quello rappresentato alla Fig. 9, alloraquando avrà comune con esso un solo lato.

Egli è cosa assai facile il rendersi ragione come un piano che abbia a comune un lato di un cilindro e che non lo tagli, esso non abbia comune nessun altro punto della superficie laterale del medesimo; egli basta perciò l'osservare che se avesse comune un altro punto, la superficie cilindrica sarebbe o una superficie piana o un composto di superficie piane, ma la superficie cilindrica essendo generata dal movimento di una retta che percorre con un suo estremo, non già una linea retta, ma bensì una linea curva, e quindi curva è la superficie descritta, cosicchè è dato di dire che una retta applicata sulla superficie laterale di un cilindro non può trovarvi l'intiero collocamento che nella direzione di un lato, cioè in quella parallela all'asse.

Data la posizione di un piano tangente ad un cilindro retto circolare, se ne traccia la linea di contatto immaginando condotto per l'asse O O', prima un piano D E C B parallelo al piano tangente, e poscia altro T A F V perpendicolare, il quale intersecherà la superficie cilindrica secondo la retta T V, che sarà la linea di contatto di un piano parallelo a quello D E C B e tangente alla superficie cilindrica. Infatti, il piano così condotto contenendo le due tangenti condotte pei punti S e T di contatto ai piani delle basi, conterrà le tangenti condotte per qualsiasi punto della V T nei piani paralleli alle basi, ed è così tangente al cilindro.

In un cilindro qualsiasi e la cui base sia una ellisse, la linea di contatto di un piano ad esso tangente è l'intersezione con esso di un piano tracciato per l'asse e nella direzione del diametro coniugato a quello parallelo al piano tangente.

Un cilindro essendo cilindro anche quando la figura delle due basi è una figura curvilinea qualsiasi, e quindi anche una figura curvilinea non convessa, così a quello stesso modo che una retta tangente al perimetro di una tale figura può avere più punti a comune, così è del cilindro la cui figura di base sia una figura curvilinea non convessa, in cui un piano può essergli tangente ed avere a comune due diversi lati, come ancora essergli tangente e tagliarlo. La geometria però non si occupa che dei cilindri convessi, non avendo i cilindri non convessi delle proprietà proprie, ma solo quelle comuni alle parti in cui possono venir scomposti.

Valori delle superficie dei cilindri e loro parti. — Premesso che un cilindro qualsiasi collocato colla sua superficie laterale su di un piano, esso viene ad avere comune col piano il lato, premesso che nel cilindro retto il lato è perpendicolare ai piani delle basi, è dato di vedere che se alla suddetta disposizione dato ad un cilindro, lo si fa rotolare sul piano di un intiero giro, il cilindro nel rotolamento svolge la sua superficie laterale, e per la perpendicolarità dei lati, e quindi del piano che li contiene, con quelli delle basi di un cilindro, i perimetri delle due basi si rettificano su di una linea retta perpendicolare al lato, e quindi *lo sviluppo della superficie laterale del cilindro retto è un rettangolo avente per base il perimetro delle basi del cilindro, e per altezza il lato del cilindro.* Cosicchè è la superficie laterale di un cilindro retto eguale a quella di un rettangolo avente per base il perimetro delle basi del cilindro e per altezza il lato del cilindro, e poichè la misura della superficie di un rettangolo è eguale al prodotto della base per l'altezza, così si dice l'area della superficie laterale del cilindro retto è eguale al prodotto della misura del perimetro di base per la misura del lato.

Giungesi del resto alla medesima espressione per l'area della superficie convessa di un cilindro, col parallelo di esso a dei prisma, i quali hanno i lati collocati sulla superficie convessa, e che perciò si chiamano *prisma inscritti nel cilindro*, e di quelli che hanno le faccie laterali tangenti alla superficie convessa del cilindro, e che perciò si chiamano *prisma circoscritti al cilindro.*

Se in un cilindro retto come quello rappresentato alla Fig. 10, si inscrive un prisma, vale a dire se nella figura curvilinea della base inferiore di quel cilindro si inscrive un poligono, indi per i lati

di questo si fanno passare dei piani, i quali sieno paralleli all'asse, epperciò si intersechino secondo altrettanti lati, risulta un prisma inscritto, nel quale la sua superficie laterale, per quanto è stato detto a pag. 448, è eguale al prodotto del perimetro di base per il lato. Se nel medesimo cilindro si inscrive un altro prisma di un doppio numero di lati, e per conseguenza un prisma la cui figura di base è un poligono inscritto in quella di base del cilindro e di un doppio numero di lati a quello precedentemente inscritto, egli è dato di vedere che la superficie laterale di un tale prisma è pure essa eguale al prodotto del perimetro della propria base per l'altezza del cilindro; cosicchè le superficie laterali dei due prisma inscritti nel cilindro essendo due prodotti composti di un medesimo fattore, essi stanno tra loro come i perimetri delle rispettive basi, e quindi è dato di vedere come le superficie laterali dei prisma che man mano si possono inscrivere in un cilindro, accrescendone costantemente il numero dei lati, sieno superficie laterali che costantemente vanno avvicinandosi per coincidere colla superficie convessa del cilindro, senza però mai giungere a tanto, non esistendo il poligono il quale coincida col perimetro di una figura curvilinea. Ma poichè queste superficie laterali vanno avvicinandosi a quella convessa del cilindro, e siccome esse stanno tra loro come i perimetri dei poligoni di base, i quali poligoni sono tanto più grandi quanto più essi si accostano al perimetro della figura curvilinea di base, è dato di vedere come qualunque superficie piana è minore di qualunque altra superficie che la avvolga, e quindi come *la superficie convessa di un cilindro è maggiore della superficie laterale di un qualunque prisma inscritto.*

Medesimamente se in un cilindro retto come quello rappresentato alla Fig. 10, si circoscrive un prisma, cioè a dire se nella figura curvilinea di base di quel cilindro si circoscrive un poligono, indi per i lati di questo si fanno passare dei piani che sieno paralleli all'asse, i quali si intersecheranno secondo delle rette a questo parallele, e risulteranno tangenti alla superficie convessa del cilindro, ed il prisma risultante, circoscritto al cilindro, la superficie laterale di questo prisma è essa pure eguale al prodotto del perimetro di base per il lato del prisma o del cilindro, ch'è tutt'uno, perchè eguali tra loro due rette parallele comprese in piani paralleli. Ora, se nello stesso cilindro si circoscrive un altro prisma, il cui

numero di lati di base sia doppio di quello del precedente, ciò che torna lo stesso, il circoscrivere alla figura curvilinea di base del cilindro un poligono di un doppio numero di lati, e per questi condurre dei piani paralleli all'asse, i quali si intersecheranno tutti secondo delle rette parallele all'asse, risulteranno tutti tangenti alla superficie convessa del cilindro, ed origineranno coi piani delle basi del cilindro un prisma ad esso circoscritto, la superficie laterale del quale è eguale a quella del perimetro di base per il lato del cilindro, e poichè la superficie laterale di questo prisma ha con quella del prisma precedente un fattore comune nel lato del cilindro, così queste due superficie stanno tra loro come i perimetri delle loro basi, ma di questi perimetri essendo più grande quello di un più piccolo numero di lati, così delle superficie laterali dei prisma circoscritti al medesimo circolo, più piccola è quella che ha per perimetro di base un poligono di maggiore numero di lati.

Ma poichè il perimetro di ogni qualunque figura curvilinea convessa, è più piccolo del perimetro di qualsivoglia poligono circoscritto, è dato conchiudere come *la superficie convessa di un cilindro è minore della superficie laterale di qualsiasi prisma ad esso circoscritto.*

Ciò posto, la superficie convessa di un cilindro retto essendo compresa nei limiti dei prisma inscritti e circoscritti, essa è eguale al prodotto della misura del perimetro di base del cilindro per la misura del lato. D'altronde, se la superficie convessa di un cilindro fosse eguale ad un prodotto maggiore formato perciò mantenendo per fattore costante la misura del lato del cilindro e per altro fattore uno che fosse più grande o più piccolo del perimetro di base, egli ne avverrebbe che nel primo caso supponendo essere A B C D E F un perimetro più grande di quello di base del cilindro, poichè egli è possibile sempre un perimetro rettilineo intermedio 1' 2' 3' 4' 5' 6' che sia tangente al perimetro della base del cilindro, ed anche tale che non abbia a toccare il perimetro supposto, così è dato immediatamente di vedere come, immaginando costrutti su detti due perimetri due prisma, il prodotto del perimetro 1' 2' 3' 4' 5' 6' per l'altezza O Q, cioè la superficie laterale di quel prisma, è il risultato del prodotto di una quantità costante quale l'altezza del cilindro, per una quantità più grande del perimetro di base del

cilindro, tale essendo il perimetro di qualsiasi poligono circoscritto ad una figura curvilinea; onde dovrebbe essere la superficie laterale del prisma circoscritto al cilindro, maggiore altresì della superficie del prisma stato costrutto sulla base A B C D E F e stato supposto di una superficie pari a quella del cilindro, ma ciò essendo un assurdo, così assurdo è anche che la superficie convessa di un cilindro retto sia eguale al prodotto della sua altezza per un perimetro più grande. Nel secondo caso supponendo che la superficie convessa di un cilindro fosse eguale al prodotto dell' altezza di esso per un perimetro più piccolo di quello del cilindro, si avrebbe medesimamente che inscrivendo nella figura curvilinea di base un poligono 1—2—3—4—5—6, i cui lati non abbiano a toccare il perimetro supposto, e poscia immaginando costrutto su di essi due prisma aventi l' altezza del cilindro, il prodotto del perimetro 1—2—3—4—5—6 per l' altezza O Q essendo l'espressione della superficie laterale del prisma costrutto su di quel perimetro, ed un tale prodotto essendo minore di quello dell'altezza O Q per il perimetro della base del cilindro, essendochè è la circonferenza di un circolo sempre maggiore del perimetro di qualsiasi poligono ad essa inscritto, deve pure essere minore del prodotto dell'altezza O Q per il perimetro supposto, ma ciò essendo un assurdo, un assurdo è anche che la superficie convessa di un cilindro sia espressa dal prodotto della sua altezza del cilindro per un perimetro più piccolo del perimetro di base.

Laonde, la superficie convessa di un cilindro retto essendo espressa dal prodotto della sua altezza per un perimetro nè più grande nè più piccolo del perimetro della propria base, è dato conchiudere come *la misura della superficie convessa di un cilindro retto è eguale al prodotto della misura del perimetro di base per la misura della sua altezza.* Onde, essendo P il perimetro di base di un cilindro retto di altezza H, è la superficie convessa $S = P \times H$.

Nel cilindro retto circolare il perimetro di base essendo una circonferenza, e quindi eguale al prodotto della misura del raggio per $2\,\pi$ (pag. 278), perciò conoscendo il raggio di base R e il lato L di un cilindro retto circolare, si ha la superficie convessa S nella formola $S = 2\,\pi\,R\,L$. La superficie totale poi di un cilindro convesso essendo eguale alla superficie convessa più quella di due circoli eguali, così la superficie di un circolo essendo espressa dal

prodotto della misura della circonferenza per la metà del raggio (pag. 278), è la superficie totale S di un cilindro retto circolare espressa dalla formola $S = 2 \pi R (L + R)$, dalla quale chiaro apparisce come il rapporto fra la superficie laterale di un cilindro retto circolare e quella della base, è eguale al rapporto corrente fra il lato e la metà del raggio di base.

Con ragionamento del tutto analogo, ed inutile a ripetere, potendosi dimostrare che la superficie di una zona cilindrica retta è compresa fra la superficie laterale di prisma retti ad essa inscritti e circoscritti, ed altresì che la sua superficie è il prodotto dell'altezza sua e del cilindro al quale appartiene, per un perimetro nè più grande nè più piccolo del perimetro suo di base, è dato aggiungere come *l'area di una zona cilindrica retta è eguale al prodotto della misura del suo lato per la misura del perimetro di base;* cioè a dire la superficie convessa di un cilindro retto e quella di una zona cilindrica al medesimo appartenente, stanno tra loro come i perimetri delle loro basi.

Un piano condotto attraverso ad un cilindro retto e che tagli per metà l'asse, scomponendolo in due parti eguali, è così dato di dire come *la misura della superficie convessa di un tronco di cilindro retto è eguale al prodotto della misura del perimetro di base per la misura dell'asse.*

Dalla misura della superficie convessa di un tronco di cilindro deducesi quella di un cilindro obliquo. Infatti, ogni cilindro obliquo come quello rappresentato alla Fig. 11, essendo scomponibile mercè la *sezione retta*, cioè quella segnata da un piano P D Q E perpendicolare al lato A A', in due tronchi di cilindro retto, la misura della superficie convessa di ciascuno dei quali è eguale al prodotto del perimetro della sezione retta per l'asse C O l'uno, per l'asse C O' l'altro, è quindi la superficie convessa di un cilindro obliquo eguale alla somma di due prodotti aventi un fattore comune nel perimetro della sezione retta, epperciò eguale al prodotto del fattore comune per la somma degli altri due fattori. Ma la somma degli assi dei due tronchi facendo l'asse intiero del cilindro obliquo, eguale al lato, così *l'area della superficie convessa di un cilindro obliquo è eguale al prodotto della misura del perimetro della sezione retta per la misura dell'asse o lato.* Cosicchè, essendo P_s il perimetro della sezione retta, ed L il lato di un cilindro obliquo, è la superficie laterale $S = P_s \times L$.

Un tronco di cilindro obliquo essendo parimenti scomposto dalla sezione retta in due tronchi di cilindro retti, è per un ragionamento analogo a quello tenuto pella derivazione della superficie convessa del cilindro obliquo, dato di potere dire come l'area della superficie convessa di un tronco di cilindro obliquo è eguale al prodotto della misura del perimetro della sezione retta pella misura dell'asse. Una zona cilindrica obliqua essendo tagliata dalla sezione retta nel cilindro obliquo, al quale appartiene secondo un piano perpendicolare ai suoi lati, e la sua superficie essendo proporzionale a quella dell' intiero cilindro, nel rapporto stesso dei rispettivi perimetri di sezione retta, così: *l'area di una zona cilindrica obliqua è eguale al prodotto della misura del perimetro della propria sezione retta per quella del proprio lato.*

Misura dei cilindri. — Se in un cilindro come quello rappresentato alla Fig. 10, si immagina inscritto un prisma, in seguito un altro prisma il cui numero di lati di base sia doppio del numero di lati della base del primo, egli è dato di vedere come sapendo pel teorema di cui a pag. 473, che il volume di un prisma qualunque è eguale al prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza, oppure per quella del lato nel cilindro retto; i due prisma inscritti nel cilindro essendo misurati dal prodotto di due fattori, di cui uno l'altezza, è in entrambi costante, essi sono nel rapporto delle loro basi, cioè in quello delle aree dei due poligoni inscritti nella figura di base del cilindro, ma queste essendo tanto più grandi quanto più essi hanno un maggiore numero di lati, quanto più essi si accostano al perimetro della figura curvilinea di base, così i volumi dei prismi inscritti in un cilindro sono tanto più grandi quanto più essi sono prossimi a coincidere col cilindro, ma poichè non può esistere un poligono rettilineo il quale coincida col perimetro di una figura curvilinea, così pure non esiste prisma il quale possa coincidere con un cilindro, epperciò è dato solo di dire: *il volume di ogni cilindro è maggiore di quello di qualsiasi prisma in esso inscritto.*

Parimenti, se ad un cilindro si immagina circoscritto un prisma, in seguito circoscritto altro prisma il cui numero di lati di base sia doppio di quello del primo, è dato di vedere come il volume di un prisma essendo eguale al prodotto dell' area della base per la misura dell' altezza, l' altezza in entrambi i prisma immaginati

essendo eguale, i volumi dei due prisma è quindi eguale al prodotto di due fattori, dei quali uno costante, epperciò è il loro rapporto identico con quello dell'area delle basi. Ma le basi dei due prisma essendo due poligoni circoscritti alla figura curvilinea di base del cilindro, così a questi essendo subordinati i volumi dei prisma circoscritti al cilindro, ne segue, che le aree dei poligoni circoscritti ad una figura curvilinea convessa essendo tanto più piccole quanto più i poligoni si accostano alla coincidenza impossibile con quella, è dato di dire che *il volume di ogni cilindro è minore di quello di qualsiasi prisma ad esso circoscritto.*

Ora, il volume di un cilindro essendo compreso fra quelli dei prismi inscritti e circoscritti, è eguale al prodotto dell'area della sua base per la sua altezza. D'altronde, ove il volume di un cilindro qualsiasi fosse eguale al prodotto della sua altezza per una base più grande o più piccola della propria, nel primo caso si avrebbe che supponendo in A B C D E F una base più grande, poichè circoscrivendo a quella del cilindro un poligono 1′—2′—3′—4′—5′—6′, il quale non abbia coi suoi lati a toccare il perimetro della base supposta, l'area di questo essendo sempre maggiore dell'area della figura di base del cilindro, il prodotto di esso per l'altezza comune sarà ancora un prodotto maggiore di quello formato coll' area della base del cilindro, ma poichè il primo è un volume maggiore di quello del cilindro, così ove il volume del cilindro fosse eguale al prodotto della base supposta per l'altezza, ancora il volume del prisma costrutto sul poligono circoscritto alla base del cilindro, dovrebb'essergli altresì maggiore, ma questo essendo un assurdo, un assurdo è anche che il volume di un cilindro abbia ad essere eguale al prodotto della sua altezza per una base più grande della propria. Nel secondo caso supponendo una base più piccola di quella del cilindro, si ha che inscrivendo nella figura di base del cilindro un poligono 1—2—3—4—5—6, i cui lati non abbiano a toccare il perimetro della base supposta, e poscia immaginando costrutti tanto sulla base supposta quanto sul poligono inscritto due prisma, poichè l'area di qualunque poligono inscritto in una figura curvilinea convessa è sempre minore di quella della figura stessa, così il volume del prisma formato sul poligono inscritto, risultante dal prodotto dell'area della propria base per l'altezza comune del prisma e del cilindro, è un volume minore di quello risultante dal prodotto della

stessa altezza per un'area più grande, quale è quella della base del cilindro; laonde se il prodotto della base supposta per l'altezza del cilindro fornisce il volume del cilindro, un tale prodotto, o per meglio dire un tale volume, deve essere altresì più piccolo del volume del prisma formato sul poligono inscritto, ma questo non essendo che un assurdo, un assurdo è ancora che il volume di un cilindro abbia ad essere eguale al prodotto della sua altezza per una base più piccola della propria.

E quindi il volume di un cilindro essendo eguale al prodotto della propria altezza per l'area di una base nè più grande nè più piccola della propria, è dato di conchiudere come *il volume di un cilindro qualunque è eguale al prodotto dell'area della base per la misura dell'altezza.* Cosicchè, essendo B la base di un cilindro ed H l'altezza, è il volume $V = B \times H$.

Nel cilindro retto circolare la base essendo un circolo e l'area della medesima determinabile colla conoscenza del raggio, così essendo R il raggio di base di un cilindro retto circolare avente il lato eguale ad L, è il volume $V = \pi R^2 L$.

Il volume di un prisma avendo la medesima espressione di quello del cilindro, è dato ben tosto di vedere come un prisma ed un cilindro che abbiano la medesima altezza stanno tra loro nel rapporto dell'area delle loro basi, ed un prisma ed un cilindro che abbiano la base di medesima area, cioè equivalente, i loro volumi sono proporzionali alle loro altezze. Avendosi che il volume tanto di un prisma quanto di un cilindro sono espressi dal prodotto dell'area della loro base per la misura della loro altezza, e la differenza che corre da un prisma ad un cilindro non essendo che quella di avere la superficie laterale generata dal movimento di una retta parallelamente a sè stessa che percorre nel primo una linea spezzata, nel secondo una linea curva, scorgesi tosto come qualsiasi corpo che sia terminato da due faccie eguali e parallele e lateralmente da una superficie che possa essere generata dal movimento di una retta parallela a sè stessa, ha un volume eguale al prodotto dell'area della propria base per la propria altezza, cosicchè è dato di dire: *il volume tanto del settore cilindrico, quanto del segmento cilindrico ad una e due basi, parallele o non parallele, è eguale al prodotto dell'area della propria base per la misura della propria altezza.* Deriva da questa regola che due settori cilindrici, o due seg-

menti qualunque, od un settore ed un segmento qualunque, i quali abbiano la medesima altezza, stanno tra loro nel rapporto stesso delle loro basi, e viceversa avendo base equivalente, nel rapporto delle loro altezze. Cosicchè è possibile di dividere un cilindro con piani paralleli all' asse in quel numero di parti e rapporto che si desideri, bastando all' uopo tracciarli pelle dividenti in quel numero di parti e rapporto condotte in una base. Nel cilindro circolare il settore cilindrico avendo per base un settore circolare, e l' area del settore circolare essendo proporzionale a quella del circolo nel rapporto stesso dell' arco alla circonferenza, così ne deriva che nei cilindri circolari di medesima altezza i settori cilindrici e cilindri stanno tra loro nel rapporto degli archi compresi dai lati di base.

Un cilindro retto essendo scomposto da un piano qualunque che tagli obliquamente l'asse per metà, in due tronchi di cilindro perfettamente eguali, è dato di dire essere il volume di un tronco di cilindro retto eguale alla metà di quello di un cilindro di medesima base e di doppio asse, cioè *il volume di un tronco di cilindro retto è eguale al prodotto dell'area della propria base per la misura del proprio asse.* Cosicchè essendo B la base ed A l'asse di un tronco di cilindro retto, è il volume $V = B \times A$.

Un cilindro obliquo come quello rappresentato alla Fig. 11 essendo scomponibile colla sezione retta P D Q E in due tronchi di cilindro retto, il volume di ciascuno dei quali è eguale all' area della sezione retta per l'asse, e così la somma del volume dei due tronchi, la somma di due prodotti aventi un fattore costante nell' area della sezione retta, epperciò detta somma eguale al prodotto dell' area della sezione retta per la somma degli altri due fattori, per la somma cioè degli assi dei due tronchi, la quale somma forma l'asse intiero del cilindro obliquo, è dato di dire che oltre all' essere il volume di un cilindro obliquo eguale all'area della sua base per la sua altezza, *il volume di un cilindro obliquo è ancora eguale al prodotto dell'area della sezione retta per l'asse.*

Un tronco di cilindro obliquo essendo pur esso scomposto dalla sezione retta in due tronchi di cilindro retto, così è pure *il volume di un tronco di cilindro obliquo eguale al prodotto dell' area della sezione retta per l'asse.*

Eguaglianza cilindrica. — Due o più cilindri sono eguali, se

eguali hanno tutti i singoli elementi che concorrono a determinarli, la quale condizione corrisponde a quella dell'eguaglianza sia per sovrapposizione che per simmetria.

Dalla definizione stessa stata data del cilindro è dato di dedurre che, fissata la figura che deve percorrere l'estremo della generatrice, fissata la direzione e lunghezza di questa generatrice, il cilindro è perfettamente determinato. Alla determinazione di un cilindro occorre quindi la figura di base, la lunghezza e la posizione del lato. Alloraquando il lato è perpendicolare ai piani delle basi, il cilindro è retto, ed in allora è dato di dire che *due o più cilindri retti sono eguali, se eguali hanno le basi e il lato.* Se due cilindri retti poi sono circolari, siccome la figura di base è un circolo ed il medesimo è determinato dal raggio, così due rette, delle quali l'una data per raggio di base, l'altra per lato di un cilindro retto, sono sufficienti per la determinazione del cilindro retto circolare, e quindi *due o più cilindri retti circolari sono eguali, se eguali hanno il lato ed il raggio di base.* Il cilindro retto ellittico avendo per base una ellisse, e questa essendo determinata colla conoscenza di due elementi, così *due o più cilindri retti ellittici sono eguali, se eguali hanno ad esempio il lato e gli assi di base.* Per un cilindro obliquo, la posizione del lato abbisognando per essere determinata di quella dell'asse, e questo a sua volta essendo determinato colla sua lunghezza, colla lunghezza della sua proiezione fatta sul piano di base, nonchè dalla posizione nel piano di questa proiezione, *due o più cilindri obliqui sono eguali, se eguale hanno la base, eguale l'asse e la loro proiezione sulla base, ed infine egualmente collocata nel piano di base la proiezione dell'asse.* Il cilindro obliquo circolare avendo per sua base un circolo, e quindi determinata colla conoscenza del solo raggio, ed inoltre il circolo essendo una figura tale che una sola retta tirata dal centro può ricevere sempre la medesima posizione di altra sola retta tirata dal centro in altro circolo, è così dato conchiudere che *due o più cilindri obliqui circolari sono eguali se eguali hanno il raggio di base, l'asse e la proiezione dell'asse sulla base.*

L'ellisse essendo determinata da due elementi, per esempio i due assi, così *due o più cilindri obliqui ellittici sono eguali, se eguali sono gli assi della base, eguali hanno l'asse, egualmente collocata la proiezione dell'asse sulla base.*

Due o più settori cilindrici sono eguali, se essi appartenendo a cilindri eguali hanno eguale la base. Due segmenti cilindrici poi sono eguali, se sono la differenza fra settori cilindrici eguali e prisma triangolari eguali.

Un piano condotto in un cilindro retto per modo che tagli per metà l'asse, scomponendolo in due tronchi di cilindro retti eguali, è così dato tosto di vedere che due o più tronchi di cilindri retti sono eguali, se eguali hanno l'asse, e se due a due disposti a modo che coincida la faccia che è inclinata rispetto all'asse, essi formano un solo cilindro retto.

Due o più tronchi di cilindro obliqui sono eguali, se sono scomponibili due a due in due tronchi retti di cilindro, eguali, da un piano passante per la metà degli assi.

Similitudine cilindrica. — Due o più cilindri i quali abbiano eguali gli elementi angolari, e nello stesso rapporto quello stesso numero e qualità di elementi lineari e superficiali che ad essi sono indispensabili per essere determinati, si dicono *cilindri simili.* Così pure si dicono *settori cilindrici simili, segmenti cilindrici simili, tronchi cilindrici simili,* tutte quelle parti di cilindri simili che hanno eguali gli elementi angolari, e nello stesso rapporto lo stesso numero e qualità di elementi lineari e superficiali che ad essi sono indispensabili per essere determinati.

È dato quindi dalle condizioni d'eguaglianza di due o più cilindri, e di due o più medesime parti di cilindro, dedurre quelle di similitudine dei cilindri e parte di cilindro. Così: 1.° *due o più cilindri retti sono simili se simili hanno le basi, e l'altezza proporzionale ai perimetri delle basi,* 2.° *due o più cilindri retti circolari sono simili se hanno rispettivamente i raggi di base colle altezze nello stesso rapporto,* 3.° *due o più cilindri ellittici sono simili se hanno rispettivamente gli assi di base coll'altezza nello stesso rapporto.*

Per le parti di cilindro si ha: 1.° *due o più settori cilindrici o due o più segmenti cilindrici, sono simili se rispettivamente simili sono le basi, ed egualmente disposto il lato, nonchè rispettivamente proporzionale ai lati omologhi di base,* 2.° *due o più tronchi di cilindro retti sono simili se simili hanno la base, proporzionale ai rispettivi perimetri di base hanno l'asse, ed inoltre egualmente disposta hanno la faccia opposta alla base,* 3.° *due o più tronchi di cilindro obliqui sono simili se essi, scomposti da una sezione retta*

passante per la metà dell'asse, si compongono di tronchi di cilindro retti simili.

I cilindri simili, come le parti simili di cilindri simili, avendo le faccie tutte che sono figure simili, quelle omologhe nonchè ad esse la somma in ciascuno, è proporzionale ai quadrati dei lati e perimetri omologhi. Ora, se si hanno due cilindri simili come quelli rappresentati alla Fig. 12, avendosi per essi che le superficie delle basi stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi, e quindi in quello altresì delle altezze, è dato stabilire la proporzione

$$\text{base } A\,B : \text{base } a\,b :: \overline{O\,O'}^2 : \overline{o\,o'}^2$$

e poichè

$$O\,O' : o\,o' :: O\,O' : o\,o'$$

così moltiplicando termine a termine queste due proporzioni, si ricava l'altra

$$\text{base } A\,B \times O\,O' : \text{base } a\,b \times o\,o' :: \overline{O\,O'}^3 : \overline{o\,o'}^3$$

nella quale i due primi termini essendo l'espressione dei volumi dei due cilindri, è dato di dire che *i volumi dei cilindri simili stanno tra loro come i cubi dei lati e lunghezze omologhe.* Questa verità, dedotta al modo stesso di quella del rapporto cubico dei poliedri simili, rendesi d'altronde palese qualora si riguardi il cilindro siccome un prisma di un numero infinito di lati.

La medesima derivazione del rapporto cubico di due cilindri simili, qualora venga applicata alle parti simili di cilindri simili, fornisce sempre che *i settori cilindrici simili, i segmenti cilindrici simili, i tronchi cilindrici simili, stanno tra loro come i cubi delle lunghezze e perimetri omologhi.*

Cono. — Chiamasi *cono* il solido terminato da una superficie conica e da una superficie piana che chiude quella conica. È *superficie conica* quella generata dal movimento di una retta, che passando costantemente per un punto, percorre con un suo estremo una linea curva. I tre corpi rappresentati alle Fig. 13, 14 e 15 sono tre coni.

Nel cono la superficie piana che chiude la superficie conica chiamasi la *base del cono*, e la superficie conica chiamasi la superficie *laterale o convessa del cono.* Ogni retta condotta da un punto del perimetro di base al vertice di un cono, chiamasi *un lato od un apotema del cono*, ed è evidentemente una generatrice della superficie conica. Il punto per il quale passa la generatrice della superficie conica di un cono, chiamasi il *vertice del cono.* La retta che misura la distanza dal vertice alla base di un cono, cioè la perpendicolare abbassata dal vertice sulla base, chiamasi l'*altezza del cono;* e quella che unisce il vertice col centro di figura della base, chiamasi l'*asse del cono.*

Secondochè l'altezza di un cono cade o no nel centro di figura della base, il cono riceve particolare denominazione; nel primo caso chiamasi *cono retto*, nel secondo chiamasi *cono obliquo.* Nel cono retto l'altezza si confonde coll'asse. Secondochè è poi la figura di base di un cono, il cilindro acquista denominazione speciale; così il cono la cui base è un circolo, chiamasi *cono circolare*, quello la cui base è una ellisse, chiamasi *cono ellittico;* quello infine la cui figura di base è una figura curvilinea qualunque, chiamasi *cono irregolare.* Esistono infine ancora i *coni convessi*, e quelli *non convessi*, secondoche è la figura curvilinea di base convessa o non convessa. La geometria però non occupasi che dei coni convessi, essendochè quelli non convessi non presentano delle proprietà proprie, ma solo quelle che sono comuni alle parti in cui può venire scomposto, epperciò omettesi la specifica della convessità o non convessità dei coni nelle considerazioni che su di tale solido si vanno facendo, sempre ritenendoli per convessi, salvo dichiarazione oontraria.

Il cono rappresentato alla Fig. 13, avendo per base un circolo ed essendo tale che l'altezza V C cade nel centro C della base A D E B, cioè coincide coll'asse, è un cono retto circolare.

Il cono rappresentato alla Fig. 14, avendo per base una figura curvilinea irregolare ed avendo l'altezza P O che cade nel centro O di quella figura irregolare, cioè coincide coll'asse, è pure un cono retto, ma irregolare non convesso.

Il cono rappresentato alla Fig. 15, avendo per base una ellisse ed essendo tale che la perpendicolare abbassata dal vertice V sulla base, cioè l'altezza V D, cade in un punto D della base fuori del

centro di figura, chiamasi un cono obliquo ellittico, ed in esso è V C l'asse.

Prendendo ad esaminare il cono retto circolare rappresentato alla Fig. 12, è dato di vedere come essendo l'altezza V C perpendicolare alla base, qualunque retta condotta nella base al piede C è una perpendicolare all'altezza. Ma poichè qualunque retta condotta da un punto del perimetro della base al vertice, è una generatrice o lato, ne deriva che condotte due rette come D V, D C, da un medesimo punto del perimetro della base, l'una sulla superficie conica al vertice, cioè un lato, l'altro sulla superficie piana di base al centro, si ottiene con esse costantemente un triangolo rettangolo V D C. Il cono considerato, oltre l'essere retto, essendo circolare, e quindi tutte le rette condotte dal centro della base al perimetro essendo eguali tra loro, ne deriva che tutti i triangoli rettangoli A C V, D C V, E C V, B C V ottenibili nel cilindro retto circolare col condurre da punto qualunque del perimetro A, D, E, B, due rette, l'una al vertice, l'altra al centro di base, sono eguali avendo eguali i due cateti, onde eguali riescono le ipotenuse A V = D V = E V = B V, e queste essendo altrettanti lati del cono, è dato di dire che *nel cono retto circolare tutti i lati sono eguali tra loro, ed ipotenuse di triangoli di rettangoli aventi per cateti l'altezza ed il raggio di base.* Per cui, se H è l'altezza di un cono retto circolare il cui raggio di base è R, è il lato $L = \sqrt{H^2 + R^2}$, e viceversa $H = \sqrt{L^2 - R^2}$, $R = \sqrt{L^2 - H^2}$.

Se si considera poi che il movimento di una retta perpendicolare ad altra retta che giri attorno a questa, produce un piano, è dato di vedere ben tosto come *il cono retto circolare è un corpo generato dalla rotazione di un triangolo rettangolo attorno ad un suo cateto*, nella quale rotazione l'ipotenusa traccia la superficie conica, e l'altro cateto traccia la base del cono. Onde, qualunque triangolo rettangolo come quelli A C V, D C V, E I V, B C V, è un triangolo generatore del cono rappresentato. Ed appunto per una tale generazione del cono retto circolare, viene il medesimo chiamato un corpo rotondo.

Considerando ora il cono rappresentato alla Fig. 14, che non differisce dal precedente che per contenere il prolungamento della superficie conica, e dall'avere per figura di base una figura curvilinea irregolare non convessa, egli è dato di vedere come qua-

lunque punto A, B, C, E che si prenda del perimetro A B C D E F G di quel cono, e poscia si conducano le rette A P, B P, C P, E P, e le altre A O, B O, C O, E O nel piano di base al centro di figura, tutti i triangoli che così risultano sono rettangoli, essendo il cono in questione un cono retto. I lati poi B P, C P, E P prolungati, essi vengono ad essere in P B', P C', P E' altrettanti lati del cono prolungamento, perchè altrettanti generatori della superficie conica. È evidente d'altronde che nella supposizione del movimento di una retta nel percorso di una linea curva, passando costantemente per un punto, essa si allunghi e si raccorci per modo da esistere sempre un prolungamento, il quale descrive una superficie egualmente conica, che colla prima possono a ragione dirsi due superficie coniche opposte al vertice; ed è poi evidente che una superficie conica così descritta, ove venga tagliata da un piano A' B' C' D' F' F' G' condotto ad una distanza P O' = P O e parallelamente a quello A B C D E F G, dà luogo a due coni perfettamente eguali opposti al vertice, in guisa che se retto è l'uno, retto è l'altro, se obliquo è l'uno, obliquo è l'altro, ed in tale caso l'asse passerà sempre pel vertice comune dei due coni.

Considerando per ultimo il cono obliquo rappresentato alla Figura 15, è dato di vedere come qualunque sia la sua base, diseguali sono tutti i suoi lati, e possa ottenersi il tracciamento del più lungo con tirare dal piede D dell'altezza del cono, la retta più lunga possibile, che abbia un estremo sul perimetro della base del cono, e poscia con unire questo estremo col vertice; e possa il tracciamento del più corto ottenersi con tirare un'altra retta che misuri la distanza dal piede D al perimetro della base, e poscia con unire questo punto di perimetro col vertice. Questi due lati condotti, essendo rispetto all'altezza V D delle oblique, ed essendo quelle che più e meno distano dal piede D, sono la più lunga e la più corta.

Nel caso del cono rappresentato, la linea che unisce il piede D col centro di figura essendo quella che in D A misura la maggiore distanza fra D ed il perimetro di base, e che in D B misura la distanza fra lo stesso piede D e lo stesso perimetro; così V A è il lato più lungo e V B è il lato più corto che sia tracciabile in quel cono.

Ogni lato di un cono, salvo un caso solo, essendo sempre obliquo al piano di base, ed ogni obliqua essendo sempre perpendicolare

ad una retta tirata per il suo piede nel piano, così è dato di vedere come nel cilindro obliquo in generale due soli sieno i triangoli rettangoli che è dato di ottenere con due rette tirate da un punto del perimetro, l'una al vertice, l'altra al centro di base.

Proprietà dei coni. — Le proprietà dei coni, siccome fu del cilindro e dei poliedri, si desumono dalla considerazione di elementi solidi introdotti, dei quali il più semplice è il piano. Si introduca per conseguenza in un cono un piano, e si esaminino le differenti posizioni che esso può avere, e le diverse risultanze di sezione.

Un piano non estraneo ad un cono può essere in due condizioni assai diverse, in quella cioè di tagliare il cono, oppure di non tagliarlo, rimanendovi così solo al medesimo tangente. Alloraquando un piano è nella condizione di tagliare un cono, o egli passa pel vertice, e altrimenti ha le quattro importanti posizioni conosciute sotto il titolo di *sezioni coniche;* e sono, la prima quella parallela alla base, la seconda quella obliqua alla base, la terza quella parallela al lato, e l'ultima quella parallela all'asse.

Considerando un piano il quale venga a tagliare un cono ed a passare pel vertice, è dato tosto di vedere che qualunque sia la sua posizione, esso non può intersecare altrimenti la base che secondo una retta, e poichè le rette tracciate sulla superficie cilindrica dal vertice ai punti d'intersezione col perimetro della retta d'incontro della base col piano in considerazione, appartengono contemporaneamente e alla superficie convessa del cono e a quella del piano, così le medesime sono quelle d'intersezione, e la figura risultante è manifestamente un triangolo, onde un triangolo è la figura D V P di sezione nel cono rappresentato alla Fig. 16 di un piano passante per l'asse, un triangolo è la figura L D V di sezione di un piano qualsiasi condotto nel cono.

Nel cono retto tutte le figure sezioni che nel senso in caso si possono tracciare, sono triangoli acutangoli, mentrechè nel cono obliquo molte delle figure di sezione sono triangoli ottusangoli. Nel cono retto circolare, i triangoli acutangoli di sezione che si ottengono con piani passanti per l'asse, sono tutti triangoli isosceli eguali, e ciascuno ha per base il diametro della base del cono, per altezza quella del cono, e per lati eguali il lato del cono; ed alloraquando siffatti triangoli isosceli ottenuti dalla sezione di un

piano passante per l'asse di un cono, si riducono ad essere triangoli equilateri, in allora il cono chiamasi equilatero, cosicchè il *cono equilatero* è quello che è retto e circolare ed ha il diametro di base eguale al lato. Un piano che passando pel vertice di un cono sia perpendicolare alla base, contenendo l'altezza, è dato di vedere come l'altezza di un cono sia deduttibile col computo dell'altezza di un triangolo di sezione, che generalmente è quello che contiene altresì l'asse del cono.

Un piano che passando pel vertice di un cono contenga l'asse, lo divide in due parti, ciascuna delle quali addimandasi un *semicono*, ed alloraquando il cono è retto, in allora i due semiconi sono perfettamenti eguali. Avvece, un piano che passando pel vertice non contenga l'asse, scompone il cono in due *segmenti conici* ad una sola base, la superficie conica dei quali addimandasi una *zona conica*. Se poi ad un segmento conico ad una sola base si aggiunge o si toglie, secondochè esso ha per base un segmento circolare minore o maggiore di un semicircolo, una piramide triangolare come quella L D C V, per il segmento conico ad una sola base L D V, si ha ciò che chiamasi un *settore conico*. Scorgesi quindi come il settore conico sia il solido risultante dalla sezione di due piani, come L C V, D C V, passanti per l'asse V C del cono.

Venendo alle sezioni coniche, considerisi dapprima un piano condotto in un cono parallelamente alla base, e sia questo ad esempio il piano E F condotto parallelamente alla base A L D B O P del cono rappresentato alla Fig. 16. Questo piano E F essendo parallelo alla base, qualunque piano V L O che passi per l'asse, taglierà la base ed il piano condotto, secondo due rette M R, L O parallele tra loro.

Ma siccome la figura di sezione di qualunque piano L V O che passi per l'asse, è un triangolo, così si ha che l'intersezione del piano passante per l'asse del cono con quello parallelo alla base, è nel triangolo L O V una retta M R parallela alla base L O dello stesso triangolo, per modo che simili sono i triangoli V L O, V M R, e in conseguenza di questa similitudine ha luogo la proporzione L O : M R :: V C : V C'.

Ora, conducendo un altro piano D P V per l'asse, siccome il medesimo taglia il piano E F secondo la retta T Q parallela a quella D P, e risultano i due triangoli D P V, T Q V, i quali sono

simili e perciò danno la proporzione D P : T Q :: V C : V C', la quale ha colla precedente eguale la seconda ragione, epperciò forma colla prima, proporzione, così si ha L O : M R :: D P : T Q, cioè il rapporto delle rette condotte nel piano di base dal punto C, è identico con quello delle rette condotte nel piano di sezione dal punto C'. La figura di base è perciò simile colla figura di sezione tracciata, e poichè il fatto ragionamento, ove si applicasse ad altri piani H G, I K sempre paralleli all'asse e condotti per qualsiasi punto C'', C''', si giungerebbe allo stesso risultato, così è dato di conchiudere come *le sezioni coniche dei piani paralleli alla base sono figure simili a quella della base.* Cosicchè nel cono circolare qualunque piano condotto parallelamente alla base, dà nella figura di sezione un circolo, essendochè tutti i circoli sono simili tra loro.

Se osservasi alla scomposizione operata in un cono mercè un piano parallelo alla base, vedesi tosto come delle due parti, l'una sia un cono, l'altra una parte di cono avente due basi parallele, e che perciò chiamasi un *tronco di cono a basi parallele.*

Dalla dimostrazione precedente essendosi ricavato che il rapporto delle rette omologhe L O : M R, condotte, la prima nel piano di base, la seconda in quello di sezione, è il medesimo V C : V C', di due rette, che come è facile lo scorgerlo, sono gli assi del cono intiero e del cono reciso, è quindi dato di dire, un cono e quello reciso da un piano parallelo alla base, hanno gli assi nel rapporto delle rette omologhe delle basi, e poichè nel cono retto l'asse si confonde coll'altezza, e nel cono circolare la base essendo un circolo, un circolo diviene anche quella del cono reciso, è dato di aggiungere che un cono retto circolare e quello reciso da un piano parallelo alla base, hanno le altezze nel rapporto dei raggi delle basi.

Passando alla considerazione di un piano introdotto in un cono per modo che non sia parallelo alla base, ma obliquo verso la medesima, vedasi la natura della figura di sezione e la scomposizione operata. Per ciò sia nel cono retto circolare rappresentato alla Figura 17, che siasi condotto un piano M N inclinato comunquemente rispetto alla base.

Egli è evidente che se conduconsi due piani R S, T U paralleli alle basi del cono, ed i quali possano tagliare il piano M N, detti piani si intersecheranno col medesimo evidentemente secondo due rette Q E, P F tra loro parallele. Se dividonsi per metà in O e G

le due rette parallele Q E, P F tracciate nel piano M N, e che possono ben dirsi due corde, e quindi pella retta O G e pel vertice V del cono si fa passare un piano, questo taglierà i piani condotti parallelamente alla base secondo le rette T U, R S parallele tra loro e parallele all'intersezione A B dello stesso piano colla base del cono. Ma il cono essendo retto e circolare, la corda E Q è perpendicolare alla T U, ed inoltre T U è un diametro, e medesimamente è la corda P F perpendicolare al diametro R S. Risulta inoltre per l'ultimo piano condotto, che in esso sono collocati dei triangoli simili, cioè i due N O U, N G S ed i due altri M R G, M T O, i quali sono simili per avere i due primi O U parallelo a G S, ed i due ultimi R G parallelo a T O; essi quindi forniscono le due proporzioni seguenti:

$$OU : GS :: ON : GN, \quad OT : RG :: OM : MG$$

che moltiplicate termine a termine danno per risultato

$$(1) \qquad OU \times OT : GS \times RG :: OM \times ON : GN \times MG.$$

Osservando ora che per essere, come si è detto, T U un diametro ed O Q una semicorda perpendicolare, è $\overline{OQ}^2 = TO \times OU$ (pagina 255), e parimenti per essere R S un diametro e P G una semicorda perpendicolare, è $\overline{PG}^2 = GS \times GR$, onde i due primi termini della proporzione (1) potendo venire sostituiti, si ha

$$\overline{OQ}^2 : \overline{PG}^2 :: ON \times OM : GN \times MG.$$

Ora, la figura di sezione del piano M N essendo tale che i quadrati delle semicorde parallele stanno tra loro nel rapporto del prodotto dei segmenti formati sulla retta che ne congiunge i punti di mezzo, scorgesi ben tosto come una tale proprietà sia quella appartenente all'ellisse, come venne dimostrato a pag. 299, epperciò come *la sezione conica di un piano che tagli intieramente la superficie convessa di un cilindro retto circolare, non perpendicolarmente all'asse, è un'ellisse.* Ed una ellisse è pure la sezione

fatta in un cono anche non retto nè circolare, ma obliquo ed ellittico, perchè diffatti se nello stesso cono nel quale si è dimostrata la sezione, si immagina condotto un piano che sia diverso da quello di base e da quello M N, si scorge immediatamente che per quanto è stato or ora dimostrato, la figura di sezione è una ellisse ed il cono è da questo piano condotto divenuto obliquo per costruzione, ed a base ellittica.

In un cono qualsiasi, se la figura di sezione prodotta da un piano non parallelo alla base, e che tagli intieramente la superficie convessa, è costantemente una figura diversa da quella di base, esiste una eccezione tutt'affatto speciale pel cono obliquo, eccezione che somministra due posizioni, parallelamente alle quali è dato di produrre nella figura di sezione una figura simile a quella di base. La sezione cosiffatta nel cono obliquo da un piano non parallelo alla base e di una figura di sezione simile a quella di base, chiamasi la *sezione antiparallela*. La sezione antiparallela è quella prodotta in un cono obliquo da un piano perpendicolare al piano che proietta l'asse del cono sulla base, e che forma con un lato di detto cono lo stesso angolo formato dalla base col lato opposto. Infatti, se nel cono obliquo circolare rappresentato alla Fig. 18, in cui l'asse si proietta nella direzione della retta A B, si conduce il piano M N che sia perpendicolare al piano A B V, e che inoltre egli faccia un angolo con un piano H G parallelo alla base, tale che sia M N V $=$ G H V, si ha che i due piani H G ed M N si intersecano secondo la retta P Q, la quale è perpendicolare al piano A B V ed alle rette H G ed M N, le quali rette H G ed M N sono le intersezioni col piano A B V dei due piani H P G Q, M P N Q, ed inoltre a motivo della similitudine dei triangoli H O M, G O N, come aventi un angolo opposto al vertice eguale, e l'angolo O H M $=$ O N G per costruzione, avendo luogo la proporzione H O : M O :: O N : O G, dalla quale ricavasi M O $\times$ O N $=$ H O $\times$ O G, è dato di vedere come essendo la figura di sezione H G parallela alla base e conseguentemente un circolo, epperciò $\overline{PO}^2 = HO \times OG$, si ha $\overline{PO}^2 = ON \times OM$, e per essere P O perpendicolare ad M N e la figura M P N Q una figura tale in cui il quadrato delle semicorde è eguale al rettangolo dei segmenti da esse formati sul diametro, è la figura di sezione prodotta dal piano M N un circolo, epperciò una

figura simile a quella di base del cono considerato. Qualunque altro piano D F parallelo a quello M N, potendo sempre somministrare nella figura di sezione delle rette, come E C perpendicolari ad E F, tali che $\overline{EC}^2 = CD \times CF$, è non altrimenti la figura di sezione che costantemente una figura simile a quella di base, epperciò un circolo. È dato quindi di conchiudere come *nel cono obliquo, due sono le sezioni praticabili che diano una figura di sezione simile a quella di base del cono, l'una è quella parallela alla base, la seconda è quella antiparallela.*

In quanto alle due parti in cui un cono è scomposto da un piano condotto nell' indicato senso, sono, l'una un cono, l'altra un *tronco di cono a basi non parallele.* In quanto al cono, se esso sarà stato reciso da un cono retto circolare, risulterà un cono obliquo ellittico.

La sezione conica poi, prodotta da un piano parallelo all' asse del cono, è una iperbole. Così la Fig. 20 rappresentando un cono retto circolare prolungato, nel quale O O' è l'asse, V il vertice, V Q P la figura di sezione di un piano qualunque passante per l' asse, condotto in detto cono un piano che sia parallelo a quello V P Q, esso taglierà la superficie conica ed il suo prolungamento secondo due rami opposti di curva, l'uno L H G S, l' altro I F K, che sono due rami d' iperbole. Infatti, se immaginasi condotto un piano qualunque C D parallelo alla base, si ha che tanto questo piano, quanto quelli di base, che sono pure tra loro paralleli, si intersecano secondo rette L T, H S, I K parallele tra loro, ed a causa della rettitudine del cono, il piano che passa per l' asse ed il punto di mezzo E dell'intersezione L T, è perpendicolare alle diverse rette L T, H S, I K, epperciò alle medesime è pure perpendicolare l' intersezione E Q'. Il piano A B V M N condotto per l' asse e per il punto E, somministrando nella figura di sezione tanto i due triangoli simili G E B, G X D, quanto gli altri due A E F, C X F, che forniscono le due proporzioni

$$XD : EB :: XG : EG, \quad XC : EA :: XF : EF$$

le quali moltiplicate termine a termine danno per risultato la proporzione

$$XD \times XC : EB \times EA :: XG \times XF : EG \times EF$$

i due primi termini della quale, essendo tali che ove pongasi mente che le figure di sezione dei piani paralleli alla base di un cono circolare, sono altrettanti circoli, nei quali le rette A B, C D, che congiungono il centro colla metà di una corda, e sono limitate alla circonferenza, sono diametri perpendicolari alla corda, e quindi in virtù della proprietà di cui a pag. 255, è $\overline{EL}^2 = EB \times EA$, $\overline{XH}^2 = XD \times XC$, è dato di vedere come essa si trasformi nell'altra equivalente $\overline{XH}^2 : \overline{EL}^2 :: XG \times XF : EG \times EF$, e quindi i rami di curva di figura di sezione di un piano parallelo all'asse essendo tali che la retta che congiunge i punti di mezzo di due corde parallele, è perpendicolare alle medesime, ed inoltre tale che i quadrati di dette semicorde stanno tra loro come i prodotti dei segmenti da essi formati sulla retta che taglia i due rami di curva e che a ragione è un asse trasverso, a seguito della proposizione stata dimostrata a pag. 303, esse sono i due rami di una iperbole; d'altronde ad un identico risultato si giungerebbe allorchè nel cono prolungato si fossero tracciati dei piani paralleli alla base M N. È quindi dato di conchiudere come *nel cono retto circolare la figura di sezione di un piano parallelo all'asse è effettivamente una iperbole.*

Quando poi si facesse sul piano di sezione la proiezione delle rette V P, V Q di sezione col cono, di un piano parallelo a quello che traccia l'iperbole, si avrebbe in esse gli assintoti dell'iperbole.

Con ragionamento e considerazione analoga, puossi dimostrare come una iperbole sia pure la figura di sezione in un cono obliquo circolare fatta da un piano parallelo all'asse; solo che in tale dimostrazione egli giova conoscere il rapporto dei quadrati delle semicorde qualsiansi parallele nell'iperbole, il quale rapporto, se analogo a quello delle semicorde perpendicolari all'asse trasverso, esso non ha fatto parte a suo luogo di questo trattato di geometria.

Ognuna delle parti in cui un cono è scomposto da un piano parallelo all'asse, addimandasi un *segmento solido iperbolico.*

Venendo alla considerazione dell'ultima delle sezioni coniche, quella cioè prodotta da un piano parallelo al lato di un cono, rappresenti la Fig. 19 un cono retto circolare, V E un lato, ed A I H G B un piano parallelo al medesimo.

Se parallelamente alla base del cono si conduce un piano I G, che dà nella figura di sezione un circolo, e col piano in questione

una retta I G d' intersezione parallela a quella A B d' intersezione dello stesso piano in questione colla base del cono, è dato di vedere che tanto I G quanto A B restano così due corde in quei circoli, e quindi se immaginasi condotto pel lato A E del cono, un piano il quale passi per il punto C di mezzo della corda A B, un tale piano intersecherà, il piano in causa secondo una retta H C parallela al lato V E, il piano I G secondo la retta L P parallela a quella D E, e dividente per metà la I G. Nel piano quindi di base e in quello condotto, si hanno due circoli, nei quali stanno due corde, delle quali una divide per metà l'altra, per modo che in virtù del teorema dimostrato a pag. 257, avendosi $CD \times CE = CA \times CB$, $FL \times FP = FI \times FG$, si ha pure $\overline{CB}^2 = CD \times CE$, $\overline{FG}^2 = FL \times FP$, e per essere $FP = CE$ a motivo che esse sono parallele comprese fra parallele, deriva che $\overline{CB}^2 : \overline{GF}^2 :: CD : FL$. Ma colla sezione del piano D E V risultando i due triangoli simili H D C, H L F, i quali danno la proporzione $CD : FL :: HC : HF$, avente con quella $\overline{CB}^2 : \overline{FG}^2 :: CD : FL$ comune una ragione, giungesi alla proporzione definitiva $\overline{CB}^2 : \overline{FG}^2 :: HC : HF$, la quale attesta come la figura di sezione prodotta nel cono retto circolare, sia una figura chiusa da una retta e da una linea curva tale, che i quadrati delle semicorde parallele stanno tra loro nel rapporto delle lunghezze delle rette, che limitate alla curva, dividono le medesime per metà.

Ora, poichè nel cono retto circolare, qualunque piano parallelo ad un lato è parallelo al lato altresì prodotto dall'intersezione di un piano passante per l'asse e perpendicolare all'intersezione colla base del piano in questione, così nel cono retto circolare, qualunque piano condotto parallelamente al lato, potendo presentare nelle intersezioni con piani paralleli alla base e con un piano perpendicolare alla sua intersezione colla base, delle rette perpendicolari tra loro, deriva che le rette parallele C B, F G, essendo perpendicolari a quella H C, in virtù dell'ultima relazione del libro terzo a pag. 306, è dato conchiudere come *nel cono retto circolare la sezione prodotta da un piano parallelo al lato è una parabola.*

Con ragionamento analogo si dimostra che in un cono obliquo circolare qualsiasi, la sezione parallela al lato è altresì una para-

bola, solo che una tale dimostrazione ammette la conoscenza del rapporto corrente fra i quadrati delle semicorde parallele qualunque esse sieno, condotte in una parabola, colle lunghezze dei segmenti da esse formate sul diametro, il quale rapporto però non ha fatto parte a suo luogo in questo trattato. Ciascuna delle due parti in cui un cono è scomposto da un piano parallelo al lato, chiamasi un *segmento solido parabolico.*

Un'ultima osservazione è dato di fare sui piani che originano le sezioni coniche, ed è che il piano parallelo al lato di un cono e quello parallelo alla base, non possono punto incontrare il cono prolungato, mentrechè il piano che è parallelo all'asse, e quello che è inclinato verso la base senza essere parallelo al lato, lo incontrano, dando in entrambi una eguale figura di sezione.

Considerate tutte le posizioni che può avere un piano rispetto ad un cono, il quale venga dal medesimo tagliato, non rimane che la considerazione di un piano che gli sia tangente, vale a dire la considerazione di un piano tangente ad una superficie conica.

La superficie conica essendo generata dal movimento di una retta, è su di essa sempre tracciabile una generatrice di quella superficie; è sempre cioè dato di potere disporre su di una superficie conica una retta per modo che essa possa esservi intieramente contenuta. Ora bene, un piano che abbia comune una generatrice di una superficie conica senza che la tagli, chiamasi tangente. Egli è evidente come un piano che non tagli un cono ed abbia comune un lato, non possa avere comune nessun altro punto di quella superficie, perchè diversamente la superficie conica sarebbe una superficie piana, ciò che non è, essendosi dimostrato come l'intersezione di un piano con una superficie conica non dà sempre una retta, ma bensì anche delle linee curve. Dato un piano M N che sia tangente ad un cono retto circolare come quello rappresentato alla Fig. 19, si rinverrà la linea di contatto con determinare sul perimetro della base un punto che unito col vertice, dia un lato, tutti i punti del quale sieno comuni alla superficie conica ed al piano. La determinazione di un tale punto si ha nel piede D della perpendicolare C E abbassata dal centro C del circolo di base, in essa ed alla intersezione del piano M N col piano di base del cono. Infatti, immaginando condotto pel lato V E e per l'asse un piano, poichè simili sono le figure di sezioni pro-

dotte da piani paralleli alla base, e parallele sono le intersezioni dei medesimi fatte da uno stesso piano, così O P è parallelo a C E, e la perpendicolare tirata pel punto P al raggio O P nel piano I G è parallela all'intersezione del piano M N colla base del cono; onde il punto E, essendo il punto di contatto della circonferenza di base del cono coll'intersezione del piano M N e la base del cono, anche il punto P è di contatto del piano M N colperimetro di quello I G, e così essendo tutti i punti di V E, cioè tutte le parallele tracciabili per esso, tante tangenti alle figure di sezione condotte per essi, è V E la linea di contatto del piano M N tangente a quel cono.

Valore delle superficie coniche. — Adagiato un cono retto circolare su di un piano per modo che il contatto avvenga secondo un lato, è agevole il capire come se lo si fa rotolare in modo che il vertice rimanga sempre nello stesso punto, in qualunque posizione lo si osservi, esso ha sempre un punto del perimetro di base collocato sul piano, epperciò se gli si fa compiere un intiero giro od una parte di giro, il cono abbia coperto una superficie pari alla sua convessa od a quella convessa di una zona, avente manifestamente in ambi i casi la figura di un settore circolare, nel quale la lunghezza dell'arco pel primo caso è eguale alla lunghezza della circonferenza di base del cono, pel secondo caso all'arco di base della zona, il raggio è eguale al lato, ed in cui l'angolo è la misura dell'angolo solido, vertice del cono, o della porzione di angolo solido. Onde: *lo sviluppo della superficie convessa di un cono retto circolare o di una zona conica, è un settore circolare di raggio il lato, di arco il perimetro di base.*

Ora, l'area di un settore circolare essendo eguale al prodotto della misura dell'arco per la metà della misura del raggio, è dato di vedere tosto come è la misura della superficie convessa di un cono retto circolare, eguale al prodotto della misura della circonferenza di base per la metà di quella del lato; e la misura di una zona conica retta eguale al prodotto della misura dell'arco di base per la metà di quella del lato.

Il tronco di cono retto circolare a basi parallele, essendo la differenza di due coni aventi l'angolo solido al vertice eguale, è agevole il vedere come *lo sviluppo di un tronco di cono retto a basi parallele è un trapezio circolare*, nel quale i due archi sono le

circonferenze delle due basi del tronco, l'altezza del trapezio è il lato del tronco, ed infine sono i due raggi i lati dei coni, dei quali esso è la differenza.

E poichè l'area del trapezio circolare è eguale al prodotto della semisomma dei due archi per l'altezza, ovvero eguale al prodotto dell' altezza per l' arco intermedio, così la superficie convessa di un tronco di cono retto circolare a basi parallele, è eguale al prodotto della misura della semisomma delle circonferenze di base per la misura del lato del tronco; oppure eguale al prodotto della misura della circonferenza ottenibile con un piano che passi pella metà del lato, per la misura dello stesso lato.

I valori di tutte queste superficie coniche sono però deduttibili da altre considerazioni assai più rigorose e più geometriche, quali sono quelle del paragone di un cono retto circolare a delle piramidi che hanno tutti i lati collocati sulla superficie convessa del cono, e che perciò si chiamano *piramidi inscritte*, e a delle piramidi che hanno tutte le faccie laterali tangenti alla superficie convessa del cono, e che si chiamano *piramidi circoscritte.*

Se nel circolo di base di un cono retto si inscrive un poligono regolare, e poscia un altro poligono regolare di un numero doppio di lati, indi su detti poligoni si immaginano costrutte delle piramidi che abbiano il vertice nel vertice del cono, egli è dato di vedere che entrambe le dette piramidi hanno il lato eguale ed eguale a quello del cono, inoltre essendo la misura della superficie laterale di ciascuna, eguale al prodotto della misura del perimetro della propria base per la metà della misura dell'apotema di ciascuna delle faccie, e in ambe le piramidi le faccie essendo triangoli isosceli aventi eguali i lati eguali, sono le apoteme di dette faccie tanto più lunghe quanto più corti sono i lati di base, cosicchè i perimetri dei poligoni inscritti essendo tanto più lunghi quanto più vanno accostandosi alla circonferenza del circolo, ed i lati di detti poligoni tanto più corti quanto più si avvicinano alla circonferenza di circolo, a forziori le superficie laterali delle piramidi inscritte in un cono, vanno continuamente crescendo mano mano che esse si avvicinano a quella coincidenza impossibile, quale è quella colla superficie convessa del cono, ond' è dato di conchiudere come *la superficie convessa di un cono è maggiore della superficie laterale di qualsiasi piramide in essa inscritta.*

Medesimamente, se nel circolo di base di un cono retto circolare, si circoscrive un poligono regolare, ed in seguito altro poligono regolare di doppio numero di lati, e su ciascuno di detti due poligoni si costruisce una piramide avente il vertice in quello del cono, le apoteme delle faccie laterali di tutte queste piramidi essendo tutte eguali al lato, essendochè sono le linee di contatto delle faccie colla superficie conica, è dato di vedere come essendo la misura della superficie convessa di una piramide eguale al prodotto della misura del perimetro di base per la metà della misura dell' apotema, le due piramidi avendo eguale apotema, le loro superficie stanno tra loro nel rapporto dei perimetri di base. Ma i perimetri di base dei poligoni circoscritti ad un circolo essendo tanto più piccoli quanto più essi si accostano alla circonferenza, così è anche la superficie laterale delle piramidi circoscritte ad un cono tanto più piccola quanto più essa va avvicinandosi al limite inarrivabile della superficie convessa del cono, onde *la superficie convessa di un cono retto è minore della superficie laterale di qualsiasi piramide ad esso circoscritta.*

Ora, la superficie convessa di un cono retto essendo minore della superficie laterale di qualsiasi piramide circoscritta, e maggiore di quella di qualsiasi piramide inscritta, è la superficie convessa di un cono retto eguale al prodotto della circonferenza di base per la metà del lato. D' altronde, ove la superficie convessa di un cono retto fosse eguale al prodotto della metà del lato per un perimetro più grande o più piccolo di quello del cono, si avrebbe nel primo caso, che circoscrivendo al circolo di base del cono un poligono regolare, i cui lati non abbiano a toccare il perimetro supposto, e su di detto poligono regolare costrutta una piramide la quale abbia il vertice in quello del cono, la superficie della medesima essendo maggiore di quella del cono, sarebbe anche maggiore di quella della piramide formata sul perimetro supposto col vertice nel vertice del cono; ma ciò essendo un assurdo, così la superficie convessa di un cono retto non può essere espressa da un prodotto maggiore di quello della circonferenza di base per la metà del lato. Nel secondo caso, inscrivendo al circolo di base un poligono regolare, i cui lati non abbiano a toccare il perimetro di altro poligono minore della circonferenza, ed al quale supponesi sia il prodotto del medesimo per il lato del cono eguale alla superficie convessa, si avrebbe che costruendo su di detto poligono regolare

una piramide, poichè la superficie laterale della medesima è minore della superficie convessa del cono, essa dovrebbe essere pure minore della superficie laterale della piramide costrutta sulla base supposta, ma ciò non essendo, così la superficie convessa di un cono retto non può essere espressa da un prodotto minore di quello della circonferenza di base per la metà del lato. Onde, il prodotto della circonferenza di base di un cono retto per la metà del lato, non esprimendo una superficie nè più grande nè più piccola di quella del cono, è dato di conchiudere: *la misura della superficie convessa di un cono retto è eguale al prodotto della misura della circonferenza per la misura della metà del lato.*

Cosicchè, chiamando con C la circonferenza di base di un cono retto circolare e L il lato, si ha che la superficie laterale $s = C \times \frac{L}{2}$. Ora, la circonferenza di un circolo di raggio R, essendo eguale a $2 \pi R$, è $s = \pi R L$. Nel cono equilatero il diametro eguagliando il lato, è $s = \frac{\pi L^2}{2}$. La base del cono retto essendo un circolo, la cui superficie è espressa da πR^2, è dato di vedere come la superficie totale S di un cono è data dall'espressione $S = \pi R (L + R)$, che attesta ad evidenza come la superficie laterale di un cono e quella di base, sono nel rapporto del lato e del raggio di base.

Con ragionamento analogo a quello tenuto pella dimostrazione dell' espressione della superficie convessa di un cono retto, puossi ancora dimostrare come *la superficie di una zona conica retta è eguale al prodotto della metà del lato per l'area.* Del resto, è una zona conica retta, proporzionale alla superficie convessa dell' intiero cono, come risulta, sia per la pratica considerazione che viene fatta del cono di una piramide di un numero infinito di faccie, sia dalla misura, la quale per l' appunto conduce alla proporzionalità corrente fra la superficie di un cono retto e quella di una zona conica appartenente, in quello dei perimetri di base.

La superficie convessa del tronco di cono retto a basi parallele è deduttibile da quella dei due coni retti, dei quali esso ne è la differenza. Così, chiamando con L ed L' i lati dei due coni retti, R, R' i raggi delle basi, è la superficie convessa s del tronco di cono retto eguale a $\pi R L - \pi R' L'$.

Ma la piramide recisa da altra piramide con un piano parallelo

alla base, essendo tale che ha coll'intiera piramide proporzionale il raggio di base al lato ed all'altezza, ha luogo perciò la proporzione $R : R' :: L : L'$, dalla quale $R' L = R L'$, e quindi anche $\pi R' L = \pi R L'$. Ora, se nell'eguaglianza $s = \pi R L - \pi R' L'$ si aggiunge al secondo membro la quantità $\pi R' L$, e si toglie la quantità eguale $\pi R L'$, ciò che non la turba punto, si ha l'altra $s = \pi R L - \pi R' L' + \pi R' L - \pi R L'$: nella quale il secondo membro essendo così divenuto tale che due termini hanno il fattore L' e due altri il fattore L, esso può venire messo sotto la forma $s = (\pi R + \pi R')(L - L')$, la quale spiega come la superficie convessa del tronco di cono retto a basi parallele, è eguale al prodotto della semisomma delle due circonferenze di base per la differenza fra i lati dei due coni, dai quali origina, ma poichè questa differenza è eguale al lato del tronco, così si conchiude dicendo: *la superficie convessa del tronco di cono retto a basi parallele è eguale al prodotto della semisomma delle due circonferenze di base per il lato del tronco.*

Una sezione perpendicolare ai piani delle basi di un tronco di cono retto e passante per l'asse, dando nella figura di sezione un trapezio isoscele, nel quale la retta che unisce i punti di mezzo dei lati non paralleli, è eguale alla semisomma delle due basi parallele, è dato di ricavare come il piano che parallelo alle basi passa per la metà del lato di un tronco di cono retto circolare, dando nella figura di sezione un circolo, il cui diametro è eguale alla semisomma dei diametri dei circoli delle due basi, è la circonferenza del medesimo come linea omologa, eguale altresì alla semisomma delle due circonferenze di base, ed è perciò dato di dire altresì come *la superficie convessa di un tronco di cono è eguale al prodotto del lato per la circonferenza di sezione di un piano parallelo alle basi e passante per la metà del lato.* Cosicchè essendo L il lato di un tronco, R ed R' i raggi delle due basi, è la superficie laterale $s = L(\pi R + \pi R')$, ovvero $s = L \pi (R + R')$.

Oltre alle indicate espressioni pella valutazione della superficie convessa di un cono retto circolare e di un tronco del medesimo a basi parallele, altre espressioni esistono ancora, però fondate sopra dati poco pratici che non hanno applicazione che nella dimostrazione di altre proposizioni, ma che per questa loro applicazione è necessaria la conoscenza.

Perciò essendo A C V (Fig. 23) il triangolo generatore di un cono retto circolare, si immagini nel piano che contiene tale triangolo innalzata nel punto di mezzo D della generatrice A V una perpendicolare sino all'incontro dell'asse V C del cono, nel punto E; si vedranno risultare due triangoli V D E, V A C, i quali per avere l'angolo comune in V, essi danno luogo alla proporzione A C : D E :: V C : V D, dalla quale $A C \times V D = D E \times V C$, e per essere $V D = \frac{1}{2} V A$, è $A C \times \frac{1}{2} V A = D E \times V C$, e l'eguaglianza sussistendo ancora dopo averne moltiplicati i due membri per la quantità 2π, così si ha $\pi A C \times V A = 2 \pi D E \times V C$, il primo termine della quale eguaglianza essendo l'espressione della superficie convessa di un cono, il cui raggio di base sia A C, ed il cui lato sia A V, scorgesi come altresì *la superficie convessa di un cono retto circolare è eguale al prodotto della circonferenza di un circolo di raggio la perpendicolare innalzata nel punto di mezzo del lato nel piano del triangolo generatore, per l'altezza del cono.*

Analogamente, essendo A C O F un trapezio retto il quale giri attorno al lato O C, e nella sua rotazione descriva così il tronco di cono retto a basi parallele rappresentato nella Fig. 23, in cui sono A B ed F G i diametri delle basi, se osservasi come nel punto H di mezzo del lato A F, innalzando nel piano del trapezio generatore una perpendicolare sino all'incontro in I coll'asse, dal punto H conducendo una parallela ai lati A C ed F O sino all'incontro in L coll'asse, ed infine dal punto F abbassando una perpendicolare in N sul lato A C, si ha l'origine di due triangoli H L I, A N F che sono simili avendo i lati rispettivamente perpendicolari, cioè quello A N perpendicolare a quello L I, quello F N perpendicolare a quello H L, ed infine quello A F perpendicolare a quello H I, scorgesi tosto come abbia luogo la proporzione H L : H I :: N F : A F, dalla quale l'eguaglianza $H L \times A F = H I \times N F$, che non è punto alterata dal prodotto di ambedue i membri per la quantità 2π, ma che la converte nella seguente $2\pi H L \times A F = 2\pi H I \times N F$, in cui il primo membro essendo l'espressione della superficie convessa del tronco di cono retto circolare, ed il fattore N F nel secondo essendo l'altezza del tronco, e quindi altresì *la superficie convessa del tronco di cono circolare a basi parallele è eguale al prodotto della circonferenza di un circolo di raggio la perpendico-*

colare innalzata nel punto di mezzo del lato nel piano del trapezio generatore per l'altezza del tronco.

Misura dei coni. — Qualsiasi cono, se praticamente può essere ritenuto siccome una piramide di un numero infinito di faccie, e da questa considerazione deriva tosto essere perciò il volume di un cono qualsiasi eguale al prodotto dell' area di base pel terzo dell' altezza, una tale espressione trova la conferma nella dimostrazione geometrica all' assurdo che è dato di stabilire col parallelo di un cono a delle piramidi inscritte e circoscritte al medesimo.

Se nel perimetro della figura convessa di base di un cono qualsiasi si inscrive un poligono, in seguito si inscrive altro poligono di un numero doppio di lati, e su ciascuno di detti due poligoni si costruisce una piramide, la quale abbia il vertice in quello del cono, è dato di vedere come il volume di una piramide essendo eguale al prodotto dell'area di base per il terzo della misura dell'altezza, le piramidi inscritte nel medesimo cono avendo la medesima altezza, esse stanno quindi tra loro nel rapporto dell'area delle rispettive basi. Ma le basi di queste piramidi essendo poligoni inscritti in una figura curvilinea, e quindi di area tanto più grande quanto più essi si accostano a quell' impossibile coincidenza colla figura, così le piramidi inscritte in un cono sono di volume tanto più grande quanto più esse sono prossime a coincidere col cono, onde è dato di dire che *qualsiasi cono è sempre maggiore di qualsiasi piramide in esso inscritta.*

Medesimamente, se al perimetro della figura curvilinea di base di un cono qualsiasi si circoscrive un poligono, poscia un altro poligono, e per ultimo su di ciascuno di detti due poligoni immaginasi costrutta una piramide, la quale abbia il vertice in quello del cono, è dato di vedere come essendo il volume di una piramide eguale al prodotto dell' area della base per il terzo della misura dell'altezza, e nelle piramidi circoscritte ad un medesimo cono l'altezza in tutte eguale, i volumi delle piramidi circoscritte ad un medesimo cono sono nel rapporto dell' area delle basi. Ma queste basi essendo poligoni circoscritti ad una figura curvilinea, e quindi di tanto più piccole quanto più esse si accostano all' impossibile coincidenza colla figura di base del cono, così sono i volumi delle piramidi circoscritte ad un medesimo cono qualsiasi,

tanto più piccoli quanto più esse sono prossime a coincidere col cono, onde *ogni cono è minore di qualsiasi piramide ad esso circoscritta.*

Ora, ogni cono essendo maggiore di qualsiasi piramide in esso inscritta, e minore di qualsiasi piramide ad esso circoscritta, è necessariamente il volume di un cono eguale al prodotto dell' area della base per il terzo della propria altezza. D'altronde, ove si supponesse che il volume di un cono fosse eguale al prodotto della terza parte della misura della sua altezza per un' area più grande o più piccola di quella della base, siccome si avrebbe nel primo caso che supposto essere ad esempio il volume del cono eguale a quello di una piramide avente la medesima altezza, cioè il vertice nello stesso vertice V del cono, e per base il poligono A B D E F G (Fig. 21), dopo circoscritto alla figura di base del cono un poligono T S X Q R Y, e costrutto su di questo una piramide avente il vertice in V, questa piramide avendo un volume maggiore di quello del cono, dovrebbe essere pure maggiore di quello della piramide costrutta sulla base A B D E F G, lo che è un assurdo, onde il volume di un cono non può essere espresso dal prodotto del terzo della misura dell'altezza del cono per un'area più grande di quella della base del medesimo.

Parimenti, ove si supponesse che il volume di un cono fosse eguale al prodotto della terza parte della misura della sua altezza per un' area più piccola di quella della sua base, siccome inscrivendo nella figura di base del cono un poligono H K L P N O, i cui lati non abbiano a toccare il perimetro della base supposta, e su di esso costruendo una piramide avente il vertice in quello V del cono, il volume di questa piramide è minore di quello del cono, così un tale volume dovrebbe essere altresì minore di quello della piramide costrutta col vertice in V e colla base supposta, ciò che è un assurdo, onde un assurdo è che il volume di un cono possa essere espresso dal prodotto del terzo della misura dell'altezza per l'area di una base più piccola di quella del cono. Ed il volume di un cono non potendo essere espresso dal prodotto del terzo della misura dell'altezza per un' area nè più grande nè più piccola di quella di base del cono, è dato conchiudere definitivamente come *il volume di un cono qualsiasi è eguale al prodotto del terzo della misura dell' altezza per l'area della propria base.* Cosicchè, essendo B la base di un

cono, H l'altezza, è il volume $V = B \times \frac{H}{3}$. Nel cono retto circolare la base essendo un circolo di raggio R, e per conseguenza πR^2 la sua area di base, è $V = \pi R^2 \times \frac{H}{3}$. Nel cono equilatero l'altezza essendo eguale all'altezza di un triangolo equilatero di lato il diametro della base, è $H = R \sqrt{3}$ e $V = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{3}$.

Con ragionamento analogo a quello tenuto pella dimostrazione dell'espressione del volume di un cono, puossi dimostrare come altresì *il volume di un settore conico è eguale al prodotto dell'area del settore circolare di base per la terza parte della misura dell'altezza del cono al quale esso appartiene*. Laonde è il volume di un settore conico a quello del cono a cui appartiene, nel rapporto dell'area di base, e poichè la superficie di un settore circolare è a quella del circolo nel rapporto degli archi, così è il volume di un settore conico a quello del cono dal quale esso deriva, nel rapporto dell'arco di base alla circonferenza.

Il segmento conico poi, tanto ad una sola base quanto a due basi, sieno queste sì o no parallele, esso è sempre eguale al prodotto della base per il terzo dell'altezza del cono al quale appartiene, e lo si dimostra essendo qualsiasi segmento conico, o la differenza fra un settore conico ed una piramide triangolare, o la differenza di due segmenti ad una sola base.

Ogni segmento conico essendo quindi eguale al prodotto della propria base per il terzo dell'altezza del cono al quale appartiene, consegue che per dividere un cono in un dato rapporto con piani passanti pel vertice, si avrà la posizione dei medesimi in quelli passanti pelle rette che dividono l'area della figura di base nel rapporto in cui vuolsi dividere il cono.

Il tronco di cono qualsiasi essendo la differenza fra due coni, così il volume del medesimo si ottiene col formare la differenza dei volumi dei due coni dai quali esso risulta. Però per il tronco di cono a basi parallele è possibile una espressione tutt'affatto propria, che ne riduce il computo del volume al prodotto di elementi proprii, senza avere d'uopo della conoscenza dei coni dai quali esso deriva. Infatti, tanto il cono quanto la piramide, essendo tali che i loro volumi hanno la medesima espressione, cioè il prodotto della

rispettiva area di base per il terzo della misura della rispettiva altezza, ne segue che un cono ed una piramide che abbiano base equivalente ed eguale altezza, sono equivalenti in volume. Il volume di un tronco di piramide, del pari che quello di un tronco di cono, essendo eguale, il primo alla differenza di due piramidi, il secondo a quella di due coni, essi sono equivalenti in volume allorachè essi sono la differenza di volumi eguali, cioè la differenza, l'uno di due piramidi, l'altro di due coni rispettivamente eguali in volume, cioè ancora, l' uno la differenza di due piramidi di base equivalente a quella dei due coni nell'altro, di altezza nelle prime eguale all' altezza dei secondi. Dimodochè un tronco di cono è equivalente in volume con un tronco di piramide, aventi la medesima altezza e le basi equivalenti. Ma in un tronco di piramide il volume essendo espresso del prodotto del terzo della misura dell' altezza per la somma dell'area delle due basi del tronco e di un' area media proporzionale fra le medesime, è così dato altresì di dire che *il volume di un tronco di cono a basi parallele è eguale al prodotto della terza parte della misura della sua altezza per la somma dell' area delle due basi e di un' area media proporzionale fra le medesime.*

Cosicchè, essendo H l' altezza di un tronco di cono a basi parallele, le cui basi parallele sono B, b, è il volume

$$V = \frac{1}{3}(B + b + \sqrt{B\,b}).$$

Nel tronco di cono circolare essendo le due basi B, b due circoli, e quindi le aree delle medesime avendo l'espressione $B = \pi R^2$, $b = \pi r^2$, è così il volume del tronco

$$V = \frac{1}{3} H(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi R^2 \times \pi r^2}) = \frac{1}{3} H(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi R r)\,.$$

ovvero

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + r^2 + R r).$$

Come vedesi, l' espressione del volume di un tronco di cono a basi parallele combina perfettamente con quella del tronco di pi-

ramide, tale potendo praticamente ritenersi il tronco di cono, però di un numero infinito di faccie.

Non occorre di dimostrare poi che medesimamente è il volume di un tronco di settore conico a basi parallele o di un segmento conico a basi parallele, eguale sempre al prodotto della terza parte della misura dell'altezza del tronco di cono al quale appartiene, per la somma dell'area delle proprie basi e di un'area media proporzionale fra le medesime; essendo un tale volume deduttibile con ragionamento del tutto analogo.

Conosciuta l'espressione del volume di un cono e di un tronco di cono a basi parallele, è possibile il compnto del volume di qualsiasi solido che sia generato dalla rotazione o rivoluzione di un triangolo, sia attorno ad un suo lato che attorno ad una retta colla quale abbia comune un vertice. In tutti questi casi, il lato immobile o la retta immobile attorno a cui supponesi il movimento, chiamasi l'asse del solido.

Egli è evidente che se supponesi un triangolo V A O, il quale giri attorno al lato V O, esso genera un solido, la sola metà del quale è rappresentata nella Fig. 24 dal solido O G H V A, ed è l'assieme di due coni retti circolari aventi la base comune, e nella perpendicolare A C abbassata dal vertice A sul lato immobile nel piano generatore, il raggio della medesima. Cosicchè essendo il volume di un cono eguale al prodotto dell'area della sua base per la terza parte della misura dell'altezza, si ha che il volume del solido generato dalla rivoluzione del triangolo V A O è espresso da

$$\pi \overline{AC}^2 \times \frac{VC}{3} + \pi \overline{AC}^2 \times \frac{OC}{3}$$

ossia

$$\pi \overline{AC}^2 \left(\frac{VC + OC}{3} \right)$$

e V C + O C facendo l'intiero lato V O, così il solido generato è eguale a $\pi \overline{AC}^2 + \frac{VO}{3}$.

Oltre però a questa espressione, havvene un'altra che somministra lo stesso volume; però con delle funzioni che non trovano l'applicazione che nella dimostrazione di altre proposizioni geome-

triche che sono dette in seguito, ma che perciò abbisognano di venire risolte.

Se nel piano generatore, da uno dei vertici del triangolo che sono collocati sul lato immobile, si immagina abbassata una perpendicolare sul lato opposto, ed in seguito abbassata dal vertice opposto al lato immobile una perpendicolare al medesimo, tale essendo nel triangolo V A O le due rette O K, A C, quella O K perpendicolare ad A V, quella A C perpendicolare a V O, si ha l'origine di due triangoli rettangoli V A C, V K O simili tra loro come aventi l'angolo in V comune, dai quali si ha la proporzione

$$AC : AV :: OK : VO$$

sussistente ancora dopo averne moltiplicati i due primi termini per π A C e divisi i due ultimi per 3, dopo cioè ridotta ad avere la forma

$$\pi \overline{AC}^2 : \pi AC . AV :: \frac{OK}{3} : \frac{OV}{3}$$

dalla quale ricavasi

$$\pi \overline{AC}^2 \times \frac{VO}{3} = \pi AC . AV \times \frac{OK}{3}$$

eguaglianza in cui il primo membro essendo l'espressione del volume del solido generato dal triangolo V A O, è pure il secondo membro altra espressione di volume del medesimo solido, ed essendo π A C . A V l'espressione della superficie generata dal lato V A, è altresì dato di dire che *il solido generato dalla rivoluzione di un triangolo attorno ad un suo lato, è eguale alla superficie generata da un altro lato per il terzo della perpendicolare abbassata sul medesimo, nel piano del triangolo generatore.*

Se ora supponesi un triangolo generatore, il quale giri attorno ad una retta colla quale ha comune un vertice, come sarebbe il triangolo O D B, è dato di vedere che il solido generato da una tale rivoluzione e per metà solo rappresentato nella Fig. 24 dal solido E O F D B, è la differenza fra il solido generato dalla rivoluzione del triangolo V B O ed il triangolo V O D attorno il mede-

simo lato V O. Ora, una tale differenza avendo, dietro la proposizione precedente, l'espressione

$$\pi B C . B V \times \frac{O H}{3} - \pi L D . D V \times \frac{O H}{3} = \frac{O H}{3} (\pi B C . B V - \pi L D . D V)$$

nella quale π B C . B V π — L D . D V è l'espressione della superficie convessa del tronco di cono generato dal trapezio L D B C, vale a dire la superficie generata dal lato D B, è dato conchiudere come altresì *il solido generato dalla rivoluzione di un triangolo qualunque attorno ad una retta colla quale ha comune un vertice, è eguale al prodotto della superficie generata dal lato opposto ad un tale vertice per il terzo della perpendicolare abbassata sul medesimo nel piano del triangolo generatore.*

Egli è evidente che allorchè il triangolo generatore avesse il lato D B che fosse parallelo alla retta attorno alla quale esso gira, non potrebbesi più considerare il solido risultante dalla rivoluzione come la differenza di due altre generazioni, come al caso precedente, ma tuttavia esso segue la medesima espressione, e la dimostrazione la si ha colla considerazione che il solido risultante è la differenza fra il solido generato da un rettangolo, cioè un cilindro e un cono, o due coni, o un cono ed un solido di volume doppio di quello d'un cono di medesima base ed altezza.

Eguaglianza conica. — Due o più coni si dicono eguali, se essi hanno eguali tutti i singoli elementi che sono necessari perchè uno di essi sia determinato. La ricerca quindi delle considerazioni d'eguaglianza di due o più coni, è condotta a quella degli elementi necessari perchè un cono sia determinato.

Per ciò egli basta por mente alla definizione stata data del cono, per vedere come pel cono retto la figura di base e l'altezza od asse sieno sufficienti pella sua determinazione, e nel cono retto circolare basti il raggio di base e l'altezza oppure il lato; onde 1.° *due o più coni retti sono eguali, se eguali hanno la base e l'altezza,* 2.° *due o più coni retti circolari sono eguali, se eguali hanno il raggio di base ed il lato oppure l'altezza.*

Il cono obliquo, oltre alla figura di base ed alla lunghezza dell'asse, abbisognando la posizione di quest'ultimo perchè esso sia

determinato, scorgesi come *due o più coni obliqui sono eguali, se eguali hanno la figura di base e l'asse, ed egualmente disposto quest' ultimo,*

Il settore conico ed i segmenti conici, essendo determinati dal cono dal quale derivano e dalla figura di base, è dato di dire che *due o più settori o segmenti conici sono eguali, se essi appartengono a coni eguali ed hanno eguale base.*

Infine il tronco di cono essendo determinato dal cono dal quale deriva e dalla posizione del piano che lo genera, si dirà che *due o più tronchi di cono sono eguali, se appartengono a coni eguali tagliati da piani egualmente disposti.*

Similitudine conica. — Due o più coni si dicono simili alloraquando essi hanno proporzionali gli elementi lineari e superficiali che li determinano, ed eguali gli elementi angolari. Così i due coni rappresentati alla Fig. 22, essendo due coni retti circolari ed avendo l'uno il raggio di base A C e l'altezza C V nello stesso rapporto del raggio di base *a c* e dell' altezza *c v* dell' altro, sono due coni simili, ed hanno perciò proporzionali le rette omologhe ed eguali tutti gli elementi angolari.

Se diffatti ad esempio, nei due coni considerati si conducono per l'asse due piani che siano perpendicolari alla base, i triangoli di sezione V A B, *v a b* essendo isosceli ed avendo la base coll'altezza nell'uno, nello stesso rapporto della base coll'altezza nell'altro, scorgesi come essi sieno simili e quindi il rapporto stesso corrente fra il raggio di base e l' altezza nei due coni, è eguale a quello corrente coi lati.

Dalla definizione dei coni simili, e per quanto venne detto intorno al cono reciso da altro cono con un piano parallelo alla base, scorgesi come due o più coni simili possono sempre venire considerati tali come recisi gli uni dagli altri, qualora si operasse in essi una sezione ad un'altezza pari a quello dei medesimi, con un piano parallelo alla base. Ora, le sezioni fatte in un cono da piani paralleli alla base, essendo figure simili, e queste stando fra loro come i quadrati dei lati omologhi, così ne deriva che queste rette omologhe essendo proporzionali alle altezze dei coni, *le basi dei coni simili sono proporzionali ai quadrati delle rispettive altezze.* Ora, due piramidi le cui basi sieno B, *b*, e le cui altezze sieno H ed *h*, avendo luogo la proporzione $B : b :: H^2 : h^2$, questa moltipli-

cata termine a termine colla proporzione evidente $\frac{H}{3} : \frac{h}{3} :: H : h$, fornisce la seguente

$$B \times \frac{H}{3} : b \times \frac{h}{3} :: H^3 : h^3$$

nella quale i due termini essendo l'espressione dei volumi delle due piramidi, è dato tosto lo scorgervi come ancora i volumi dei coni simili sieno proporzionali ai cubi delle altezze; ma queste poi essendo proporzionali a tutte le rette omologhe che sono tracciabili nei coni simili, così altresì *i volumi dei coni simili sono proporzionali alle terze potenze delle rette omologhe.*

Sfera. — Chiamasi *sfera* il solido ch'è terminato da una sola superficie curva, i cui punti tutti della quale distanno egualmente da un punto interno nel solido chiamato il *centro della sfera.*

Il solido rappresentato alla Fig. 25 della Tavola XLI, essendo tale che ogni punto della sua superficie dista egualmente dal centro O, è una sfera.

Le rette che partendo dal centro di una sfera vanno ad un punto qualsiasi della superficie sferica, addimandansi *raggi della sfera;* quelle che limitate dalla superficie sferica, passano pel centro della sfera, addimandansi *diametri della sfera,* ed infine quelle che limitate sono dalla superficie sferica e non passano pel centro, addimandansi *corde della sfera.* Egli è evidente da queste definizioni, che *ogni diametro nella sfera è doppio del raggio della medesima.*

Le rette O L, O H, O N, O E, O F sono altrettanti raggi, quelle A B, F G, D E altrettanti diametri, ed infine quelle L N, H I altrettante corde.

Proprietà della sfera. — Ancora nella sfera, le proprietà risultano dalla considerazione di piani comunquemente in essa condotti.

Immaginando condotto in una sfera un piano, due e distinte possono essere le sue posizioni; esso cioè può passare, o non passare pel centro della medesima. Considerando un piano come quello A F B G, il quale passi pel centro della sfera, si ha anzi tutto che la linea d'intersezione del piano colla sfera appartenendo alla superficie sferica, essa è tale che tutte le rette O A, O F, O B, O G condotte dal centro O della sfera a questa linea, sono tutte

eguali tra loro, ma oltre ad essere eguali tra loro, essendo collocate in un medesimo piano, la figura di sezione di un piano passante pel centro di una sfera è quindi evidentemente un circolo. Considerando un piano come quello L H N I, il quale non passi pel centro della sfera, avendosi per l'eguaglianza dei diversi raggi O L, O H, O N, O I condotti alla linea d'intersezione, che questa è il luogo geometrico di punti egualmente distanti dal centro, in virtù di quanto fu detto a pag. 368, è il medesimo un circolo, ond'è dato di conchiudere come *la figura di sezione fatta da un piano comunquemente condotto in una sfera è un circolo.*

Ora bene, la figura di sezione fatta da un piano qualunque in una sfera essendo un circolo, ed i diversi raggi condotti al perimetro di questa figura essendo, o contenuti nel piano allorquando il piano passa per il centro, od obliqui al piano allorquando il piano non passa pel centro, è dato di vedere come in quest'ultimo caso la perpendicolare O C abbassata dal centro O della sfera sul piano, cada nel centro C del circolo di sezione, e formi con un raggio qualunque O H e col raggio H C nel circolo di sezione, un triangolo rettangolo, nel quale per essere manifestamente ogni cateto minore dell'ipotenusa, è conseguentemente il raggio del circolo di sezione fatta da un piano che non passi pel centro della sfera, minore del raggio della sfera stessa; epperciò, mentrechè il circolo di sezione di un piano che passi pel centro della sfera ha un raggio eguale a quello della sfera, il circolo di sezione di qualunque altro piano che non passi per detto centro ha un raggio minore di quello della sfera, onde il circolo di sezione fatta da un piano che passi pel centro della sfera, è il massimo circolo, e per questo fatto questi addimandansi *circoli massimi della sfera,* e per contro *circoli minori della sfera* tutti quelli risultanti dalla sezione di un piano non passante pel centro della medesima. Conseguentemente chiamansi *circonferenze massime della sfera* le circonferenze dei circoli massimi, e *circonferenze minori della sfera* le circonferenze dei circoli minori.

Il circolo massimo essendo il massimo ottenibile nella sezione di un piano che passi pel centro della sfera, ed avendo per raggio il raggio di essa, è dato di aggiungere come *tutti i circoli e circonferenze massime nella medesima sfera sono tra loro eguali, e di raggio quello della sfera.* Così i tre circoli A E B D, A F B G,

D F E G sono tre circoli massimi come aventi per raggio O A, O F, O D, il raggio cioè della sfera di centro O.

Ogni piano essendo determinato colla conoscenza di tre punti, è evidente come il piano che contiene il circolo massimo di una sfera, passando pel centro della medesima, la conoscenza di due punti sulla superficie sferica è sufficiente perchè il circolo sia determinato, purchè però i due punti ed il centro non sieno collocati in linea retta, poichè in tale caso detti tre punti non determinerebbero il piano.

Tutti i circoli massimi tracciabili in una medesima sfera essendo eguali, ne consegue come, dopo tracciata in essa un diametro e per esso fatti passare gli infiniti piani possibili, essi tutti dando nelle figure di sezione, dei circoli eguali divisi tutti per metà da quel diametro, è agevole il comprendere come *una sfera è il solido generato dalla rivoluzione di un semicircolo attorno al suo diametro, la superficie sferica quella generata dalla rivoluzione di una semicirconferenza attorno pure al suo diametro.*

Ogni circolo minore avendo per raggio il cateto di un triangolo rettangolo, nel quale l'ipotenusa è il raggio della sfera e l'altro cateto è la perpendicolare abbassata dal centro della sfera sul piano del circolo minore, cioè la distanza dal centro al piano, è dato di vedere come in più triangoli rettangoli che abbiano costante l'ipotenusa, accrescendo un cateto, deve di necessità diminuire l'altro, ciò che è d'altronde evidente dallo stesso teorema di Pittagora, sia per conseguenza il raggio di un circolo minore tanto più grande quanto più il piano del circolo minore più poco dista dal centro della sfera, e inversamente sia tanto più piccolo il raggio quanto più il suddetto piano si allontana dal centro. Il raggio di un circolo minore è quindi compreso fra il raggio della sfera e zero, ai quali limiti non è dato esso giunga a toccare, posciachè nel primo, più non sarebbe un circolo minore, ma bensì un circolo massimo, nel secondo non più un circolo, rimanendo il piano, esterno alla sfera, cioè non tagliandola, e quindi non più figura di sezione.

Ogni piano essendo determinato colla conoscenza di tre punti, un circolo minore è determinato colla conoscenza di tre punti sulla superficie sferica, ma poichè se nel piano di un circolo minore e nel centro C del medesimo, si innalza una perpendicolare sino

all' incontro della superficie sferica', questo punto d' intersezione è tale che esso dista egualmente da tutti i punti della circonferenza del circolo minore, così scorgesi come la conoscenza di un tale punto e di un altro sulla superficie sferica, sieno sufficienti perchè sia determinato il circolo minore. Un tale punto equidistante dalla circonferenza di un circolo sferico, addimandasi il *polo* di quel circolo. Ciò posto, scorgesi ben tosto come ogni circolo sferico abbia due poli, cioè due punti sulla superficie sferica, che equidistano ciascuno egualmente dalla sua circonferenza, ed i quali poli sendo collocati su di una perpendicolare al piano e nel centro di quel circolo, sono gli estremi di un diametro, che in tale caso addimandasi l'*asse*. Così, essendo L H N I un circolo minore, i suoi poli sono D ed E, ed il suo asse è il diametro D E. Tutti i circoli nella sfera che sono paralleli avendo la perpendicolare comune, così nella sfera tutti i circoli paralleli hanno il medesimo asse ed i medesimi poli.

Ma se un circolo minore è determinato colla conoscenza del polo e di un punto della sua circonferenza, un circolo massimo è determinato colla conoscenza del polo, poichè la distanza D F di un polo nel circolo massimo eguaglia la corda di un quadrato inscritto in un circolo, cioè essendo R il raggio di una sfera, è la corda sferica raggio del circolo da descriversi sulla superficie sferica, eguale ad $R\sqrt{2}$.

Considerata la figura di sezione di un piano comunquemente condotto in una sfera, rimane la considerazione della divisione da esso operata, prima nella superficie sferica, poscia nella sfera.

Il piano A F B G essendo condotto comunquemente pel centro della sfera, poichè se pel centro O del circolo di sezione si innalza ad esso una perpendicolare E D limitata alla sfera, egli è dato di ritenere essere la superficie sferica generata da un semicircolo qualunque D A E avente per diametro E D, così scorgesi come per la perpendicolarità tra loro del piano A F B G con quello D A E, sia O D perpendicolare ad O A, e quindi la semicirconferenza generatrice della superficie sferica divisa costantemente per metà dal piano A F B G.

Ma in tutte le sue posizioni di rivoluzione, la superficie generata dal quarto di circonferenza A D essendo evidentemente eguale alla superficie generata dal quarto di circonferenza A E, è dato di con-

chiudere come *qualsiasi circonferenza massima di una sfera scompone la superficie sferica in due parti perfettamente eguali,* ciascuna delle quali addimandasi una *superficie emisferica.*

Ogni circonferenza minore scompone avvece la superficie sferica in due parti diseguali, delle quali la più piccola chiamasi una *calotta sferica,* la più grande una *calotta sferica supplementare.* Essendo infatti L H N I il piano di un circolo minore, se ad esso tracciasi l'asse D E, rendesi manifesto come la circonferenza minore divide la semicirconferenza che genera la superficie sferica egualmente, in tutta la rivoluzione, per modo che è la superficie di qualsiasi calotta sferica, generata dalla rivoluzione attorno l'asse dell'arco D H di un settore circolare H O D, del quale un raggio coincide coll'asse, e quella della calotta sferica supplementare generata dalla rivoluzione dell'arco H E del settore circolare H O E, il cui angolo è il supplemento di quello del primo settore. Laonde ogni circolo minore ha nella divisione della superficie sferica da esso operata, il limite assegnato ad un angolo, cioè da una quantità minore di qualsiasi quantità data, ed il suo supplemento, ch'è ciò che manca per formare la superficie intiera della sfera.

Se si considerano ora due circonferenze massime tracciate in una sfera, rendesi evidente anzitutto che le medesime si dividono in parti eguali, cioè per metà. Infatti, due piani che entrambi passino pel centro della sfera, la retta d' intersezione è una retta passante pel centro, cioè è un diametro, il quale divide circolo e circonferenza in due parti eguali. Rendesi in seguito evidente come la superficie sferica sia divisa da due circonferenze massime in quattro parti, ognuna delle quali è limitata da due semicirconferenze, ed ognuna delle quali chiamasi un *fuso sferico,* e le semicirconferenze che la determinano i *lati del fuso.* Così le due circonferenze A E B D, A F B G scompongono la sfera nei quattro fusi A E B F A, A F B D A, A E B G A, A G B D A. I lati del fuso essendo semicirconferenze, è dato di vedere come la superficie del fuso sia generata, del pari che quella della sfera, dalla rivoluzione di una semicirconferenza attorno il suo diametro, solo che mentre pella generazione della superficie sferica occorre una rivoluzione di 360°, per la generazione avvece del fuso occorre solo una rivoluzione limitata dall' angolo formato dai piani che contengono le semicirconferenze. Ma l' angolo formato da due piani essendo il diedro ,

cioè quello formato dalle perpendicolari innalzate nei medesimi da uno stesso punto dell'intersezione, così se nei piani dei lati del fuso e nel punto di mezzo dell'asse si conducono due perpendicolari, l'angolo formato dalle medesime esprime l'angolo di rivoluzione di una semicirconferenza, necessario per la generazione della superficie del fuso: ma un tale angolo essendo al centro nel piano del circolo perpendicolare alla metà dell'asse, e quindi misurato dall'arco del circolo massimo compreso fra la metà dei lati del fuso, è quindi dato di dire come *la superficie di un fuso sferico è alla superficie di una sfera nel rapporto stesso dell'arco di circolo massimo compreso fra la metà dei suoi lati e la circonferenza massima della sfera.* Questa relazione fra la superficie del fuso e della sfera alla quale appartiene, è quella che spiega come appunto la rivoluzione di una semicirconferenza attorno al suo diametro per 180°, che forma una circonferenza massima nella sfera, generi un fuso, in cui l'arco di circolo massimo compreso fra la metà de' suoi lati è una semicirconferenza, ed in cui è perciò la sua superficie eguale alla metà di quella della sfera, e conseguentemente come due circonferenze massime tracciate in una sfera, la dividano in quattro fusi due a due opposti eguali, essendochè aventi lati eguali, quali sono quelli opposti al vertice che si ottengono con un circolo massimo, i cui poli sieno le intersezioni delle circonferenze massime nella sfera.

Ora, due circonferenze massime tracciate in una sfera dividendone la superficie in quattro fusi, eguali quelli opposti, supplementari quelli adiacenti, è chiaro che allorachè le due circonferenze sieno l'una all'altra perpendicolari, i fusi adiacenti risultano eguali, e quindi la superficie sferica è divisa in quattro fusi perfettamente eguali, onde ognuno è la quarta parte della superficie della sfera. Uno di tali fusi chiamasi un *fuso retto*, e d'altronde tale è l'angolo formato dai piani che ne contengono i suoi lati, e l'arco di circolo massimo compreso fra la metà de' suoi lati è eguale al quarto di una circonferenza massima.

Considerando tre circonferenze massime tracciate in una sfera, o esse hanno il diametro comune, cioè si intersecano reciprocamente negli stessi punti, oppure esse si tagliano comunquemente, dividendo la superficie sferica in otto parti, ognuna delle quali è limitata da tre archi di circonferenze massime, ed ognuna

delle quali perciò chiamasi un *triangolo sferico.* Gli archi che le determinano sono detti i *lati del triangolo sferico,* e gli angoli diedri formati dai piani che contengono i lati sono gli *angoli del triangolo sferico.*

Così i tre circoli massimi A E B D, A F B G, D F E G originano gli otto triangoli sferici A F D, F B D, B G D, A G D, A F E, B F E, A G E, B G E.

Nello stesso modo che venne dimostrato come la superficie sferica generata dalla rivoluzione di una semicirconferenza è divisa per metà dalla circonferenza, il cui asse è il diametro di rivoluzione, puossi dimostrare come ancora la superficie di un fuso è divisa per metà dall'arco stesso di circonferenza massima che ne misura l'angolo. Onde un fuso qualsiasi è diviso in due parti eguali dall'arco di circolo massimo che ne divide per metà i suoi lati, e poichè il piano che contiene quest'arco di circolo massimo è perpendicolare ai piani che ne contengono i lati, così è dato di dire come tre circonferenze massime tracciate in una sfera perpendicolarmente tra loro, ne dividono la superficie in otto triangoli sferici perfettamente eguali. Ognuno però di tali triangoli sferici avendo i lati che sono quarti di circonferenza massima e gli angoli che sono retti, perpendicolari tra loro essendo i piani che contengono i lati, appellasi *triangolo sferico trirettangolo*, mentrechè appellasi *triangolo sferico birettangolo* quello che ha solo due angoli retti, e *triangolo sferico rettangolo* quello che ha un solo angolo retto.

Ogni triangolo sferico trirettangolo è quindi la ottava parte di una superficie sferica; ogni fuso qualsiasi è la somma di due triangoli birettangoli eguali.

Considerando infine più circonferenze massime tracciate in una sfera, si ha che esse o scompongono la superficie sferica in tanti fusi se s'incontrano in due soli punti, oppure in tante parti limitate da archi di circoli massimi se diversamente, ognuna delle quali parti addimandasi un *poligono sferico.* Cosicchè un poligono sferico è una porzione di superficie sferica limitata da archi di circonferenze massime che si chiamano i *lati del poligono sferico,* ed i cui angoli sono costantemente gli angoli diedri formati dai piani che contengono quei lati.

Dalla considerazione di circonferenze massime passando a quella di circonferenze minori, si ha che più circonferenze minori che

siano parallele scompongono la superficie sferica in tante *zone sferiche*, per modo che è la zona sferica la parte di superficie sferica compresa fra due circoli paralleli.

È agevole il comprendere come la superficie di una zona sferica è la differenza della superficie di due calotte, ovvero la superficie generata dalla rivoluzione dell'arco di un settore circolare attorno ad un asse che non ha di comune col medesimo che il centro, tale sarebbe la rivoluzione prodotta dal settore A O I attorno l'asse E D, in questo caso però uno dei raggi del settore essendo perpendicolare all'asse, una delle circonferenze di base della zona sferica è una circonferenza massima.

Dalla divisione operata dalle circonferenze massime e minori della superficie sferica, passando alla divisione operata nella sfera dai circoli massimi e minori, è dato di vedere come analogamente, essendo la sfera generata dalla rivoluzione di un semicircolo attorno al suo diametro, essa sia egualmente divisa per metà da un circolo massimo qualunque. Infatti, condotto in una sfera un circolo massimo, e poscia l'asse del medesimo, siccomechè il semicircolo generatore avente per diametro quest'asse è diviso in tutta la rivoluzione costantemente per metà dal circolo massimo tracciato, così anche il solido generato dal semicircolo è diviso in due parti eguali da quel circolo massimo, ed ognuna di dette parti addimandasi perciò un *emisfero*.

Un circolo minore tracciato nella sfera, la scompone parimenti in due parti diseguali, l'una però supplementaria dell'altra, ed ognuna di queste parti chiamasi un *segmento sferico ad una sola base*, la base essendo il circolo minore. Poichè se ad un circolo minore L H N I, dopo tracciato l'asse D E, si considera la sfera generata dal semicircolo che ha per diametro un tale asse, è dato di vedere che il circolo minore divide egualmente in tutta la rivoluzione il semicircolo generatore, così scorgesi come il segmento sferico avente per base quel circolo minore sia generato dalla rivoluzione del semisegmento circolare D C H attorno al lato C D.

Ora, se al solido generato dalla rivoluzione di D C H aggiungesi il solido generato dal triangolo O C H, che è un cono, è visibile risulti nell'insieme un solido generato dalla rivoluzione del settore circolare D O H attorno il raggio O D, il quale chiamasi un *settore sferico*.

Due circoli massimi condotti in una sfera, incontrandosi secondo un diametro, ne deriva evidente la scomposizione della sfera in quattro parti, ognuna delle quali è terminata da due semicircoli massimi e da un fuso, ed ognuna delle quali ha il nome proprio di *spicchio sferico.*

Due o più spicchi sferici appartenenti ad una medesima sfera, essendo terminati da due faccie eguali, così ne deriva che l'essenza di essi è relativa alla superficie del fuso. Ma avendosi che due circoli massimi condotti in una sfera incontrano la superficie sferica secondo due circonferenze massime, le quali forniscono dei fusi opposti eguali, così è dato di dire del pari che due circoli massimi scompongono la sfera in quattro spicchi due a due opposti eguali, e quelli adiacenti supplementari. Lo spicchio sferico essendo generato nel modo stesso che la sfera, dalla rivoluzione di un semicircolo colla sola differenza nella limitazione della rivoluzione, così scorgesi come lo spicchio sia colla sfera nella proporzione della rivoluzione, cioè dell'angolo percorso dal semicircolo generatore, e poichè quest'angolo è a 360° nel rapporto stesso dell'arco di circonferenza massima che divide per la metà i lati della base dello spicchio ch'è il fuso, alla circonferenza intiera, così *lo spicchio sferico è alla sfera dalla quale deriva nel rapporto stesso dell' arco di circonferenza massima che divide per metà i lati della base, alla circonferenza intiera.* Da ciò intendesi come due circoli massimi tracciati perpendicolarmente tra loro in una sfera, la scompongono in quattro spicchi eguali, ognuno dei quali chiamasi uno *spicchio retto.*

Considerando la sezione prodotta in una sfera da tre o più circoli massimi, si ha che essi la scompongono in spicchi quando abbiano comune un diametro, in *piramidi sferiche* alloraquando essi abbiano una posizione diversa. In generale chiamasi piramide sferica il solido avente per base un poligono sferico e per lati altrettanti raggi della sfera. Il poligono sferico è la base della piramide sferica. Una piramide sferica è regolare quando il poligono sferico di base è un poligono sferico regolare, cioè formato da lati ed angoli al perimetro eguali. La piramide sferica è triangolare se la base è un triangolo sferico, quadrangolare se la base è un quadrilatero sferico, e così di seguito.

Il triangolo sferico trirettangolo avendo i lati e gli angoli eguali,

la piramide che ha per base uno di siffatti triangoli è una piramide sferica triangolare regolare. E siccome ogni triangolo sferico trirettangolo è la ottava parte della superficie della sfera, così anche la piramide sferica triangolare regolare è la ottava parte di una sfera.

Per ultimo, la sezione fatta in una sfera da circoli minori tra loro, oppure tra circoli minori e massimi, sono solidi terminati da due faccie piane che sono due circoli, e lateralmente da una zona sferica, e che si chiamano *segmenti sferici a due basi.* Ogni segmento sferico a due basi è evidentemente la differenza di due segmenti sferici ad una sola base. Può del resto il segmento sferico a due basi venire considerato come generato dal semisegmento circolare L C O A attorno al lato O C.

Un esatto concetto di tutte le sezioni operate in una sfera nel senso che si disse, lo si ha nella Fig. 26, che rappresenta una sfera nella quale col piano A P B è stata scomposta in due emisferi; col piano E N F è stato separato un segmento sferico ad una sola base, la cui superficie E G F è una calotta sferica; col piano A' Q B' uno spicchio sferico, nel quale la base è il fuso A' P B' Q, in cui P Q è l'arco di circolo massimo che ne congiunge i punti di mezzo dei lati; nella quale infine in C R D O si ha un settore sferico; ed in H I K L O una piramide sferica, nella quale H I K L è la base i cui diversi lati sono altrettanti archi di circolo massimo.

Considerate le figure di sezioni e le sezioni operate in una sfera da piani che passino e non passino pel centro della sfera, rimangono ad esaminare i caratteri dei poligoni sferici. Il più semplice tra questi essendo il triangolo, così sia E G C (Fig. 27) un triangolo sferico formato dai tre archi di circolo massimo C E, E G, G C, che ne sono i suoi lati. Poichè i lati tanto di un triangolo sferico qnanto di un poligono sferico, sono la misura degli angoli piani dell'angolo solido avente il vertice nel centro della sfera, è dato di vedere come l'angolo piano C O G dell'angolo solido O è misurato dal lato G C, l'angolo piano E O G dal lato E G, ed infine l'angolo piano C O E dal lato C E, ed inoltre che quei tre angoli piani stanno tra loro nel rapporto di quei lati. Ora, dal teorema stato dimostrato a pag. 381 avendosi che ogni angolo solido triedro è tale che ogni angolo piano è minore della somma degli altri

due e maggiore della differenza, risulta immediatamente come *in ogni triangolo sferico un lato è minore della somma degli altri due e maggiore dalla loro differenza.*

Medesimamente, l'angolo solido poliedro essendo tale che ogni angolo piano è minore della somma degli altri, si ha pure che *in ogni poligono sferico un lato è sempre minore della somma degli altri.*

La relazione che corre fra i lati di un triangolo sferico, identica a quella che corre fra i lati di un triangolo rettilineo, accenna immediatamente come l'arco di circolo massimo che unisce due punti collocati su di una superficie sferica, sia la linea più breve, o per meglio dire sia quella che segni sulla superficie sferica il più corto cammino che fra di essi esista. Essendo infatti C e G due punti di una superficie sferica, C G l'arco di circolo massimo che li congiunge, per qualunque punto ad esempio E, vogliasi supporre passi una linea più corta dell'arco C G, siccome pel medesimo è possibile sempre di fare passare due archi di circolo massimo, e così avere origine un triangolo sferico, dal quale si ha evidentemente $CG < GE + EC$, così è dato conchiudere *la distanza fra due punti di una superficie sferica è misurata dall'arco di circolo massimo passante per essi.*

Un'altra considerazione è pure dato di fare coll'appoggio della suddetta relazione corrente nei lati di un triangolo sferico, ed è quella, che se si ha un triangolo E G D, i lati di questo appartenendo a circonferenze massime, il prolungamento dei due lati D E, D G forniendo nella loro intersezione in D due semicirconferenze massime, l'una C E D, l'altra C G D, la somma delle quali è precisamente una circonferenza massima, per la relazione $EG < EC + GC$ è dato di conchiudere: *la somma dei lati di un triangolo sferico è sempre minore di una circonferenza massima.*

Questa verità è d'altronde evidente alloraquando pongasi mente che, essendo la somma degli angoli piani di un angolo solido convesso, minore di quattro angoli retti, e le faccie di una piramide sferica altrettanti settori circolari di medesimo raggio, non possa essere la somma degli archi eguale ad una circonferenza massima, non facendo la somma degli angoli piani 360°, e la somma degli archi essendo il perimetro di base della piramide sferica, cioè di un poligono sferico, così è dato di dire come non solo nel trian-

golo sferico, ma *in ogni qualsiasi poligono sferico la somma dei lati è minore di una circonferenza massima.*

Ad una sfera, ancora di una posizione di un piano rispetto ad essa rimane a dire, ed è quella di quando esso è *tangente alla sfera,* cioè di quando esso ha comune colla sfera un sol punto.

Un piano M N (Fig. 28) che sia perpendicolare ad un raggio condotto ad un determinato punto della superficie sferica, è tangente in quel punto alla sfera, cioè non ha che quel punto di comune colla sfera. Infatti, essendo O T perpendicolare al piano M N, qualunque altro punto di detto piano, R ad esempio, si volesse supporre fosse comune colla sfera, siccome è tale che condotta la retta R T nel piano, è la medesima perpendicolare ad O T, e quindi ove si conduca il raggio O R, essendo R T O un triangolo rettangolo, è manifestamente l'ipotenusa maggiore di qualsiasi cateto, ond'è $OR > OT$, epperciò il punto R non può appartenere alla sfera, tutti i punti della medesima essendo equidistanti dal centro, così il piano M N perpendicolare in T al raggio O T della sfera è tangente alla medesima. Ora bene, un piano che sia perpendicolare ad un raggio essendo tangente alla sfera, per ogni qualsiasi punto della superficie sferica è dato quindi di potere condurre un piano tangente. Ma poichè messa una sfera a riposare su di un piano, il suo punto di contatto è costantemente il piede della perpendicolare abbassata dal centro della sfera al piano, come infatti rilevasi della considerazione che la perpendicolare ad un piano è la linea che segna la più breve distanza fra un punto ed un piano, e che da un punto ad un piano non è possibile di abbassare più di una perpendicolare, e quindi una sfera messa a riposare su di un piano, non può avere la sua superficie che un sol punto di comune col medesimo, essendo i raggi di una sfera eguali tra loro, e dal centro di una sfera non essendo possibile due rette al piano che sieno eguali tra loro ed eguali contemporaneamente alla perpendicolare, eguaglianza necessaria perchè per quanto venne detto precedentemente, un piano che sia tale che la perpendicolare al medesimo abbassata sia minore del raggio, il piano taglia la sfera; così è dato conchiudere come *un solo è il piano tangente ad una sfera che sia dato di tracciare per ciascun punto della superficie sferica, ed è quello perpendicolare al raggio della sfera condotto al punto di contatto.*

Un piano che sia tangente ad una sfera essendo perpendicolare al raggio che unisce il punto di contatto, scorgesi come P essendo il vertice di un triangolo sferico, l'incontro cioè di due archi di circolo massimo, il piano condotto tangente alla sfera pel punto P essendo perpendicolare al raggio O T, alla linea cioè d'intersezione dei piani che contengono i lati P E, P G del triangolo sferico, è pure perpendicolare ai predetti piani, e quindi l'intersezione con essi sono due rette P C, P D, tangenti nel punto P ai lati P E, P G del triangolo sferico, e che formano tra loro un angolo eguale al diedro formato dai piani che contengono quei due lati.

Ora bene, avendosi che un angolo sferico è eguale all'angolo piano formato dalle tangenti condotte dal vertice ai lati, si ha immediatamente luogo alla conoscenza del limite nella somma degli angoli di un triangolo sferico. Immaginando infatti condotto per ciascuno dei vertici di un triangolo sferico un piano tangente alla sfera, si ha che i medesimi, a seguito del teorema stato dimostrato a pag. 384, generano un angolo solido supplementare, nel quale gli angoli piani essendo i supplementi degli angoli driedri dell'angolo solido al centro nella sfera, cioè i supplementi degli angoli sferici, è la somma di questi cogli angoli piani dell'angolo solido supplementare, eguale a sei angoli retti, ma posciachè la somma degli angoli piani dell' angolo supplementare è minore di quattro angoli retti, così è dato di scorgere come la somma degli angoli sferici di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti. E poichè ogni angolo sferico convesso, ogni angolo cioè di triangolo sferico, non può essere nè eguale nè maggiore di due angoli retti, e quindi la somma costantemente minore di sei angoli retti, è dato di conchiudere essere *la somma degli angoli sferici di un triangolo sferico compresa fra due retti e sei retti, cioè compresa fra* 180° *e* 540°.

Fatta la considerazione di due piani relativi ad una sfera, vengasi alla considerazione di due sfere le quali s' intersechino. Una sfera di centro O ed un'altra di centro C come quelle rappresentate alla Fig. 29, e le quali s'intersechino, fanno vedere come la linea d' intersezione F K G L qualunque essa sia, è tale che tutti i punti distano egualmente da uno qualunque dei due centri delle sfere. Ma il luogo geometrico dei punti che equidistano egualmente da uno qualunque di due punti dati nello spazio, essendo un piano perpendicolare alla linea che congiunge questi ultimi due punti,

così è dato di vedere come l'intersezione di due sfere sia una linea contenuta in un piano perpendicolare alla retta che unisce i centri delle due sfere, e poichè ogni piano che tagli la sfera, la figura di sezione è un circolo, e quindi di conchiudere come *i centri di due sfere che si tagliano, sono collocati su di una medesima retta perpendicolare al centro nel piano del circolo d'intersezione.* Ma la retta che è perpendicolare nel centro del piano di un circolo sferico, essendo un asse del medesimo, e gli estremi di questo collocati sulla superficie sferica, essendone i poli, è dato di aggiungere come gli estremi della retta che passando pel centro delle sfere è limitata alle superficie sferiche delle medesime, sono i poli del circolo d'intersezione e di qualsiasi altro parallelo.

Così A e B sono i poli del circolo F K G L, nonchè dei circoli D E, H I a quello paralleli. Egli è poi facile di rilevare che il diametro K L del circolo d'intersezione di due sfere, è la corda d'intersezione di due circonferenze massime, i cui centri sono alla distanza dei centri delle due sfere, come scorgesi dalla figura stessa.

Proiezione stereografica. — Una proprietà importantissima della sfera è quella di ogni circolo massimo di dare nella sezione sua col cono avente il vertice in un polo e la base nell'emisfero del polo opposto, una figura simile alla base di questo tale cono.

Ogni piano che tagli una sfera, la figura di sezione essendo costantemente un circolo, ne deriva che alloraquando si sarà tagliata una sfera con un piano parallelo ad un circolo massimo, e poscia dal polo esistente nell'emisfero opposto, come vertice, si sarà immaginato formato il cono avente per base la sezione operata, il detto cono è retto, e viene tagliato dal piano del circolo massimo parallelo alla base, evidentemente secondo una figura simile a quella di base, cioè secondo un circolo, onde pel caso di un cono la cui base è parallela al piano del circolo massimo, ha luogo l'enunciata proprietà. Resta quindi a considerare il cono formato col vertice in un polo e colla base nell'emisfero opposto non parallela al piano del circolo massimo, a cui il polo si riferisce, come quello E F D P, cioè il cono obliquo, e vederne la figura di sezione in esso operata dal piano del circolo massimo. Per ciò, se osservasi come il piano che passa per l'asse P C ed è perpendicolare al piano di base del cono obliquo, è il piano che contiene l'asse e la sua proiezione fatta

sulla base, ed inoltre è perpendicolare al piano del circolo massimo, e nella sua sezione colla sfera somministra un circolo massimo, è dato di vedere come i lati di sezione del cono siano P E, P D amendue due rette condotte nel circolo massimo che passa pel punto P e pei punti E e D. Ora, l'angolo *d e* P come eccentrico nell'interno (pag. 106), avendo per misura la metà della somma dei due archi P B, A E, è eguale all'angolo P D E che ha per misura la metà dell'arco P E, che è eguale a P A + A E, e poichè P A = P B, eguale a P B + A E. Il piano quindi del circolo massimo, oltre l'essere perpendicolare al piano E P D che contiene l'asse e la sua proiezione, forma col lato P E un angolo *d e* P eguale all'angolo E D P formato dalla base coll'altro lato, la sezione quindi operata dal piano del circolo massimo ad un cono che abbia il vertice in un polo e la base collocata nell'emisfero opposto e come quella antiparallela, cioè una figura simile a quella di base.

Laonde qualsiasi figura tracciata in un emisfero è dato l'ottenerne una figura simile col tracciarne nel piano del circolo massimo l'intersezione delle rette che partendo del polo opposto vanno a tutti quei punti.

Può quindi venire rappresentato in un circolo una figura simile a quella tracciata su di un emisfero con supporre una retta, la quale passando costantemente pel polo dell'emisfero opposto, nel percorso con un estremo della figura tracciata sulla superficie emisferica, lasci sul piano del circolo massimo la traccia del percorso. La proiezione fatta in tal guisa, su di un piano di una figura tracciata in un emisfero, chiamasi una *proiezione stereografica.*

Egli è con siffatto sistema di proiezione che viene rappresentato il nostro globo nei cosiddetti mappamondi, in cui sono tracciati due circoli, ognuno dei quali rappresenta un circolo massimo della terra, e su ognuno dei quali è tracciata una figura che è simile a quella della configurazione dei due emisferi, nei quali è dal piano dell'equatore immaginato scomposta la terra.

Valori della superficie sferica e sue parti. — Dimostrato che la superficie sferica è generata dalla rivoluzione di una semicirconferenza attorno ad un diametro, è evidente come ove si ritenga la circonferenza di un circolo come un poligono regolare di un numero infinito di lati, e la semicirconferenza perciò come un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, la superficie sferica è dato

di ritenerla come generata dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero infinito di lati attorno ad un diametr-o Ma alloraquando debbe immaginarsi la rivoluzione di un semipoli. gono regolare, affinchè questa risoluzione abbia a generare nessuna superficie piana, la quale più di tutte le superficie, si allontana dalla superficie sferica, egli è necessario la rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero pari di lati, perchè in tale caso la retta che divide per metà un poligono regolare di un numero pari di lati passa pel centro del poligono e contemporaneamente per due vertici, ed è il diametro del circolo circoscritto al poligono.

Con una tale considerazione la ricerca della superficie sferica è condotta a quella della superficie generata dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero pari ed infinito di lati attorno ad un diametro di circolo circoscritto. Ora bene, siccomechè se si ha un semipoligono regolare qualunque di un numero pari di lati, come quello A B C D E, il quale suppongasi girare attorno al diametro A E del circolo circoscritto, è dato di vedere come una tale superficie è la somma di quelle generate dai diversi lati del poligono attorno all'asse A E, scorgesi ben tosto come tali superficie essendo considerabili come generate della rivoluzione di lati di triangoli e trapezi attorno all'asse A E, si possa mercè le espressioni conosciute pelle superficie generate dalla rivoluzione dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo attorno ad un cateto, e dal lato di un trapezio retto attorno al cateto, e colla scomposizione del semipoligono in triangoli rettangoli e trapezi, con abbassare dai vertici del semipoligono delle perpendicolari sull'asse, ricavare le espressioni delle superficie generate dai diversi lati, e così

$$\text{Sup. } A B = \text{Circonf. } O K' \times A I, \quad \text{Sup. } B C = \text{Circonf. } O K \times O I$$

$$\text{Sup. } C D = \text{Circonf. } O K'' \times O L, \quad \text{Sup. } D E = \text{Circonf. } O K''' \times L E$$

che sommate danno il valore della superficie intiera generate dal semipoligono; il quale valore però essendo la somma di prodotti nei quali esiste un fatto reeguale, eguali essendo tutte le apoteme di un poligono regolare, cioè $O K = O K' = O K'''$, si ha essere

$$\text{Superficie totale} = \text{Circonferenza } O K (A I + O I + O L + L E)$$

e siccome la somma dei termini racchiusi nella parentesi corrisponde al diametro del circolo circoscritto al poligono, risulta come *la superficie generata dalla rivoluzione del perimetro di un semipoligono regolare di un numero pari di lati, è eguale al prodotto del diametro della circonferenza circoscritta al poligono pella circonferenza inscritta.*

Ora, il poligono di un numero infinito di lati, pella fatta considerazione ritenuto essere il circolo, epperciò tale che l'apotema eguagli il raggio del circolo circoscritto, rendesi manifesto come la superficie sferica abbia ad essere eguale al prodotto della circonferenza massima della sfera pel diametro.

Questa conseguenza del valore della superficie di una sfera dedotta con la considerazione di un semicircolo per un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, trova tuttavia la conferma nella dimostrazione all'assurdo che all'uopo è possibile di dare.

Infatti, se in un semicircolo immaginasi inscritto un semipoligono regolare, e poscia altro semipoligono regolare di un numero doppio di lati del primo, essendo la superficie generata dal perimetro di ciascuno dei medesimi attorno al diametro del circolo circoscritto, eguale al prodotto di questo diametro per la circonferenza di un circolo, il cui raggio sia la propria apotema, o per meglio dire, sia il raggio del semicircolo inscritto al semipoligono, ne risulta che nei due semipoligoni essendo eguale il diametro del circolo circoscritto, e il raggio del circolo inscritto essendo tanto più grande quanto più il semipoligono inscritto è prossimo a coincidere col semicircolo, quanto più i semipoligoni saranno prossimi a coincidere col semicircolo, tanto più la superficie generata si accosterà a coincidere con quella generata dal semicircolo, cioè con quella sferica, laonde *la superficie di una sfera è maggiore della superficie generata dalla rivoluzione del perimetro di qualsiasi semipoligono inscritto nel semicircolo generatore.*

Medesimamente, poichè se ad un semicircolo si circoscrive un semipoligono regolare, ed in seguito altro semipoligono regolare di un numero doppio di lati, è la superficie generata dal perimetro dei medesimi eguale al prodotto del diametro del circolo circoscritto per la circonferenza massima della sfera generata dal semicircolo, ne deriva che i raggi delle circonferenze circoscritte ad un poligono circoscritto ad un circolo essendo tanto più piccoli

quanto più numerosi sono i lati del poligono, cioè quanto più il poligono si accosta a coincidere col circolo, le superficie generate dai perimetri dei semipoligoni circoscritti ad un semicircolo sono tanto più piccole quanto più i medesimi si accostano a coincidere colla semicirconferenza, cosicchè *la superficie di una sfera è minore della superficie generata dalla rivoluzione del perimetro di qualsiasi semipoligono circoscritto al semicircolo generatore.*

La superficie sferica essendo così compresa fra il prodotto del suo diametro per una circonferenza di raggio maggiore dell' apotema di qualsiasi poligono inscritto in un circolo massimo, ed il prodotto della circonferenza massima per il diametro di un circolo minore di quello di qualsiasi poligono circoscritto al circolo massimo della sfera, è evidente come la superficie di una sfera non può essere a meno di essere eguale al prodotto della circonferenza massima della medesima per il relativo diametro. D' altronde, ove suppongasi che il prodotto ad esempio D C $\times$ Circonf. O F (Fig. 32) esprimesse la superficie di una sfera più grande di quella di raggio O F, cioè di un raggio maggiore, poichè al semicircolo generatore della sfera di raggio O F immaginando circoscritto un semipoligono A N I L B, i lati del quale non abbiano ad incontrare il semicircolo generatore della sfera supposta, si ha che la superficie generata dal perimetro di un tale semipoligono è maggiore della superficie della sfera di raggio O F, così la medesima superficie dovrebbe essere pure maggiore della superficie della sfera supposta, ma questo essendo un assurdo, così non può il prodotto D C $\times$ Circonf. O F esprimere una superficie sferica maggiore di quella della sfera di raggio O F. Medesimamente non può il prodotto D C $\times$ Circonf. O F esprimere la superficie di una sfera di raggio minore di quella di raggio O F, poichè inscrivendo nel semicircolo generatore un semipoligono D G F E C, i cui lati non tocchino il semicircolo generatore della sfera supposta, la superficie generata dal perimetro di questo semipoligono essendo minore di quella della sfera di raggio O F, dovrebbe pure essere minore di quella generata dal semicircolo supposto ciò ch'è un assurdo, e conseguentemente il prodotto D C $\times$ Circonf. O F non esprime una superficie sferica minore di quella della sfera O F. Il prodotto quindi D C $\times$ Circonf. O F non esprimendo una superficie sferica nè più grande nè più piccola di quella della sfera di raggio O F, è dato

in generale di conchiudere come *la superficie di una sfera è eguale al prodotto della sua circonferenza massima pel suo diametro.* Cosicchè, chiamando con S la superficie di una sfera di raggio R e di diametro D, si ha

$$S = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2, \quad S = \pi D^2$$

dalla prima delle quali espressioni è dato di dedurre come la superficie di un circolo massimo essendo espressa da πR^2: 1.° *la superficie di una sfera è eguale alla somma di quella di quattro dei suoi circoli massimi*, 2.° *la superficie di un emisfero è eguale alla somma di due dei circoli massimi*, 3.° *la superficie di un fuso retto è eguale alla superficie di un circolo massimo della sfera alla quale appartiene*, 4.° *la superficie di un triangolo sferico trirettangolo è la metà della superficie di un circolo massimo della sfera alla quale appartiene;* dalla seconda come *la superficie di una sfera è equivalente a quella di un circolo di raggio il diametro della sfera.*

Ora, la superficie di un fuso sferico essendo alla sfera come l'angolo sferico sta a 4 R, ne deriva che chiamando con A l'angolo sferico, poichè si ha la proporzione $S : 4R :: x : A$, così $x = \frac{S \times A}{4R}$, cioè la superficie di un fuso qualunque è eguale al quoziente del prodotto della superficie totale della sfera per 360°, e poichè ancora chiamando con C la circonferenza massima di una sfera e con c l'arco di circonferenza massima che misura l'angolo sferico, si ha la proporzione $S : C :: x : c$, così deducesi $x = \frac{c \times S}{C}$, e siccome $S = D \times C$, così $x = \frac{c \times D \times C}{C} = c \times D$, cioè *la superficie del fuso sferico è eguale al prodotto del diametro della sfera a cui appartiene, per l'arco di circolo massimo che ne congiunge i punti di mezzo dei suoi lati.*

Ogni calotta sferica, come ogni zona sferica, essendo generata dalla rivoluzione dell'arco di un settore circolare attorno ad una retta passante pel loro vertice, è possibile con un ragionamento identico a quella tenuto per la derivazione dell'espressione della superficie di una sfera, di dimostrare come la loro superficie è il prodotto della loro altezza, cioè dell'altezza dei rispettivi segmenti, per la circonferenza massima della sfera a cui appartengono. Onde

le superficie dei segmenti sferici tanto ad una quanto a due basi, sono proporzionali nella medesima sfera, alle loro altezze. Cosicchè, data una sfera come quella rappresentata alla Fig. 33, e propostane la divisione della superficie, ad esempio in quattro parti equivalenti, con piani tra loro paralleli, dopo tracciato un diametro H G, non si ha che dividerlo nel rapporto in cui vuol dividersi la superficie sferica, cioè in quattro parti eguali nei punti L, O, I, poscia per questi fare passare tre piani C D, A B, E F perpendicolari al diametro H G, che essi divideranno la superficie sferica in quattro parti equivalenti. Ed ecco così essere possibile la divisione di una superficie sferica in tante parti e nel rapporto che si vuole, sia per mezzo di piani paralleli che di piani come quelli A E H F B D G C, G D M R H S N Q, passanti per un medesimo diametro.

La superficie di una calotta sferica, come ad esempio quella rappresentata alla Fig. 34, oltre ad essere eguale al prodotto della circonferenza massima della sfera a cui appartiene come D A E B, per l'altezza del segmento come D C, essa ha ancora un'altra espressione indipendente dalla conoscenza della sfera a cui appartiene, basata cioè su di elementi proprii. Egli basta osservare come essendo il circolo D A E B un circolo massimo perpendicolare al piano di base del segmento sferico, sia l'intersezione A B una corda perpendicolare al diametro E D, e quindi in virtù della proposizione di cui a pag. 255, si possa stabilire l'eguaglianza $\overline{AD}^2 = DE \times DC$, che poi moltiplicata per π convertesi nell'altra $\pi\,\overline{AD}^2 = \pi\,DE \times DC$, in cui il primo membro è l'espressione dell'area di un circolo il cui raggio sia A D, il secondo membro è l'espressione della superficie della calotta sferica, poichè π D E fu appunto la circonferenza massima, e D C l'altezza della calotta. Siccome poi il triangolo A C D è rettangolo, e quindi è $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$, e così risulta $\pi\,\overline{AD}^2 = \pi\,\overline{AC}^2 + \pi\,\overline{CD}^2$, così può dirsi come *la superficie di una calotta sferica è equivalente alla somma di quella di due circoli aventi per raggio, l'uno la semicorda, l'altro la monta od altezza della calotta.*

Data quindi l'altezza H di una calotta, e la corda 2 C, è la superficie della calotta

$$S = \pi H^2 + \pi C^2 = \pi (H^2 + C^2).$$

Venendo per ultimo alla ricerca del valore della superficie di un triangolo sferico, egli giova anzi tutto conoscere la relazione corrente fra la superficie di un triangolo sferico e quella di una sfera. Sia perciò E G P (Fig. 28) un triangolo qualunque. Egli è evidente che se prolungansi i due lati P G, P E sino al loro incontro nel punto T, la superficie P E T G P è un fuso, e quindi è la superficie del medesimo eguale ad $\frac{S \times P}{4 R}$, esprimendo S la superficie sferica, P l' angolo sferico E P G, R un angolo retto. Medesimamente, se prolungansi i lati P E, E G sino al loro incontro in F, si ha in E B F P E un altro fuso, la cui superficie è analogamente alla prima, eguale ad $\frac{S \times E}{4 R}$, essendo E l'altro angolo sferico P E G. Per ultimo, prolungando i lati E G, P G, risulta che il triangolo sferico H F T essendo opposto al vertice col triangolo sferico E G P, epperciò al medesimo eguale, il triangolo E G P più il triangolo F T G facendo tanto quanto H F T + F T G, è dato di dire che il triangolo E G P + F T G è eguale al fuso H B G T H, la superficie del quale è espressa da $\frac{S \times G}{4 R}$. Ciò posto, se osservasi come il fuso P E T G P, più il fuso E G B F P E, più ancora il fuso H B G T H, formano assieme un'emisferica più due triangoli E G P, H F T eguali, scorgesi come possa essere stabilita l'eguaglianza seguente:

$$\frac{S}{2} + 2\, E G P = \frac{S}{4 R} (P + E + G)$$

da cui

$$2\, E G P = \frac{S (P + E + G)}{4 R} - \frac{S}{2}$$

e quindi

$$E G P = \frac{S (P + E + G)}{8 R} - \frac{S}{4} = \frac{S (P + E + G)}{8 R} - \frac{2 S R}{8 R}$$

e per ultimo

$$E G P = \frac{S (P + E + G - 2 R)}{8 R}$$

che corrisponde alla proporzione seguente:

$$E\,G\,P : S :: P + E + G - 2\,R : 8\,R$$

che attesta come *la superficie di un triangolo sferico sta a quella della sfera, come la somma dei tre angoli del triangolo diminuita di due angoli retti sta ad otto angoli retti.*

Il valore di $E\,G\,P = \frac{S\,(P + E + G - 2\,R)}{8\,R}$ dimostra come, ove facciasi $S = 8\,R$, diventi $E\,G\,P = P + E + G - 2\,R$, cosicchè se dividesi la superficie della sfera in otto parti eguali, e se ne prende una di queste parti, si avrà una superficie unità di misura, in base della quale sarà dato di potere avere la superficie di qualsiasi triangolo sferico coll'espressione più sopra trovata della somma dei tre angoli del triangolo diminuita di due angoli retti. Ora, la ottava parte di una sfera essendo il triangolo trirettangolo, così è appunto il triangolo trirettangolo l'unità di misura de' triangoli e poligoni sferici. Mentrechè *la superficie di un triangolo sferico è eguale a tanti triangoli trirettangoli quanto è la somma dei suoi tre angoli diminuita di due retti*, ogni poligono sferico essendo scomponibile in $n - 2$ triangoli sferici con piani passanti da un dato angolo, rendesi evidente come *la superficie di un poligono sferico ha per misura la somma dei suoi angoli sferici, diminuita di tante volte due angoli retti quanti sono i lati, meno due.* Cosicchè se s è la somma degli angoli sferici di un poligono sferico, n è il numero dei lati, si ha per valore della superficie di un poligono sferico

$$s - 2\,(n - 2) = s - 2\,n + 4.$$

L'espressione della superficie di un poligono sferico permette tosto di rinvenire una relazione che corre in un poliedro fra i suoi spigoli, le sue faccie ed i suoi vertici, e ciò pel brevissimo ragionamento che segue. Un poliedro qualunque esso sia, se lo si immagina collocato in una sfera, e poscia dal centro della medesima ai singoli vertici del poliedro fatti passare tanti raggi, essi in tal modo scompongono la superficie sferica in tanti poligoni sferici quante sono le faccie. Ora, la superficie della sfera essendo eguale ad 8 R, questi 8 R sono eguali alla somma di tutti i poligoni sferici in cui

è scomposta la superficie sferica; ma la superficie di un poligono sferico essendo eguale alla somma dei suoi angoli, diminuita di tante volte 2 R quanti sono i lati, meno due, è evidente che la somma di tutti gli angoli sferici di tutti i poligoni sferici, essendo eguale a tante volte quattro retti quanti sono i vertici, che sono in un eguale numero che nel poliedro, e quindi V essendo il numero dei vertici, 4 R V è la somma di tutti gli angoli sferici di tutti i poligoni sferici, una tale espressione diminuita dal prodotto di tante volte due retti quanti sono i lati dei singoli poligoni diminuiti di due per ciascuno, e quindi F essendo le faccie di un poliedro ed S il numero degli spigoli, è F il numero dei poligoni sferici, e 2 S la somma dei lati di tutti i poligoni, che deve essere diminuita di due per ciascuno, ossia di 2 F, sarà appunto 8 R. Dall'eguaglianza $8 R = 4 R V - 2 R (2 S - 2 F)$, con dividerla per R ricavando $4 V - 4 S + 4 F = 8$, e quindi $V - S + F = 2$, e per ultimo $V + F = S + 2$, si ha così l'espressione del teorema di Eulero, che enunciasi colla dicitura: ***Il numero dei vertici in un poliedro qualunque, sommato col numero delle faccie del medesimo, è eguale al numero degli spigoli accresciuto di due.***

Misura della sfera e sue parti. — La sfera essendo il solido che è intieramente terminato da una superficie sferica, ne segue che considerata la superficie sferica siccome generata dalla rivoluzione del perimetro di un semipoligono regolare attorno ad un diametro, può la sfera venire considerata siccome il solido intieramente terminato da una tale superficie, vale a dire, quella generata dalla rivoluzione di un semipoligono regolare attorno ad un diametro.

Ed in una tale considerazione è deduttibile il volume della sfera con conoscere l'espressione del volume del solido generato dalla rivoluzione di un semipoligono regolare. Essendo perciò A B C D E F G H (Fig. 31) un poligono regolare di un numero pari di lati, tale cioè che il diametro che lo divide per metà è diametro del circolo circoscritto, egli è evidente che il solido generato dalla rivoluzione di un semipoligono regolare come A B C D E, è eguale alla somma dei solidi generati da ciascuna delle singole parti in cui può venire scomposto. Ma se scomponesi il semipoligono mediante raggi condotti ai vertici come O B, O C, O D, scorgesi in allora come si tratti della somma dei solidi generati da diversi triangoli, i quali girano attorno ad una medesima retta, e come

dietro l'espressione conosciuta del volume del solido generato da un triangolo attorno ad un asse, abbiasi che il volume V del corpo generato dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero pari di lati è

$$V = \text{Sup.}\,A\,B \times \frac{O\,K'}{3} + \text{Sup.}\,B\,C \times \frac{O\,K}{3} + \text{Sup.}\,D\,C \times \frac{O\,K''}{3} + \text{Sup.}\,D\,E \times \frac{O\,K'''}{3}$$

ossia la somma di tanti prodotti aventi per fattori l'apotema ad un lato del semipoligono, per cui essendo $O\,K = O\,K' = O\,K'' = O\,K'''$ siccome apoteme di un medesimo poligono regolare, epperciò eguali, così è

$$V = \frac{O\,K}{3}\,(\text{Sup. } A\,B + \text{Sup. } B\,C + \text{Sup. } D\,C + \text{Sup. } D\,E)$$

e poichè la somma delle superficie comprese nella parentesi è la superficie totale generata dal perimetro del semipoligono, è dato di conchiudere come il volume del solido generato dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero pari di lati, è eguale al prodotto della superficie generata dal perimetro per il terzo dell' apotema.

Ora bene, considerata la sfera siccome generata dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, ne deriva che un tale semipoligono dovendo essere un semicircolo, e quindi tale che le apoteme sono eguali al raggio, e la superficie generata una superficie sferica, è dato di conchiudere come il volume della sfera sia eguale al prodotto della sua superficie per il terzo del suo raggio. Questa deduzione del volume di una sfera fatta nella considerazione che esso sia eguale a quello generato dalla rivoluzione di un semipoligono regolare di un numero infinito di lati, trova tuttavia la conferma in altre considerazioni.

Se prendesi ad esaminare il volume del solido generato dalla rivoluzione, di un semicircolo attorno ad un diametro, e quello generato da un semipoligono regolare nel medesimo inscritto, è dato di vedere che essendo il volume del primo quello di una sfera, il volume dell' ultimo eguale alla superficie generata dal perimetro per il terzo del raggio inscritto, il quale perimetro e raggio crescendo costantemente coll' avvicinarsi del semipoligono al semi-

circolo, ancora la superficie generata dal perimetro cresce ed a forziori cresce il volume dei solidi. Onde è dato di dire: *il volume di una sfera è maggiore del volume di qualsiasi solido generato dalla rivoluzione di un semipoligono inscritto nel semicircolo generatore della sfera.*

Medesimamente, se prendesi ad esaminare il volume del solido generato dalla rivoluzione di un semicircolo attorno ad un diametro, e quello di un semipoligono regolare al medesimo circoscritto, è dato di vedere che essendo il volume del primo quello di una sfera, il volume dell'ultimo eguale alla superficie generata dal perimetro per il terzo del raggio del circolo inscritto, che è costantemente il raggio del semicircolo generatore della sfera, questo perimetro diminuendo coll'avvicinarsi al semicircolo, ancora la superficie generata dal perimetro diminuisce, e con esso i volumi dei solidi. Onde è dato di dire *il volume di una sfera è minore del volume di qualsiasi solido generato dalla rivoluzione di un poligono regolare circoscritto al semicircolo generatore della sfera.*

Il volume di una sfera essendo maggiore del prodotto di due fattori, dei quali l'uno sia una superficie minore di quella della sfera di una quantità più piccola di qualsiasi quantità data, l'altro il terzo di una lunghezza minore pure di qualsiasi quantità data del raggio della sfera; ed essendo minore del prodotto di due fattori, dei quali l'uno sia una superficie maggiore di quella della sfera di una quantità più piccola di qualsiasi quantità data, l'altro il raggio della sfera, è evidentemente eguale al prodotto della superficie sferica per il terzo del suo raggio. D'altronde, ove si volesse supporre che il volume ad esempio, della sfera di raggio O F (Fig. 32), fosse eguale al prodotto del terzo del raggio per una superficie maggiore di quella della sfera, siccome che circoscrivendo al semicircolo generatore della sfera un semipoligono regolare A N I L B, i cui lati non abbiano ad incontrare il perimetro della figura generatrice della superficie supposta, si ha che il volume generato dalla rivoluzione di un tale semipoligono è maggiore di quella della sfera, e dovrebbe anche essere maggiore di quello prodotto dalla superficie supposta col terzo del raggio della sfera, ciò che è un assurdo, e per conseguenza il volume di una sfera non può essere eguale al prodotto del terzo del suo raggio per una superficie maggiore della propria. Parimenti, ove si volesse supporre che

il volume della medesima sfera fosse eguale al prodotto del terzo della misura del suo raggio per una superficie minore di quella della sfera, epperciò generata da un semicircolo di raggio minore di quello O F, siccome inscrivendo nel semicircolo di raggio O F un semipoligono D G F E C, i cui lati non abbiano a toccare il semicircolo supposto, si ha che il volume del solido generato da un tale semipoligono inscritto è minore di quello della sfera, così egli dovrebbe pure essere minore del solido generato dal semicircolo supposto, ma questo essendo evidentemente maggiore, così non può il volume di una sfera essere espresso dal prodotto del terzo del suo raggio per una superficie più piccola della propria.

Il volume di una sfera non potendo così essere prodotto dal terzo della misura del suo raggio per una superficie più grande o più piccola, così è dato conchiudere: *il volume di una sfera è eguale al prodotto della sua superficie pel terzo del suo raggio.* Ora, la superficie di una sfera essendo eguale al prodotto del diametro pella circonferenza massima, e la circonferenza massima essendo eguale al prodotto del diametro per π, oppure del raggio per 2π, così la superficie della sfera di raggio R è eguale a $4\pi R^2$ ed a πD^2, ed il volume

$$V = \frac{1}{3} R \times 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3,\ V = \frac{1}{6} D \times \pi D^2 = \frac{1}{6}\pi D^3$$

cioè a dire: *il volume di una sfera in funzione del suo raggio, è eguale ai quattro terzi del prodotto del cubo del raggio per il rapporto del diametro alla circonferenza; — il volume di una sfera in funzione del suo diametro è eguale ad un sesto del cubo del diametro moltiplicato per il rapporto del diametro alla circonferenza.*

La sfera essendo scomponibile in un numero infinito di piramidi sferiche eguali, è dato tosto di conchiudere come due piramidi sferiche sieno tra loro nel rapporto delle loro basi, e quindi 1.° *il volume di una piramide sferica è eguale al prodotto dell'area della sua base per il terzo del raggio della sfera a cui appartiene, ovvero dire del suo lato;* 2.° *il volume di uno spicchio sferico è eguale alla superficie della sua base moltiplicata pel terzo del raggio della sfera a cui appartiene.* E poichè $2R \times A$ è la superficie di un fuso sferico, il cui arco di circolo massimo che unisce i punti

di mezzo dei lati è A, ed il cui raggio è R, così è il volume di uno spicchio sferico espresso da $\frac{2}{3}R^2A$.

Per ogni punto della superficie di una sfera potendo condurre un piano tangente alla medesima, ed il quale piano è perpendicolare al raggio condotto al punto di contatto, ne risulta che il poliedro, come quello A B C D E F (Fig. 35), le cui faccie sono tangenti ad una sfera, e che perciò chiamasi *poliedro circoscritto alla sfera*, è scomponibile in tante piramidi A B E O, A B F O, B C E O, ecc., mediante diversi raggi condotti dal centro O ai singoli vertici del poliedro, aventi un'altezza eguale, ed eguale al raggio della sfera, e posciachè il volume di ciascuna è eguale al prodotto dell'area della propria base per il terzo della misura della propria altezza, e l'altezza è comune in tutte, così è il volume di un poliedro circoscritto ad una sfera, eguale al prodotto dell'area della sua superficie per il terzo della misura del raggio della sfera inscritta. E poichè il volume di una sfera è eguale al prodotto della sua superficie per il terzo della misura del suo raggio, così è dato di dire che una sfera ed un poliedro ad essa circoscritto, stanno tra loro nel rapporto delle loro superficie: e quindi quanto più una superficie poliedrica è prossima a coincidere colla superficie sferica, tanto più il volume del poliedro da quella determinato si approssimerà ad avere il volume della sfera.

Epperciò la sfera può con approssimazione maggiore di qualsiasi quantità data, essere scambiata con un poliedro circoscritto di un numero infinito di faccie, e in questo scambio mostrasi evidente l'espressione del volume della sfera dietro la conoscenza di quella della piramide. Il volume di una sfera è pari a quello di una piramide che abbia per base una superficie equivalente a quella sferica, ed un'altezza eguale al raggio della sfera.

Medesimamente, i vertici dei poligoni sferici in cui è scomponibile una superficie sferica, potendo essere vertici di superficie piane, ne risulta che il poliedro come quello G I H R L N, le cui faccie sono tali che tutti indistintamente i vertici sono collocati sulla superficie sferica, e che perciò chiamasi *poliedro inscritto nella sfera*, è scomponibile mediante raggi condotti dal centro della sfera ai singoli vertici del poliedro, in tante piramidi, le quali quanto più avranno le basi prossime alla superficie sferica, tanto più le altezze

delle medesime si approssimano ad avere una lunghezza eguale al raggio della sfera, cosicchè può dirsi essere la sfera il limite dei poliedri ad essa inscritti e circoscritti, e per conseguenza a ragione il suo volume eguale al prodotto dell'area della sua superficie per il terzo della misura del raggio.

Il settore sferico, sia che venga considerato come una piramide sferica di un numero infinito di lati, sia che venga considerato dietro la sua generazione e con ragionamento analogo a quello con cui venne dedotto il volume della sfera, si ha sempre che *il volume del settore sferico è eguale al prodotto dell'area della sua base, che è una calotta sferica, pel terzo del suo raggio.*

Cosicchè essendo R il raggio della sfera a cui appartiene un settore sferico, ed S la superficie della calotta, è il volume $V = S \times \frac{R}{3}$. Supponendo conosciuto pella valutazione del volume di un settore sferico il lato O D (Fig. 36), che è il raggio della sfera a cui appartiene, e la corda A D, siccome che questa è perpendicolare al raggio O F, che misura nella lunghezza S F l'altezza della calotta, cioè è perpendicolare al piano A B D E di base della calotta, così dal triangolo rettangolo O S D, ricavasi $O S = \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DS}^2}$, e quindi $S F = O D - \sqrt{\overline{OD}^2 - \overline{DS}^2}$. Dal valore di S F trovato e quello di S D dato, ricavasi essere la superficie della calotta eguale a $\pi \left(\overline{SD}^2 + \overline{SF}^2\right)$, e quindi il volume del settore $V = \frac{\pi\, O D}{3} \left(\overline{SD}^2 + \overline{SF}^2\right)$.

Il segmento sferico ad una sola base essendo la differenza fra un settore sferico ed un cono, scorgesi così come, chiamando con r il raggio di base del segmento e con h l'altezza del segmento, sia possibile rinvenire un'espressione propria del suo volume. Essendo diffatti $S D = r$, $S F = h$, vedesi come F D essendo corda nel circolo massimo della sfera a cui appartiene il segmento, è media proporzionale fra tutto il diametro e la sua proiezione, cioè è $\overline{FD}^2 = 2\, O D \times S F$, e poichè il triangolo F S D è rettangolo, così è $\overline{FD}^2 = r^2 + h^2$, e quindi $r^2 + h^2 = 2\, O D \times h$, da cui $O D = \frac{r^2 + h^2}{2h}$. Ora, calcolando il volume del settore, si trova che esso è

eguale alla superficie della calotta, cioè $\pi(h^2 + r^2)$, che moltiplica per il terzo del raggio, ossia di O D, onde il volume del settore eguale a

$$\pi(h^2 + r^2) \times \frac{1}{3} \times \frac{r^2 + h^2}{2h} =$$

$$\frac{\pi h^2 r^2 + \pi h^4 + \pi r^4 + \pi r^2 h^2}{6h} = \frac{2\pi r^2 h^2 + \pi h^4 + \pi r^4}{6h}.$$

Calcolando il volume del cono, si ricava che esso è eguale all'area della sua base, cioè a πr^2 per il terzo dell'altezza O S, ma O S è eguale al raggio meno h, per cui è il volume del cono eguale a

$$\pi r^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{r^2 + h^2}{2h} - h\right) = \frac{\pi r^4 + \pi r^2 h^2}{6h}.$$

E per ultimo, facendo la differenza fra il volume del settore sferico e del cono, ricavasi

$$\frac{2\pi r^2 h^2 + \pi h^4 + \pi r^4}{6h} - \frac{\pi r^4 + \pi r^2 h^2}{6h}$$

eguale al volume del segmento sferico a una base.

I due termini di quest'eguaglianza trovata, avendo il medesimo denominatore, è effettuabile la riduzione, e quindi ricavasi

$$V = \frac{\pi r^2 h^2 + \pi h^4}{6h} = \frac{3\pi r^2 h}{6} + \frac{\pi h^3}{6}$$

ovvero ancora

$$V = \frac{1}{2}\pi r^2 h + \frac{1}{6}\pi h^3$$

ossia *il volume di un segmento sferico ad una sola base è eguale alla metà del volume di un cilindro di eguale base ed eguale altezza, più il volume di una sfera di diametro eguale all'altezza.*

Se per ultimo prendesi a ricercare il volume del segmento sferico a due basi, è dato di vedere come egli è il risultato della

differenza di due segmenti sferici ad una sola base, e per il segmento sferico a basi parallele come quello rappresentato alla Fig. 36, il solido generato dalla rotazione della figura G U C L attorno di C U, vale a dire la somma dei solidi generati, l'uno dalla rotazione del trapezio L C U G, che è un tronco di cono, l'altro quello generato dal segmento circolare G L K. Ora bene, come è visibile, il solido generato del segmento circolare G L K è la differenza fra il solido generato da un settore circolare e un triangolo.

Il volume del solido generato dal settore circolare essendo espresso dal prodotto della superficie generata dall' arco per il terzo del raggio, e la superficie generata dall' arco essendo eguale al prodotto della circonferenza massima per la sua proiezione sul diametro, così è il volume del solido generato dal settore circolare eguale a

$$2\pi\, OG \times CU \times \frac{GO}{3} = \frac{2}{3}\pi\, \overline{OG}^2 . CU.$$

Il volume del solido generato dal triangolo essendo eguale al prodotto della superficie generata dal lato G L per il terzo della perpendicolare O K, e la superficie generata dal lato G L essendo eguale alla circonferenza di un circolo di raggio O K moltiplicata per la sua proiezione sul diametro, cioè eguale a $2\pi\, OK \times CU \times \frac{OK}{3} = \frac{2}{3}\pi\, \overline{OK}^2 . CU$; ne avviene che il volume del solido generato dal segmento circolare G L K è eguale a

$$\frac{2}{3}\pi\, \overline{OG}^2 . CU - \frac{2}{3}\pi\, \overline{OK}^2 . CU = \frac{2}{3}\pi\, CU \left(\overline{OG}^2 - \overline{OK}^2\right)$$

e poichè il triangolo G K O è rettangolo, così è $\overline{OG}^2 - \overline{OK}^2 = \overline{GK}^2$, e poichè $GK = \frac{GL}{2}$ e $\overline{GK}^2 = \frac{\overline{GL}^2}{4}$, così è il volume del solido generato dal segmento circolare

$$GLK = \frac{2}{3}\pi . CU \times \frac{\overline{GL}^2}{4} = \frac{1}{6}\pi\, CU \times \overline{GL}^2.$$

In questa espressione osservando che il volume di una sfera di diametro G L è espresso da $\frac{1}{6}\pi \overline{GL}^3$, scorgesi come il volume di una sfera stia al volume del solido generato da un segmento circolare come G L K nel rapporto di G L a C U.

Il volume del segmento sferico a due basi parallele essendo la somma del volume di un tronco di cono e del solido generato da un segmento circolare, si ha che chiamando con V il volume del segmento sferico a due basi generato dalla rivoluzione del semisegmento circolare a due basi G U C L, si ricava

$$V = \frac{CU}{3}\left(\pi \overline{UG}^2 + \pi \overline{CL}^2 + \pi\, UG \times CL\right) + \frac{1}{6}\pi \overline{GL}^2 . CU$$

e quindi

$$V = \frac{1}{6}\pi\, CU\left(2\,\overline{UG}^2 + 2\,\overline{CL}^2 + 2\,UG \times CL + \overline{GL}^2\right).$$

Se però osservasi che nel piano generatore abbassando da L la perpendicolare L H su di U G, si ha in G H L un triangolo rettangolo, dal quale ricavasi $\overline{GL}^2 = \overline{LH}^2 + \overline{GH}^2$, e poichè L H = C U, $\overline{LH}^2 = \overline{CU}^2$, ed inoltre G H = U G — C L, $\overline{GH}^2 = \overline{UG}^2 - 2\,UG \times CL + \overline{CL}^2$, così ricavasi

$$\overline{GL}^2 = \overline{CU}^2 + \overline{UG}^2 - 2\,UG \times CL + \overline{CL}^2$$

che debitamente sostituito nel valore di V, si ha

$$V = \frac{1}{6}\pi\, CU\left(2\overline{UG}^2 + 2\overline{CL}^2 + 2\,UG \times CL + \overline{CU}^2 + \overline{UG}^2 - 2\,UG \times CL + \overline{CL}^2\right)$$

e dietro riduzione

$$V = \frac{1}{6}\pi\, CU\left(3\,\overline{UG}^2 + 3\,\overline{CL}^2 + \overline{CU}^2\right)$$

che può venire messa sotto la forma

$$V = \frac{1}{6} \pi \, C\,U \left(3\,\overline{UG}^2 + 3\,\overline{CL}^2\right) + \frac{1}{6} \pi \, \overline{CU}^3$$

ovvero

$$V = C\,U \left(\frac{\pi \, \overline{UG}^2 + \pi \, \overline{CL}^2}{2}\right) + \frac{1}{6} \pi \, \overline{CU}^3$$

la quale ultima espressione dinota come *il volume di un segmento sferico a due basi parallele è eguale alla semisomma dell' area delle basi moltiplicata per l'altezza, più il volume di una sfera di diametro eguale all'altezza del segmento.* Cosicchè R ed r essendo i raggi delle due basi di un segmento sferico a due basi parallele di altezza H, è

$$V = H\left(\frac{\pi R^2 + \pi r^2}{2}\right) + \frac{1}{6} \pi \, H^3$$

la quale formola è del tutto analoga a quella rinvenuta pel volume del segmento sferico ad una sola base, perchè infatti se si fa che una delle basi del segmento sferico a due basi sia zero, si ottiene l' espressione suddetta del volume del segmento sferico ad una sola base.

Eguaglianza delle sfere. — Dalla definizione stessa stata data della sfera è dato di vedere come *due o più sfere sono eguali, se eguali hanno o il raggio o il diametro, oppure eguale la superficie, oppure eguale il volume.*

Medesimamente dalla definizione delle diverse parti in cui è scomponibile una sfera, è dato di vedere come: 1.° *Due o più piramidi sferiche sono eguali, se eguali hanno il lato e la figura di base.* 2.° *Due o più spicchi sferici sono eguali, se eguali hanno il fuso.* 3.° *Due o più segmenti sferici sono eguali, se eguali hanno la calotta o zona che li determina.* 4.° infine *due o più settori sferici sono eguali, se eguali hanno il lato e la superficie di base.*

Similitudine sferica. — Due o più sfere o parti di sfere sono simili, se hanno eguali gli elementi angolari, e proporzionali gli elementi lineari, superficiali e cubici, che concorrono alla loro de-

terminazione. Ma poichè le sfere sono determinate da un solo elemento, così *tutte le sfere sono simili tra loro.*

Gli spicchi sferici essendo determinati dalla sfera a cui appartengono e dall'angolo delle due faccie piane, così *due o più spicchi sferici sono simili, se hanno eguale l'angolo formato dalle faccie piane.* Medesimamente *due o più settori sferici sono simili, se originati da settori circolari simili;* infine *due o più segmenti sferici sono simili, se simili hanno le superficie sferiche che le determinano.*

La superficie di una sfera essendo espressa da $4\pi R^2$, è evidente come *le superficie delle sfere stanno tra loro come i quadrati dei rispettivi raggi.* E *come i quadrati dei raggi o linee omologhe, stanno tra loro le calotte simili, le zone simili, i fusi simili, i poligoni sferici simili*, come è facile il dedurlo dalle espressioni stesse delle loro superficie.

Il volume di una sfera essendo espresso sia da $\frac{4}{3}\pi R^3$, che da $\frac{1}{6}\pi D^3$, scorgesi tosto come *i volumi delle sfere stanno tra loro come i cubi dei rispettivi raggi o diametri.*

Medesimamente, a seguito delle espressioni stesse dei volumi delle parti di sfera, è dato di rilevare come, *i segmenti sferici simili, gli spicchi sferici simili, i settori sferici simili, le piramidi sferiche simili, stanno tra loro come i cubi delle lunghezze omologhe, e quindi come i cubi dei raggi delle sfere alle quali appartengono.*

QUA

DELLE FORMOLE CONTE

VALORI SUPERFICIE

CILINDRO

CILINDRO		Zona cilindrica retta	TRONCO DI CILINDRO	
Retto circolare	Obliquo		Retto	Obliquo
R = raggio di base L = lato del cilindro	P_2 = perimetro sezione retta L = lato	P = perimetro base L = lato	A = asse P = perimetro base	A = asse P_2 = perimetro sezione retta
$s = 2\pi R L$ $S = 2\pi R (L + R)$	$s = P_2 \times L$	$S = P \times L$	$s = P \times A$	$s = P_2 \times A$

CONO

Cono retto circolare	Zona conica retta	Tronco di cono retto circolare a basi parallele
R = raggio di base L = lato	A = arco di base L = lato del cono	R, r = raggi delle basi L = lato del tronco
$s = \pi R L$ $S = \pi R (L + R)$	$S = \frac{1}{2} A L$	$s = \pi L (R + r)$

SFERA

Sfera	Fuso sferico	Calotta sferica	Zona sferica a basi parallele	Poligono sferico
R = raggio D = diametro	A = arco R = raggio sfera	H = altezza R = raggio sfera C = semicorda	H = altezza R = raggio sfera	R = raggio sfera n = numero lati P = somma angoli
$S = 4\pi R^2$ $S = \pi D^2$	$S = 2 R . A$	$S = 2\pi R H$ $S = \pi (C^2 + H^2)$	$S = 2\pi R H$	$S = \frac{\pi R^2}{2} [P - 2R(n - 2)]$

NB. s = superficie laterale,

D R O

NUTE NEL LIBRO SESTO

VALORI VOLUMI

CILINDRO

CILINDRO			Settori e segmenti cilindrici	TRONCHI DI CILINDRO	
Qualsiasi	Retto circolare	Obliquo		Retto	Obliquo
B = area di base H = altezza	L = lato R = raggio di base	A = asse S_2 = area sezione retta	B = area di base H = altezza cilindro	B = area di base A = asse	S_2 = area sezione retta A = asse
$V = B \times H$	$V = \pi R^2 L$	$V = A \times S_2$	$V = B \times H$	$V = B \times H$	$V = S_2 \times A$

CONO

CONO		Settori e segmenti conici	Tronco di cono a basi parallele
Qualsiasi	Circolare		
B = base H = altezza	R = raggio di base H = altezza	B = area di base H = altezza	B, b = area delle basi H = altezza del tronco
$V = B \times \frac{H}{3}$	$V = \pi R^2 \times \frac{H}{3}$	$V = B \times \frac{H}{3}$	$V = \frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b})$

SFERA

Sfera	Spicchio	Settore	SEGMENTI	
			Ad una base	A due basi
R = raggio D = diametro	R = raggio A = arco	B = calotta R = raggio sfera	R = raggio di base H = altezza	R, r = raggi di base H = altezza
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ $V = \frac{1}{6}\pi D^3$	$V = \frac{2}{3} R^2 A$	$V = B \times \frac{R}{3}$	$V = \frac{\pi R^2 H}{2} + \frac{1}{6}\pi H^3$	$V = H\left(\frac{\pi R^2 + \pi r^2}{2}\right) + \frac{1}{6}\pi H^3$

S = superficie totale, V = volume.

PROBLEMI.

1.° — *Trovare il rapporto corrente tra la superficie di una sfera e quelle del cilindro equilatero inscritto e circoscritto alla medesima, ed il rapporto corrente fra i loro volumi.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 1).

Risoluzione. — Il cilindro equilatero essendo quello che retto e circolare, ha il diametro di base che eguaglia la sua altezza o lato, ne deriva che, fatta una sezione la quale passi per l'asse E F del cilindro circoscritto ad una sfera, la figura di sezione risulta un quadrato A B C D, nel quale trovasi inscritto un circolo, ch'è un circolo massimo della sfera, e nel quale circolo è inscritto altro quadrato I H G K, ch'è la figura di sezione del piano condotto col cilindro inscritto. Ora bene, per il calcolo della superficie e del volume di una sfera bastando la conoscenza del solo raggio, egli giova con esso dedurre gli elementi necessari pel calcolo tanto della superficie quanto del volume dei due cilindri; ma questi elementi riducendosi al lato od ai diametri di base, rendesi evidente come essi sieno lati di quadrati inscritti e circoscritti ad un circolo massimo della sfera, per cui R essendo il raggio della sfera, $2\,R$ è il lato del cilindro equilatero circoscritto, $R\sqrt{2}$ il lato del cilindro equilatero inscritto. E quindi la superficie S di una sfera di raggio R, essendo eguale a $4\,\pi\,R^2$, quella S′ di un cilindro equilatero circoscritto essendo eguale a $(2\,R + R)\,2\,\pi\,R = 6\,\pi\,R^2$, quella s del cilindro equilatero inscritto eguale a $\pi\,R\sqrt{2}\left(R\sqrt{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2}\right) = 3\,\pi\,R^2$, vedesi immediatamente come essendo $S : S' : s :: 4\,\pi\,R^2 : 6\,\pi\,R^2 : 3\,\pi\,R^2$, e quindi $S : S' : s :: 4 : 6 : 3$, la superficie di una sfera sta a quelle dei cilindri equilateri circoscritto ed inscritto,

nel rapporto dei tre numeri $4:6:3$; ossia la superficie del cilindro equilatero circoscritto è doppia di quella del cilindro equilatero inscritto, ed è i $\frac{2}{3}$ di quella della sfera.

Il volume poi V della sfera di raggio R, essendo eguale a $\frac{4}{3}\pi R^3$, quello V' del cilindro equilatero circoscritto essendo eguale a $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$, quello v del cilindro equilatero inscritto essendo eguale a $R\sqrt{2} \times \pi \frac{R^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^3 \sqrt{2}$, scorgesi essere

$$V : V' : v :: \frac{4}{3}\pi R^3 : 2\pi R^3 : \frac{1}{2}\pi R^3 \sqrt{2}$$

e quindi

$$V : V' : v :: \frac{4}{3} : 2 : \frac{1}{2}\sqrt{2} :: 8 : 12 : 3\sqrt{2}$$

cioè il volume di una sfera sta a quelli dei cilindri circoscritto ed inscritto, come il numero otto, sta al numero dodici, sta al numero tre moltiplicato pella radice quadrata del numero due.

Dal rapporto corrente fra i volumi dei tre corpi considerati, avendosi che la sfera sta al cilindro circoscritto come il numero otto sta al numero dodici, o ciò che torna lo stesso, come il numero quattro sta al numero sei, si ha occasione di vedere, come appunto è detto nella teoria, che i volumi dei poliedri circoscritti ad una medesima sfera sono tra loro nel medesimo rapporto delle loro superficie.

2.° — *Trovare il rapporto corrente tra la superficie di una sfera e quelle del cono equilatero circoscritto ed inscritto alla medesima, ed il rapporto corrente fra i loro volumi.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 2).

Risoluzione. — Il cono equilatero essendo quello che retto e circolare, ha il diametro della base eguale al lato, ne deriva che se per l'asse di un cono equilatero circoscritto ad una sfera, si con-

duce un piano, questo darà nella figura di sezione A B C un triangolo equilatero, nel quale è inscritto un circolo ch'è un circolo massimo della sfera, e nel quale circolo è inscritto un triangolo equilatero D E F, che è la sezione del piano condotto col cono equilatero inscritto.

Da una tale sezione scorgesi come R essendo il raggio della sfera, è il lato del cono circoscritto, il lato di un triangolo equilatero circoscritto ad un circolo, e quindi eguale a $\frac{6\,R}{\sqrt{3}}$, e l'altezza del medesimo eguale a 3 R; ed è il lato del cono equilatero inscritto, il lato di un triangolo equilatero inscritto in un circolo, e quindi eguale a $R\sqrt{3}$, e l'altezza del medesimo eguale a $\frac{3}{2}$ R. La superficie S della sfera, mentre è perciò eguale a $4\,\pi\,R^2$, la superficie S' del cono equilatero circoscritto eguale a

$$\frac{\pi\,6\,R}{\sqrt{3}} \times \left(\frac{6\ R}{2\sqrt{3}} + \frac{6\ R}{4\sqrt{3}}\right) = 9\,\pi\,R^2$$

la superficie *s* del cono equilatero inscritto eguale a

$$\pi\,R\sqrt{3}\left(\frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{9}{4}\,\pi\,R^2.$$

Le superficie dei tre corpi proposti stanno quindi tra loro nel rapporto di $4\,\pi\,R^2$ a $9\,\pi\,R^2$ a $\frac{9}{4}\,\pi\,R^2$, cioè è

$$S : S' : s :: 4 : 9 : \frac{9}{4} :: 16 : 36 : 9.$$

Il rapporto corrente fra la superficie di una sfera e quelle dei coni equilateri circoscritto ed inscritto alla medesima, è quindi eguale a quello corrente fra i tre numeri 16, 36, 9.

Venendo al volume, si ha che quello V della sfera è eguale a $\frac{4}{3}\,\pi\,R^3$, quello V' del cono equilatero circoscritto eguale a $3\,\pi\,R^2 \times$

$R = 3\,\pi\,R^3$, quello v del cono equilatero inscritto eguale a $\frac{3}{4}\,\pi\,R^2 \times \frac{R}{2} = \frac{3}{8}\,\pi\,R^3$, onde

$$V : V' : v :: \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 : 3\,\pi\,R^3 : \frac{3}{8}\,\pi\,R^3 :: \frac{4}{3} : 3 : \frac{3}{8} :: 32 : 72 : 9$$

cioè il volume di una sfera sta a quelli del cono equilatero circoscritto ed inscritto, nel rapporto dei tre numeri 32, 72, 9.

Ancora in questo rapporto è dato di vedere come il volume della sfera sia a quello del cono equilatero circoscritto come il numero quattro al numero nove, cioè nel rapporto stesso della superficie dei due corpi.

Osservazione. — Dal problema precedente avendo che il volume di una sfera sta a quello del cilindro circoscritto come $4 : 6$, e da quello ora risolto avendo che il volume di una sfera sta a quello del cono equilatero circoscritto come $4 : 9$, è dato di vedere come il volume di una sfera sta a quello del cilindro equilatero circoscritto, sta a quello del cono equilatero circoscritto come i numeri $4 : 6 : 9$, dai quali, come è evidente, è dato dire essere il volume e la superficie di un cilindro equilatero circoscritto ad una sfera medio proporzionale fra il volume e la superficie di una sfera e di un cono equilatero circoscritto.

Medesimamente, dal problema precedente avendo che il volume di una sfera sta a quello del cilindro inscritto come $\frac{4}{3} : \frac{1}{2}\sqrt{2}$, e da quello ora risolto avendo che il volume di una sfera sta a quello del cono equilatero inscritto come $\frac{4}{3} : \frac{3}{8}$, è dato di vedere come il volume di una sfera sta a quello del cilindro equilatero inscritto, sta a quello del cono equilatero inscritto come $\frac{4}{3} : \frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{3}{8}$, dai quali, come è evidente, è dato di dire essere il volume del cilindro equilatero inscritto medio proporzionale tra il volume di una sfera e quello di un cono equilatero inscritto.

3.° — *Calcolare il volume di una sfera circoscritta ad un cubo, di cui è dato il lato.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 3).

Risoluzione. — Il volume di una sfera calcolandosi colla conoscenza del raggio e coll' impiego della nota formola $\frac{4}{3}\pi R^3$, il quesito del calcolo del volume di una sfera circoscritta ad un cubo è quindi condotto anzitutto alla determinazione del raggio della sfera circoscritta ad un cubo. Essendo perciò A B G H D C E F un cubo, poichè è noto che le diagonali del medesimo sono eguali e si incontrano in un solo punto collocato sulla metà di ciascuna di esse, così è dato ben tosto di vedere come il punto O d' incontro delle diverse diagonali del cubo è il centro dalla sfera circoscritta al cubo, e quindi come la metà di una diagonale qualsiasi del cubo sia raggio della sfera. Ma la diagonale di un cubo essendo eguale al prodotto del suo lato pella radice quadrata del numero tre, così ne deriva che L essendo il lato del cubo dato, $L\sqrt{3}$ è il diametro della sfera circoscritta, ed $\frac{1}{2}\pi L^3\sqrt{3}$ è il volume.

Osservazione. — Il volume del cubo dato essendo L^3, è facile lo scorgere come il volume del cubo sta a quello della sfera circoscritta come il numero 1 sta al numero $\frac{1}{2}\pi\sqrt{3}$.

Essendo L il lato di un cubo inscritto in una sfera, il raggio della quale è $\frac{L\sqrt{3}}{2}$, è dato di vedere come essendo R il raggio di una sfera, è $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ il lato del cubo inscritto.

4.° — *Calcolare il raggio della sfera circoscritta ad un tetraedro regolare.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 4).

Risoluzione. — Il tetraedro regolare essendo un poliedro avente quattro vertici, il calcolo del raggio della sfera circoscritta al me-

desimo è il calcolo di una lunghezza O A = O B = O C = O D, cioè della distanza dal luogo geometrico dei punti equidistanti da quattro punti nello spazio, ad uno qualunque di questi quattro punti. Per ciò, le faccie del tetraedro regolare essendo triangoli equilateri, e l'altezza del tetraedro essendo il luogo geometrico dei punti equidistanti dai vertici della base, ne segue che l'intersezione di due diverse altezze condotte in un tetraedro è il centro della sfera circoscritta. Ma due di queste altezze eguali essendo altezze di un triangolo isoscele, avente per base il lato del tetraedro e per altri lati una lunghezza eguale all'altezza di una delle faccie, cioè tale che se L è il lato del tetraedro, $\frac{1}{2} L \sqrt{3}$ è il valore di uno di questi lati, così ricavasi che l'intersezione delle due altezze eguali in esso conduttibili avvenendo ad $\frac{1}{3}$ a partire dalla base ed ai $\frac{2}{3}$ a partire dal vertice, l'altezza del tetraedro regolare essendo espressa da $\frac{1}{3} L \sqrt{6}$, è il raggio della sfera circoscritta eguale a $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} L \sqrt{6} = \frac{2}{9} L \sqrt{6}$.

Osservazione. — Il raggio di una sfera circoscritta ad un tetraedro regolare di lato L essendo eguale a $\frac{2}{9} L \sqrt{6}$, si avrà che R essendo il raggio di una sfera, è il lato del tetraedro regolare in essa inscritto eguale a $\frac{9 R}{2\sqrt{6}}$.

Il volume di un tetraedro regolare essendo espresso da $\frac{1}{12} L^3 \sqrt{2}$, e quello della sfera circoscritta da $\frac{4}{3} \pi \left(\frac{2}{9} L \sqrt{6}\right)^3 = \frac{64}{729} L^3 \sqrt{6}$, è dato di dire come i volumi dei due solidi sono nel rapporto di $\frac{1}{12} \sqrt{2} : \frac{64}{729} \sqrt{6}$, ovvero come $\frac{1}{4} \sqrt{2} : \frac{64}{243} \sqrt{6}$.

5.° — *Calcolare il volume di due ottaedri regolari, l'uno inscritto, l'altro circoscritto ad una medesima e data sfera.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 5).

Risoluzione. — Il volume di un ottaedro regolare essendo calcolabile colla conoscenza del suo lato e della formola $\frac{1}{3} L^3 \sqrt{2}$ (pag. 476), ne deriva che dato il raggio di una sfera, onde potere calcolare il volume dei due ottaedri desiderati, è duopo anzitutto calcolare il lato in funzione del raggio della sfera. Per ciò, se osservasi che fatta una sezione A F C E, la quale passi per quattro vertici di un ottaedro regolare circoscritto ad una sfera, la figura risultante è un quadrato, nel quale è inscritto un circolo che è un circolo massimo della sfera inscritta, e nel qual circolo è inscritto altro quadrato K L G H, ch' è la sezione coll'ottaedro inscritto nella sfera, è dato di vedere come essendo R il raggio di una sfera, $2\,R$ è il lato dell'ottaedro circoscritto, $R\sqrt{2}$ è il lato dell'ottaedro inscritto.

Il volume quindi dell'ottaedro circoscritto è eguale a $\frac{1}{3}(2\,R)^3 \sqrt{2} = \frac{8}{3} R^3 \sqrt{2}$, e quello dell'ottaedro inscritto eguale a $\frac{1}{3}(R\sqrt{2})^3 \sqrt{2} = \frac{4}{3} R^3$.

Osservazione. — Il volume della sfera essendo eguale a $\frac{4}{3} \pi R^3$, è dato di vedere come il volume di una sfera sta a quello dell'ottaedro circoscritto e dell'ottaedro inscritto come $\frac{4}{3} \pi R^3 : \frac{8}{3} R^3 \sqrt{2} : \frac{4}{3} R^3$, ovvero come $\frac{4}{3} \pi : \frac{8}{3} \sqrt{2} : \frac{4}{3} :: 4\,\pi : 8\sqrt{2} : 4 :: \pi : 2\sqrt{2} : 1$, cioè nel rapporto di π a $2\sqrt{2}$ all'unità.

E poichè i volumi della sfera e dell' ottaedro circoscritto sono proporzionali a quelli delle loro superficie, così la superficie di una sfera sta a quella dell'ottaedro circoscritto come $\pi : 2\sqrt{2}$.

6.° — *Calcolare il volume di un cilindro equilatero inscritto in un dato cono retto circolare.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 6).

Risoluzione. — Il cilindro che è inscritto in un cono, avendo una sua base collocata sulla base del cono, è evidente che condotto un piano pell' asse C H di un cono, questo piano darà nel triangolo A B C di sezione, inscritto un quadrato D E G F, in cui E G = D E è il lato e il diametro di base del cilindro, del quale è proposto il calcolo del volume. Importa quindi colla conoscenza del raggio H B di base e dell' altezza H C del cono, il calcolare dapprima il lato del quadrato inscritto nel triangolo di sezione A B C, affine di poterne calcolare il volume del cilindro equilatero inscritto in quel cono. Ma se osservasi che D E è parallelo ad A B, e conseguentemente che i triangoli A B C, D E C sono simili, e che quindi è dato di stabilire la proporzione A B : H C :: D E : C P, nella quale per essere C P = C H — P H, ovvero C P = C H — D E, convertesi nell' altra A B : H C :: D E : H C — D E, che composta dà A B + H C : A B :: H C : D E dalla quale D E = $\frac{AB \times HC}{AB + HC}$, scorgesi come il volume del cilindro equilatero inscritto in un cono retto circolare sia eguale ad

$$\frac{AB \times HC}{AB + HC} \times \pi \left(\frac{AB \times HC}{2AB + 2HC}\right)^2 = \frac{\pi \,.\, \overline{AB}^3 \,.\, \overline{HC}^3}{4 \,.\, (AB + HC)^3}$$

cioè al quarto del quoziente che si ottiene dal prodotto del rapporto del diametro alla circonferenza di un circolo per il prodotto dei cubi del diametro di base e dell' altezza, diviso per il cubo della somma dell'altezza col diametro di base del cono.

7.° — *Calcolare il raggio della sfera inscritta in un dato cono retto circolare.*

(Vedi Tav. XLII, Fig. 7).

Risoluzione. — Il piano A B C passante per l' asse C G del cono circoscritto ad una sfera, dando nella figura di sezione un

triangolo, nel quale è inscritto un circolo che è un circolo massimo della sfera, risulta evidente come il calcolo del raggio di una sfera inscritta in un cono è condotto al calcolo del raggio di un circolo inscritto in un dato triangolo. Ma il raggio di un circolo inscritto in un triangolo essendo eguale a $\frac{2\,S}{a+b+c}$ (pag. 355), così si ha che $O\,G = \frac{A\,B \times C\,G}{A\,B + 2\,B\,C}$.

La sfera che è inscritta in un cono, essendo tangente alla superficie conica secondo un suo circolo minore, ne deriva che sarà dato di potere tracciare sulla superficie conica una tale linea di tangenza colla conoscenza della distanza dal vertice di un punto qualunque della medesima.

Ma poichè se nel piano A B C dal centro della sfera si abbassa una perpendicolare O T, si ha in T il punto di contatto della sfera col lato C B del cono, è dato di vedere come a motivo della similitudine dei due triangoli G B C, O T C siccome aventi un angolo comune in C ed amendue rettangoli, sia possibile la proporzione G B : C G :: O T : C T, dalla quale $C\,T = \frac{C\,G \times O\,T}{G\,B}$.

Osservazione. — Questo problema traccia il mezzo di potere conoscere la linea di contatto di una data sfera introdotta in un dato cono, perchè diffatti potrà sempre stabilirsi la suddetta proporzione e da essa ricavarsi tanto il valore di C T quanto quello di O C che segna la distanza dal centro della sfera al vertice del cono.

8.° — *Dividere un tronco di cono a basi parallele in due parti equivalenti, mediante un piano parallelo alle basi.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 8).

Risoluzione. — Sia A B N M il tronco di cono dato proposto alla divisione.

Si immagini prolungata la superficie conica del tronco sino alla sua origine in C, poscia per questo vertice facciasi passare un piano A C B che sia perpendicolare alla base, il quale darà nella sezione un triangolo che conterrà l'altezza del cono, ed interse

cherà la base superiore del tronco secondo una retta M N parallela alla A B d'intersezione col piano della base inferiore. I triangoli A B C, M N C che così risulteranno essendo simili, danno luogo alla proporzione $AB : MN :: CF + FD : CF$, che divisa dà $AB - MN : MN :: FD : CF$, e dalla quale ricavasi $CF = \frac{FD \times MN}{AB - MN}$.

Conosciuta così l'altezza del cono M N C in funzione degli elementi proprii del tronco, è data la possibilità del computo del volume del cono M N C, nonchè di quello A B C, e quindi coll'aggiungere al volume del cono M N C la metà del volume del tronco di cono, di avere il volume del cono P Q C, la cui altezza è possibile di ottenere colla relazione fra i volumi ed i lati omologhi dei coni simili. Si ha diffatti possibile la proporzione

$$\text{Volume } CAB : \text{Volume } CPQ :: \overline{CD}^3 : \overline{CE}^3$$

dalla quale ricavare

$$\overline{CE}^3 = \frac{\overline{CD}^3 \times CPQ}{CAB}$$

e quindi

$$CE = CD \sqrt[3]{\frac{CPQ}{CAB}}.$$

Conosciuto C E, basta da esso sottrarvi C D per avere E D, che è l'altezza alla quale deve essere condotto il piano parallelo alle basi, affinchè esso scomponga il tronco di cono dato in due parti equivalenti in volume.

Osservazione. — I coni simili stando tra loro come i cubi non solo delle loro altezze, ma altresì come i cubi dei raggi delle loro basi, così scorgesi la possibilità dell'esistenza ad esempio delle proporzioni

$$\text{Cono } ABC : \text{Cono } MNC :: \overline{DB}^3 : \overline{FN}^3$$

$$\text{Cono } ABC : \text{Cono } PQC :: \overline{DB}^3 : \overline{EQ}^3$$

amendue le quali divise danno:

$$\text{Tronco } A\,B\,M\,N : \text{Cono } A\,B\,C :: \overline{D\,B}^3 - \overline{F\,N}^3 : \overline{D\,B}^3$$

$$\text{Tronco } A\,B\,Q\,P : \text{Cono } A\,B\,C :: \overline{D\,B}^3 - \overline{E\,Q}^3 : \overline{D\,B}^3$$

e nelle quali per essere eguali i conseguenti, formano gli antecedenti proporzione, e si ha

$$\text{Tronco } A\,B\,M\,N : \text{Tronco } A\,B\,Q\,P :: \overline{D\,B}^3 - \overline{F\,N}^3 : \overline{D\,B}^3 - \overline{E\,Q}^3.$$

E poichè la medesima conseguenza si ottiene per due qualunque dei tre tronchi che si considerino, così *è un tronco di cono a basi parallele diviso da un piano parallelo alle basi in due altri tronchi, due qualunque dei quali tre tronchi stanno tra loro come la differenza dei cubi dei raggi delle loro basi.* Da questa relazione è dato evidentemente di vedere, per la risoluzione del proposto quesito, come possa anche farsi a meno del calcolo del cono intiero, poichè è con essa deduttibile il valore del raggio della sezione, ed in seguito colla risoluzione di un semplice quesito di geometria piana, calcolabile il valore di quelle altre linee che possono essere desiderate, come sarebbe l'altezza dei nuovi tronchi, oppure il punto sulla superficie conica pel quale passa il piano.

9.° — *Calcolare l'altezza di una zona sferica in cui la base maggiore è una circonferenza massima di sfera data, la base minore una circonferenza di un circolo equivalente alla zona sferica medesima.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 9).

Risoluzione. — Sia A B D F una zona sferica, della quale se ne debba calcolare l'altezza C E, sapendo essere C B il raggio della sfera data a cui la zona appartiene, e sapendo essere la superficie del circolo di raggio E F equivalente colla superficie della zona.

La superficie di una zona essendo eguale al prodotto della circonferenza massima della sfera a cui appartiene, per la sua altezza,

ne deriva che la superficie della zona proposta è espressa da $2 . \pi . CB . CE$; e poichè questa è equivalente con quella del circolo di raggio E F, risulta immediatamente l'eguaglianza

$$2 \pi CB . CE = \pi \overline{EF}^2$$

nella quale se entrano due incognite C E, E F, l'ultima però essendo cateto di un triangolo rettangolo C E F, nel quale l'ipotenusa C F è eguale a C B siccome raggi della medesima sfera, e nel quale l'altro cateto C E è l'altezza della zona, scorgesi essere $EF = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CE}^2}$, e la suddetta eguaglianza convertirsi nell'altra

$$2 \pi CB . CE = \pi (\overline{CB}^2 - \overline{CE}^2)$$

in cui non è contenuta che una sola incognita, e dalla quale è dato di ricavare

$$2 CB . CE = \overline{CB}^2 - \overline{CE}^2$$

e quindi

$$2 CB . CE + \overline{CE}^2 = \overline{CB}^2$$

equazione di 2.° grado che risolta dà

$$CE = CB \sqrt{2} - CB$$

ovvero

$$CE = CB (\sqrt{2} - 1) = CB \times 0,41421$$

ossia è l'altezza della zona domandata eguale alla differenza fra il lato del quadrato inscritto in un circolo massimo della sfera e il raggio della sfera stessa, oppure eguale al raggio della sfera a cui appartiene, moltiplicato per il numero irrazionale 0,41421.

10.° — *Calcolare di quanto rialzasi il liquido contenuto in un vaso cilindrico, nel quale venga immerso un cono di dato peso.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 10).

Risoluzione. — Sia nel vaso cilindrico A B E D, di cui è noto il raggio di base, e nel quale è noto la qualità del liquido contenuto, che venga immerso un cono G H V di noto peso, che sia proposto di determinare di quanto si alzerà il liquido nel vaso cilindrico coll' immersione del cono.

Sapendo dalla Fisica e dalla legge d' Archimede, come ogni corpo immerso in un liquido perde tanto del suo peso quanto è il peso di un volume eguale del liquido nel quale è immerso, ne deriva che il cono immerso nel vaso cilindrico in questione vi rimarrà immerso per una parte Q R V, il cui volume moltiplicato pel peso specifico del liquido contenuto nel vaso, darà un peso pari a quello del cono. Laonde essendo P il peso del cono, questo diviso per Q peso specifico del liquido contenuto nel peso cilindrico, darà il volume V del cono che rimane immerso. Ora è evidente come, diviso il volume del cono per l'area della base del vaso cilindrico, si abbia l'altezza di un cilindro che avendo per base la base del vaso cilindrico, abbia per volume un volume pari a quello del cono immerso.

Il liquido nel vaso cilindrico dato si alzerà quindi di una quantità espressa da $\frac{P}{Q \times \pi \overline{FE}^2}$.

Conoscendo il raggio di base O H e l'altezza O V del cono dato, è poi facile il determinare l'altezza V C del cono immerso, bastando l'osservare che simili sono i due coni G H V, Q R V, e per conseguenza essi stanno tra di loro come i cubi delle loro altezze, e quindi

$$\pi \overline{OH}^2 . OV : \pi \overline{CR}^2 . CF :: \overline{OV}^3 : \overline{CV}^3$$

ossia

$$\pi \overline{OH}^2 . OV : \frac{P}{Q} :: \overline{OV}^3 : \overline{CV}^3$$

dalla quale

$$C\,V = \sqrt[3]{\frac{P\,.\,\overline{O\,V}^{3}}{Q\,.\,\pi\,\overline{O\,H}^{2}\,.\,O\,V}} = \sqrt[3]{\frac{P\,.\,\overline{O\,V}^{2}}{Q\,.\,\pi\,\overline{O\,H}^{2}}}$$

11.° — *Calcolare il peso del metro cubo di una catasta di cilindri di raggio dato e di cui è noto il peso specifico della materia di cui sono i medesimi composti.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 11).

Risoluzione. — Alloraquando si catastano cilindri, due e distinte essendo le posizioni che ad essi è dato di dare, cioè quella ad esempio dei quattro cilindri A A′, B B′, C C′, D D′, e quella dei tre cilindri E E′, C C′, D D′, così resta a calcolare per ognuna delle due suddette posizioni, il peso di ogni metro cubo di catasta.

Ora bene, nella prima posizione, essendo r il raggio dei cilindri, è evidente come per la larghezza di un metro siano collocabili $\frac{1}{2\,r}$ cilindri, e per l' altezza di un metro pure $\frac{1}{2\,r}$, cosicchè i cilindri collocati in un metro cubo avendo la lunghezza di un metro, in un metro cubo ve ne possono stare $\frac{1}{4\,r^2}$. Il volume di ognuno di detti cilindri essendo eguale al prodotto dell' area della rispettiva base per la rispettiva altezza, ne deriva che eguali essendo le basi e le altezze, il volume di tutti essi è eguale al prodotto dell'altezza comune per la somma delle aree di base, per modo che essendo la superficie di un circolo di raggio r espressa da $\pi\,r^2$ ed essendo $\frac{1}{4\,r^2}$ i cilindri, la somma delle basi farà $\frac{\pi\,r^2}{4\,r^2}$, e poichè tale somma moltiplicata per 1 dà conseguentemente $\frac{\pi}{4}$, così questo è il volume dei cilindri di raggio qualsiasi accatastati in un metro cubo nella prima delle due posizioni suindicate. Il peso poi essendo eguale al volume moltiplicato pel peso specifico, così Q esprimendo un

tale peso specifico, è il peso del metro cubo della catasta eguale a $\frac{\pi Q}{4}$, un valore cioè indipendente dal raggio dei cilindri.

Nella seconda posizione si ha che, r essendo il raggio di base dei cilindri, questi disposti successivamente su di una larghezza di un metro, sono contenuti in un numero espresso da $\frac{1}{2r}$; accatastati poi raggiungono doppio numero per ogni altezza espressa da $2r + r\sqrt{3}$, cosicchè nel cubo di lato un metro sono accatastabili

$$\frac{1}{2r+r\sqrt{3}} \times \frac{1}{r} = \frac{1}{2r^2+r^2\sqrt{3}} = \frac{1}{r^2\,(2\ \sqrt{3})}.$$

Il volume dei medesimi essendo eguale all'altezza comune, cioè 1 metro, per la somma delle basi, si ha che queste essendo tanti circoli quanti sono i cilindri, πr^2 essendo l'area di ciascuno,

$$\frac{\pi r^2}{r^2\,(2+\sqrt{3})} \times 1 = \frac{\pi}{2+\sqrt{3}}$$

è il volume dei cilindri accatastati in un metro cubo e nel modo in questione. Onde, Q essendo il peso specifico della materia di cui sono composti i cilindri, il peso del metro cubo della catasta nella seconda delle condizioni è espresso da $\frac{\pi Q}{2+\sqrt{3}}$, cioè indipendentemente dal raggio dei cilindri.

Delle due condizioni poi in cui possono essere disposti i cilindri, come si presenta evidente, ha maggiore peso quella ottenuta nell'ultima.

12.° — *Calcolare la parte di superficie terrestre che è dato di scorgere, supponendo di essere collocati ad una data altezza al disopra della superficie, e supponendo la terra una sfera perfetta.*

(Vedi Tavola XLII, Fig. 12).

Risoluzione. — La sfera di centro O rappresenti la terra, e P il punto d'osservazione. Tutti i raggi che partendo da P sono

tangenti alla sfera, tracciano il circolo minore D E, cosicchè è la parte di superficie terrestre data di scorgere, quella di una calotta sferica. La superficie di una calotta sferica essendo eguale al prodotto della circonferenza massima della sfera a cui appartiene, per l'altezza della calotta, ne deriva come la circonferenza massima della terra essendo conosciuta, non rimane che a determinare l'altezza C F della calotta, colla conoscenza della distanza del punto P dalla terra, distanza misurata nella retta P F che unisce il punto d'osservazione col centro della sfera, e colla conoscenza del raggio della terra. Per ciò, sapendo essere la tangente in un circolo media proporzionale fra tutta la secante e la sua parte esterna, si ha che immaginata una sezione che passando pel punto P passi pel centro O della sfera, è dato di ricavare che chiamando con R il raggio della terra, è

$$\overline{PE}^2 = (PF + 2R)\,PF$$

e poichè il triangolo P E O è rettangolo, e conseguentemente il cateto P E è medio proporzionale fra tutta l'ipotenusa P O e la sua proiezione P C, così ricavasi

$$\overline{PE}^2 = (PF + R)(PF + FC)$$

e quindi

$$\overline{PF}^2 + 2R.PF = \overline{PF}^2 + PF \times R + PF.FC + FC.R$$

dalla quale

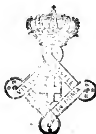
$$2R.PF - PF.R = PF.FC + FC.R$$

ed in seguito

$$R.PF = FC\,(PF + R)$$

da cui $FC = \frac{R.PF}{PF + R}$, e conseguentemente la superficie della calotta espressa da $\frac{2\pi R^2.PF}{PF + R}$.

Onde, dal punto di osservazione P è dato di scoprire una parte di superficie terrestre della figura di una calotta sferica, e di un'area espressa dal prodotto del doppio dell' area di un circolo massimo della terra, per la distanza dalla superficie terrestre del punto d'osservazione, diviso per la distanza corrente dal punto d'osservazione al centro della terra.



FINE.

INDICE

GEOMETRIA PIANA

LIBRO PRIMO

Sulle rette e sui poligoni.

LIBRO SECONDO

Sulle curve.

LIBRO TERZO

Della planimetria e delle figure simili.

GEOMETRIA SOLIDA

LIBRO QUARTO

Sulle rette e piani tra di loro.

APPENDICE

Sulle proiezioni.

LIBRO QUINTO

Sui poliedri a faccie piane.

APPENDICE

Della proiezione assonometrica in ispecie.

LIBRO SESTO

Del cilindro, cono e sfera.
